Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. К. Муминов, В. И. Чилин, Базис трансцендентности в дифференциальном поле инвариантов псевдогалилеевой группы, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 3, 19–31

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-3-19-31>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 06:42:50

К.К. МУМИНОВ, В.И. ЧИЛИН

БАЗИС ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ ИНВАРИАНТОВ ПСЕВДОГАЛИЛЕЕВОЙ ГРУППЫ

Аннотация. Пусть G — подгруппа в группе всех обратимых линейных преобразований конечномерного действительного пространства X . Одной из задач дифференциальной геометрии является нахождение легко проверяемых необходимых и достаточных условий, обеспечивающих G -эквивалентность путей, лежащих в X . При решении этой задачи используются методы теории дифференциальных инвариантов, дающие описание базисов трансцендентности дифференциальных полей G -инвариантных дифференциальных рациональных функций. Явный вид этих базисов позволяет установить эффективные критерии для G -эквивалентности путей. Такой подход был использован при решении задачи об эквивалентности путей относительно действия специальных линейных, ортогональных, псевдоортогональных и симплектических групп.

Даем явное описание одного из конечных базисов трансцендентности в дифференциальном поле дифференциальных рациональных функций, инвариантных относительно действия псевдогалилеевой группы GO . С помощью этого базиса устанавливаются необходимые и достаточные условия для GO -эквивалентности путей.

Ключевые слова: псевдогалилеево пространство, группа движений, дифференциальная рациональная функция, базис трансцендентности, дифференциальный инвариант, регулярный путь.

УДК: 512.745: 512.628: 514.125

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-3-19-31

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $GL(n, \mathbb{R})$ — группа всех обратимых линейных преобразований в n -мерном действительном линейном пространстве $\mathbb{R}^n$, G — подгруппа в $GL(n, \mathbb{R})$ и γ, β — две гладкие кривые в $\mathbb{R}^n$. Одной из важных задач дифференциальной геометрии кривых является нахождение необходимых и достаточных условий, обеспечивающих G -эквивалентность кривых γ и β , т. е. выполнение равенства $\beta = g(\gamma)$ для некоторого $g \in G$. Вариант такой задачи обсуждался еще Э. Картаном, и он известен в настоящее время как проблема Картана (проблема равенства) [1]. Первоначальное исследование этой проблемы равенства было проведено самим Э. Картаном с помощью метода подвижного репера [1], [2]. Геометрический подход к решению проблемы равенства рассматривался в [3]–[6].

При решении задач об G -эквивалентности систем достаточно большого числа кривых использовать геометрические методы становится затруднительным. Это обстоятельство приводит к необходимости привлечения методов теории инвариантов в решении указанных

задач. Такой подход, в частности, оказался полезным и при решении задач о G -эквивалентности конечных систем путей (бесконечно дифференцируемых вектор-функций). Отличие данного подхода от традиционных методов дифференциальной геометрии кривых (метода подвижного репера и метода приведенных уравнений Трессе) заключается в следующем.

Рассматривается и изучается дифференциальное поле $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^G$ всех G -инвариантных дифференциальных рациональных функций кривой и пути, в то время как в локальной дифференциальной геометрии только те дифференциальные инварианты, которые появляются в формулах Френе или в приведенных уравнениях Трессе.

Нахождение конечных рациональных базисов в дифференциальном поле $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^G$ позволяет установить эффективные критерии для G -эквивалентности кривых и путей. С помощью такого подхода были получены необходимые и достаточные условия для G -эквивалентности путей относительно действий специальной линейной группы, ортогональной, псевдоортогональной и симплектических групп [7]–[11].

Следует отметить, что метод ортогонального репера дает условия только для локальной G -эквивалентности кривых, в то время как метод дифференциальных G -инвариантов выясняет необходимые и достаточные условия для глобальной G -эквивалентности кривых и путей.

Одним из содержательных примеров неевклидовых геометрий является псевдогалилеева геометрия (например, [12], гл. 5, 4). Группу $GO(n, p)$, $1 \leq p < n - 1$ (раздел 1), всех обратимых линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих метрику псевдогалилеевого пространства называют *псевдогалилеевой группой*. Соответствующая группа движений псевдогалилеевого пространства есть полупрямое произведение $\mathbb{R}^n \triangleleft GO(n, p)$ групп $\mathbb{R}^n$ и $GO(n, p)$.

Решение задачи G -эквивалентности кривых и путей относительно действия групп $GO(n, p)$ и $\mathbb{R}^n \triangleleft GO(n, p)$ методами теории дифференциальных инвариантов приводит к необходимости нахождения конечных рациональных базисов, в частности, базисов трансцендентности в соответствующем дифференциальном поле $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n, p)}$ всех $GO(n, p)$ -инвариантных дифференциальных рациональных функций. Эта задача решается в разделе 3, где устанавливается явный вид одного из конечных базисов трансцендентности дифференциального поля $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n, p)}$.

Используя найденный базис трансцендентности в разделе 4 даются необходимые и достаточные условия эквивалентности путей относительно действия псевдогалилеевой группы $GO(n, p)$ (соответственно группы движений $\mathbb{R}^n \triangleleft GO(n, p)$).

Необходимые понятия, относящиеся к псевдогалилеевым пространствам и псевдогалилеевым группам линейных преобразований даны в разделе 2.

В работе активно используются известные критерии эквивалентности путей относительно действия псевдоортогональной группы. Формулировки этих критериев даны в разделе 1.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $GL(n, \mathbb{R})$ — группа всех обратимых линейных преобразований в $\mathbb{R}^n$. Отождествляя элементы из $\mathbb{R}^n$ с n -мерными вектор-столбцами $x = \{x_j\}_{j=1}^n$, а преобразования $g \in GL(n, \mathbb{R})$ — с $n \times n$ -матрицами $(g_{ij})_{i,j=1}^n$, действие $g \in GL(n, \mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^n$ реализуется как умножение матрицы g на вектор-столбец x (gx), в частности, верны равенства

$$g_{ij} = (ge_j, e_i), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j, \quad x = \{x_j\}_{j=1}^n, \quad y = \{y_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n.$$

Путем в $\mathbb{R}^n$ называют вектор-функцию $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$, у которой все координатные функции $x_j : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ являются бесконечно дифференцируемыми. Производная r -го порядка от пути $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ есть вектор-функция $x^{(r)}(t) = \{x_j^{(r)}(t)\}_{j=1}^n$, где $x_j^{(r)}(t)$ — r -я производная координатной функции $x_j(t)$, $t \in (0, 1)$, $j = 1, \dots, n$, $r = 1, 2, \dots$. Ясно, что вектор-функция $x^{(r)}(t)$ также является путем в $\mathbb{R}^n$ при каждом $r = 1, 2, \dots$.

Для произвольного пути $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ через $M(x)(t)$ обозначается $n \times n$ -матрица, где j -й столбец имеет координаты $x_i^{(j-1)}(t)$, $x_i^{(0)}(t) = x_i(t)$, $i, j = 1, \dots, n$. Через $M^{(1)}(x)(t)$ обозначается матрица $(x_i^{(j)}(t))_{i,j=1}^n$.

Путь $x(t)$ называется сильно регулярным, если определитель $\det M(x)(t)$ не равен нулю при всех $t \in (0, 1)$. В случае, когда путь $x(t)$ не регулярен, существует такое $t_0 \in (0, 1)$, что $x_i^{(1)}(t_0) = 0$ при всех $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $M(x)(t_0) = 0$, т.е. $x(t)$ не является сильно регулярным путем. Таким образом, сильно регулярный путь обязательно является регулярным путем.

Пусть G — подгруппа группы $GL(n, \mathbb{R})$. Два пути $x(t)$ и $y(t)$ называются G -эквивалентными, если существует такой элемент $g \in G$, что $y(t) = gx(t)$ для всех $t \in (0, 1)$. В этом случае $y^{(j)}(t) = gx^{(j)}(t)$, $j = 1, 2, \dots$, и поэтому G -эквивалентность путей $x(t)$ и $y(t)$ равносильна выполнению равенства $M(y)(t) = g \cdot M(x)(t)$ при всех $t \in (0, 1)$.

Зафиксируем натуральное число $p \in \{1, \dots, n-1\}$ и рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ билинейную форму $[x, y] = x_1y_1 + \dots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_ny_n$. Обозначим через $J_n^{(p)}$ матрицу $(J_{ij}^{(p)})_{i,j=1}^n$, у которой $J_{jj}^{(p)} = 1$ при $j = 1, \dots, p$, $J_{jj}^{(p)} = -1$ при $j = p+1, \dots, n$ и $J_{ij}^{(p)} = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$.

Ясно, что для любых $x = \{x_j\}_{j=1}^n$, $y = \{y_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ верно равенство $[x, y] = x^T \cdot J_n^{(p)} \cdot y$, где x^T — вектор-строка, транспонированная к вектор-столбцу x .

Псевдоортогональная подгруппа в группе $GL(n, \mathbb{R})$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} O(n, p) &= \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : g^T \cdot J_n^{(p)} \cdot g = J_n^{(p)}\} = \\ &= \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : [gx, gy] = [x, y] \text{ для любых } x, y \in \mathbb{R}^n\}, \end{aligned}$$

где g^T — транспонированная к матрице g матрица.

Через $SO(n, p) = \{g \in O(n, p) : \det g = 1\}$ обозначается специальная псевдоортогональная подгруппа в $GL(n, \mathbb{R})$.

Известны следующие необходимые и достаточные условия G -эквивалентности сильно регулярных путей $x(t)$ и $y(t)$, описываемые с помощью матриц $M(x)(t)$ и $M(y)(t)$, в случае, когда G есть одна из групп $O(n, p)$ в $SO(n, p)$ ([9], гл. 3, §3.2, теорема 3.2.1).

Теорема 1.1. (i) Два сильно регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $O(n, p)$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$(M(x))^{-1}(t) M^{(1)}(x)(t) = (M(y))^{-1}(t) M^{(1)}(y)(t), \quad (1.1)$$

$$M^T(x)(t) \cdot J_n^{(p)} \cdot M(x)(t) = M^T(y)(t) \cdot J_n^{(p)} \cdot M(y)(t) \quad (1.2)$$

для всех $t \in (0, 1)$.

(ii) Два сильно регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ $SO(n, p)$ -эквивалентны в том и только том случае, если выполнены равенства (1.1), (1.2) и $\det M(x)(t) = \det M(y)(t)$ для всех $t \in (0, 1)$.

В следующем утверждении приводится критерий $O(n, p)$ -эквивалентности (соответственно $SO(n, p)$ -эквивалентности) путей, использующий билинейную форму $[x, y]$ (например, [9], гл. 2, §3.2, теоремы 3.2.2–3.2.4; [10]).

Теорема 1.2. Два сильно регулярных пути $x(t)$ и $y(t)$ $O(n, p)$ -эквивалентны (соответственно $SO(n, p)$ -эквивалентны) тогда и только тогда, когда $[x^{(k)}(t), x^{(k)}(t)] = [y^{(k)}(t), y^{(k)}(t)]$ для всех $t \in (0, 1)$, $k = 0, \dots, n-1$ (соответственно $[x^{(k)}(t), x^{(k)}(t)] = [y^{(k)}(t), y^{(k)}(t)]$ и $\det M(x)(t) = \det M(y)(t)$ для всех $t \in (0, 1)$, $k = 0, \dots, n-2$).

Обозначим через $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ группу всех аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. Каждое преобразование из $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ является суперпозицией линейного невырожденного преобразования $g \in GL(n, \mathbb{R})$ и сдвига, порожденного элементом $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, т.е. аффинное преобразование $(u, g) \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ действует в $\mathbb{R}^n$ по правилу $(u, g)(x) = g(x) + u$, где $x, u \in \mathbb{R}^n$, $g \in GL(n, \mathbb{R})$. Операция умножения в группе $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством $(u, g)(v, h) = (u + gv, gh)$, т.е. группа $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ есть полупрямое произведение $R^n \triangleleft GL(n, R)$ групп $\mathbb{R}^n$ и $GL(n, \mathbb{R})$. Если G — подгруппа в $GL(n, R)$, то множество $R^n \triangleleft G = \{(u, g) \in R^n \triangleleft GL(n, R) : g \in G\}$ является подгруппой в $R^n \triangleleft GL(n, R)$.

Два пути $x(t)$ и $y(t)$, заданные в $\mathbb{R}^n$, называются $\mathbb{R}^n \triangleleft G$ -эквивалентными, если существует такое $(u, g) \in \mathbb{R}^n \triangleleft G$, что $y(t) = gx(t) + u$ для всех $t \in (0, 1)$.

Следующее утверждение сводит задачу о $\mathbb{R}^n \triangleleft G$ -эквивалентности путей $x(t)$ и $y(t)$ к задаче G -эквивалентности путей $x^{(1)}(t)$ и $y^{(1)}(t)$ (например, [9], гл. 1, §1.6, утверждение 1.6.3).

Утверждение 1.1. Пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\mathbb{R}^n \triangleleft G$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда пути $x^{(1)}(t)$ и $y^{(1)}(t)$ G -эквивалентны.

Из утверждения 1.1 и теоремы 1.2, например, вытекает следующий полезный критерий $\mathbb{R}^n \triangleleft G$ -эквивалентности путей $x(t)$ и $y(t)$ в случае, когда G есть одна из групп $O(n, p)$ и $SO(n, p)$.

Теорема 1.3. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — два пути в $\mathbb{R}^n$, для которых пути $x^{(1)}(t)$ и $y^{(1)}(t)$ сильно регулярны. Тогда пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $R^n \triangleleft O(n, p)$ -эквивалентными (соответственно $R^n \triangleleft SO(n, p)$ -эквивалентными) тогда и только тогда, когда $[x^{(k)}(t), x^{(k)}(t)] = [y^{(k)}(t), y^{(k)}(t)]$ для всех $t \in (0, 1)$ и $k = 1, \dots, n$ (соответственно $[x^{(k)}(t), x^{(k)}(t)] = [y^{(k)}(t), y^{(k)}(t)]$ и $\det M^{(1)}(x)(t) = \det M^{(1)}(y)(t)$ для всех $t \in (0, 1)$ и $k = 1, \dots, n-1$).

2. ПСЕВДОГАЛИЛЕЕВО ПРОСТРАНСТВО

Зафиксируем натуральное число $p \in \{2, \dots, n-1\}$ и определим в $\mathbb{R}^n$ псевдогалилееву метрику $d_p(x, y)$, полагая

$$d_p^2(x, y) = \begin{cases} (x_1 - y_1)^2, & \text{если } x_1 \neq y_1; \\ \sum_{i=2}^p (x_i - y_i)^2 - \sum_{j=p+1}^n (x_j - y_j)^2, & \text{если } x_1 = y_1. \end{cases}$$

Пару $(\mathbb{R}^n, d_p)$ называют псевдогалилеевым пространством ([12], гл. 5, §4) и обозначают через ${}^p\Gamma_n$.

Пусть $e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, где единица стоит на i -м месте, $i = 1, \dots, n$. Положим

$$U_n = \{\alpha e_1 : \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad V_n = \text{Lin}(\{e_i\}_{i=2}^n) = \left\{ \sum_{i=2}^n \alpha_i e_i : \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 2, \dots, n \right\},$$

и в группе $GL(n, \mathbb{R})$ рассмотрим подгруппу

$$G_n = \{g \in GL(n, \mathbb{R}) : gU_n = U_n, \quad gV_n = V_n\}.$$

Если $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in G_n$, то $g(e_1) = \{y_1, 0, \dots, 0\} \in U_n$, и поэтому $g_{i1} = (ge_1, e_i) = 0$ при каждом $i = 2, \dots, n$.

Обозначим через $GO(n, p)$ множество всех тех $g \in G_n$, для которых $g_{11} = \pm 1$ и сужение $g|_{V_n}$ преобразования g на подпространство V_n есть псевдоортогональное преобразование. Если $g \in GO(n, p)$, $x = \{x_j\}_{j=1}^n, y = \{y_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $x_1 = y_1 = 0$, то $gx = \{u_j\}_{j=1}^n, gy = \{v_j\}_{j=1}^n$ где $u_1 = v_1 = 0$. Взяв в V_n базис $e_2, \dots, e_n$ и отождествляя V_n с пространством $\mathbb{R}^{n-1}$, получим, что для любого $g \in GO(n, p)$ сужение $g|_{V_n} = h = (h_{ij})_{i,j=2}^n$ преобразования g на V_n есть элемент группы $O(n-1, p-1)$, при этом $h_{ij} = (he_j, e_i) = (ge_j, e_i) = g_{ij}$ для всех $i, j = 2, \dots, n$.

Следовательно,

$$GO(n, p) = \{g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GL(n, \mathbb{R}) : g_{11} = \pm 1, \quad g_{i1} = 0, \quad i = 2, \dots, n, \\ gV_n = V_n, \quad (g_{ij})_{i,j=2}^n \in O(n-1, p-1)\}. \quad (2.1)$$

Утверждение 2.1. Преобразование $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in G_n$ принадлежит множеству $GO(n, \mathbb{R})$ в том и только том случае, если $d_p^2(gx, gy) = d_p^2(x, y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Если $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GO(n, \mathbb{R})$, $x = \{x_j\}_{j=1}^n, y = \{y_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $x_i = y_i$ для всех $i = 2, \dots, n$, то $g_{11} = \pm 1$, $g_{i1} = 0$ при $i = 2, \dots, n$, $d_p^2(x, y) = (x_1 - y_1)^2$. Следовательно,

$$gx = \left\{ \sum_{j=1}^n g_{1j} x_j \right\}_{i=1}^n = \left\{ \pm x_1 + \sum_{j=2}^n g_{1j} x_j, \quad \sum_{j=2}^n g_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=2}^n g_{nj} x_j \right\}, \\ gy = \left\{ \pm y_1 + \sum_{j=2}^n g_{1j} y_j, \quad \sum_{j=2}^n g_{2j} y_j, \dots, \sum_{j=2}^n g_{nj} y_j \right\},$$

и поэтому $d_p^2(gx, gy) = (x_1 - y_1)^2 = d_p^2(x, y)$.

Если же $x_1 = y_1$, то из включения $g|_{V_n} \in O(n-1, p-1)$ также следует $d_p^2(gx, gy) = d_p^2(x, y)$.

Предположим теперь, что $g \in G_n$ и $d_p^2(gx, gy) = d_p^2(x, y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Так как $g(U_n) = U_n$, то $g_{21} = g_{31} = \dots = g_{n1} = 0$. Взяв $x = \{x_j\}_{j=1}^n, y = \{y_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, где $x_1 = 1, x_j = 0, j = 2, \dots, n, y_j = 0, j = 1, \dots, n$, получим, что $d_p^2(x, y) = (x_1 - y_1)^2 = 1$ и $d_p^2(gx, gy) = (g_{11}x_1 - g_{11}y_1)^2 = g_{11}^2$, т.е. $g_{11} = \pm 1$.

Если теперь $x_1 = y_1 = 0$, то $x, y \in V_n$, и поэтому $gx, gy \in V_n$. Следовательно, равенство $d_p^2(gx, gy) = d_p^2(x, y)$ влечет $[gx, gy] = [x, y]$. Это означает, что $g|_{V_n} \in O(n-1, p-1)$, т.е. $g \in GO(n, \mathbb{R})$. $\square$

Покажем теперь, что $GO(n, p)$ есть группа относительно алгебраической операции, индуцируемой из $GL(n, \mathbb{R})$.

Если $g_i = \begin{pmatrix} \pm 1 & g_{12}^{(i)} & \dots & g_{1n}^{(i)} \\ 0 & g_{22}^{(i)} & \dots & g_{2n}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & g_{n2}^{(i)} & \dots & g_{nn}^{(i)} \end{pmatrix} \in \Gamma O(n, p)$, где $\begin{pmatrix} g_{22}^{(i)} & \dots & g_{2n}^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n2}^{(i)} & \dots & g_{nn}^{(i)} \end{pmatrix} \in O(n-1, p-1)$,
 $i = 1, 2$, то $(g_1 g_2)(V_n) = V_n$ и

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} \pm 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{22}^{(1)} & \dots & g_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n2}^{(1)} & \dots & g_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{22}^{(2)} & \dots & g_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n2}^{(2)} & \dots & g_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \in O(n-1, p-1).$$

Следовательно, $g_1 \cdot g_2 \in \Gamma O(n, p)$.

Далее для любого $h = (h_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma O(n, p)$ имеем

$$h^{-1} = (b_{ij})_{i,j=1}^n = \frac{1}{\det h} (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad \text{где } a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji};$$

здесь M_{ji} есть минор, получаемый при вычеркивании j -й строки и i -го столбца. Следовательно,

$$a_{i1} = (-1)^{i+1} \det \begin{pmatrix} 0 & h_{22} & \dots & h_{2,i-1} h_{2,i+1} & \dots & h_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & h_{n2} & \dots & h_{n,i-1} h_{n,i+1} & \dots & h_{n,n} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 2, \dots, n,$$

и поэтому $b_{i1} = 0$ для всех $i = 2, \dots, n$. Кроме того,

$$\det h = h_{11} M_{11} = h_{11} a_{11} = \pm a_{11},$$

т. е. $b_{11} = \pm 1$. Поскольку h^{-1} есть биекция, то $h^{-1}(V_n) = V_n$, и включение $h|_{V_n} \in O(n-1, p-1)$ влечет $h|_{V_n}^{-1} \in O(n-1, p-1)$. Следовательно, $h^{-1} \in \Gamma O(n, p)$ (см. (2.1)).

Группу $\Gamma O(n, p)$ будем называть *группой псевдогалилеевых преобразований* пространства ${}^p \Gamma_n$. Множество $S\Gamma O(n, p) = \{g \in \Gamma O(n, p) : \det g = 1\}$ является подгруппой в $\Gamma O(n, p)$, которая называется *специальной псевдогалилеевой группой*.

3. БАЗИС ТРАНЦЕНТНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ $\Gamma O(n, p)$ -ИНВАРИАНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\mathbb{K}$ — коммутативное кольцо и d — дифференцирование в $\mathbb{K}$, т. е.

$$d(x + y) = d(x) + d(y), \quad d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y)$$

для любых $x, y \in \mathbb{K}$. Известно ([13], теорема 1.1), что дифференцирование d в области целостности $\mathbb{K}$ допускает единственное продолжение до дифференцирования на соответствующее поле частных.

Коммутативное кольцо $\mathbb{K}$ с единицей (соответственно, поле $\mathbb{F}$), в котором задано фиксированное дифференцирование, называется дифференциальным кольцом (d -кольцом) (соответственно дифференциальным полем, d -полем). Подполе $\mathbb{F}$ в d -поле $\mathbb{F}$ называют d -подполем, если $d(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}$.

Приведем нужные нам примеры d -колец и d -полей. Зафиксируем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$ от счетного числа переменных

$$x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots, x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

(считаем $x_i = x_i^{(0)}$, $i = 1, \dots, n$).

Положим

$$d(x_i^{(m)}) = x_i^{(m+1)}, \quad d(\alpha) = 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n, \quad m = 0, 1, \dots, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Отображение d однозначно продолжается до дифференцирования δ в кольце $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, наделяя это кольцо структурой дифференциального кольца [13]. Обозначим через $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ поле частных для кольца $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, т. е. $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ является полем всех рациональных функций от тех же переменных $x_i^{(m)}$, $i = 1, \dots, n$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Согласно ([13], теорема 1.1) дифференцирование δ единственным образом продолжается с кольца $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ до дифференцирования в поле $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, превращая это поле в дифференциальное поле.

Элементы из d -кольца $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ (d -поля $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$) называют d -многочленами (d -рациональными функциями) и записывают в виде $f[x_1, \dots, x_n]$ (соответственно $f\langle x_1, \dots, x_n \rangle$).

Говорят, что элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ из d -поля $\mathbb{P}$ являются d -алгебраически зависимыми над d -подполем $\mathbb{F}$, если существует такой ненулевой d -многочлен $f[x_1, \dots, x_m]$ из $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_m]$, что $f[\alpha_1, \dots, \alpha_m] = 0$. В противном случае система элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ называется d -алгебраически независимой над d -подполем $\mathbb{F}$.

Подмножество L элементов d -поля $\mathbb{P}$ называют d -алгебраически независимым над d -подполем $\mathbb{F}$, если любое конечное подмножество из L является d -алгебраически независимым над $\mathbb{F}$. Любое максимальное d -алгебраически независимое над $\mathbb{F}$ множество элементов d -поля $\mathbb{P}$ называют базисом трансцендентности d -поля $\mathbb{P}$ над d -подполем $\mathbb{F}$. В силу леммы Цорна в d -поле $\mathbb{P}$ всегда существует базис трансцендентности над $\mathbb{F}$.

Теорема 3.1. ([14], гл. II, §9, теорема 4). Пусть $\mathbb{F}$ — d -подполе в d -поле $\mathbb{P}$ и $\mathbb{K}$ — d -подполе в d -поле $\mathbb{F}$. Тогда

- (i) все базисы трансцендентности в d -поле $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$ имеют одну и ту же мощность;
- (ii) если L — базис трансцендентности в $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$ и M — базис трансцендентности в d -поле $\mathbb{F}$ над $\mathbb{K}$, то $L \cap M = \emptyset$ и $L \cup M$ есть базис трансцендентности $\mathbb{P}$ над $\mathbb{K}$.

Общее кардинальное число различных базисов трансцендентности d -поля $\mathbb{P}$ над $\mathbb{F}$ называется степенью трансцендентности $\mathbb{P}$ над d -подполем $\mathbb{F}$ и обозначается через ст. тр. $\mathbb{P}/\mathbb{F}$. Из п. (ii) теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. Если выполнены условия теоремы 3.1, то

$$\text{ст. тр. } \mathbb{P}/\mathbb{K} = \text{ст. тр. } \mathbb{P}/\mathbb{F} + \text{ст. тр. } \mathbb{F}/\mathbb{K}.$$

Заметим, что дифференциальное поле $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ имеет степень трансцендентности над полем $\mathbb{R}$, равную n .

Если G — подгруппа в $GL(n, \mathbb{R})$ и $f\langle gx \rangle = f\langle x \rangle$ для всех $g \in G$, то d -рациональная функция $f\langle x \rangle$ называется G -инвариантной. Множество всех G -инвариантных d -рациональных функций обозначается через $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^G$. Известно, что $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^G$ является дифференциальным подполем в дифференциальном поле $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ([15]).

Теорема 3.2. ([9], гл. 2, §§2, 3, теоремы 2.2.5 и 2.3.2).

(i) В d -поле $\mathbb{R}\langle x \rangle^{O(n,p)}$ конечный базис трансцендентности со степенью трансцендентности n образует d -многочлены $[x^{(k)}, x^{(k)}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

(ii) В d -поле $\mathbb{R}\langle x \rangle^{SO(n,p)}$ конечный базис трансцендентности со степенью трансцендентности n образуют d -многочлены $[x^{(k)}, x^{(k)}]$, $k = 0, 1, \dots, n-2$, и определитель $[x^{(0)}x^{(1)} \dots x^{(n-1)}]$, в котором столбцами являются вектор-столбцы

$$x^{(k)} = \{x_j^{(k)}\}_{j=1}^n, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Теорема 3.3. Конечный базис трансцендентности дифференциального поля $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n,p)}$ (соответственно $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{SGO(n,p)}$) со степенью трансцендентности n образуют многочлены

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=2}^p (x_i^{(k)})^2 - \sum_{i=p+1}^n (x_i^{(k)})^2, \quad k = 0, 1, \dots, n-2; \quad (3.1)$$

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = x_1 \quad (3.2)$$

(соответственно $\det \begin{pmatrix} x_2^{(0)} & \dots & x_n^{(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(0)} & \dots & x_n^{(n-2)} \end{pmatrix}$, (3.2) и (3.1) при $k = 0, 1, \dots, n-3$).

Доказательство. Каждая $GO(n,p)$ -инвариантная d -рациональная функция есть отношение двух $GO(n,p)$ -инвариантных d -многочленов (см. доказательство теоремы 2.1 из [9], гл. 2, §2.1). Поэтому достаточно установить, что любой $GO(n,p)$ -инвариантный d -многочлен выражается через d -многочлены (3.1) и (3.2) с помощью конечного числа операций d -поля $\mathbb{R}\langle x \rangle^{GO(n,p)}$.

Каждый d -многочлен $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n,p)}$ есть конечная сумма мономов вида

$$q(x_1, \dots, x_n) = (x_1^{(i_1)}, \dots, x_1^{(i_k)}) \cdot \varphi(x_2, \dots, x_n),$$

где $0 \leq i_1 < i_n < \dots < i_k$, и $\varphi(x_2, \dots, x_n)$ есть d -многочлен над полем $\mathbb{R}$ от переменных $x_2, \dots, x_n$.

Положив

$$r(x_1) = x_1^{(i_1)}, \dots, x_1^{(i_k)}, \quad (3.3)$$

имеем

$$q(x_1, \dots, x_n) = r(x_1) \cdot \varphi(x_2, \dots, x_n). \quad (3.4)$$

Таким образом, каждый d -многочлен $p(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n,p)}$ представим в виде

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{s=1}^m r_s(x_1) \cdot \varphi_s(x_2, \dots, x_n), \quad (3.5)$$

где $r_s(x_1)$ имеет вид (3.3) и $\varphi_s \in \mathbb{R}[x_2, \dots, x_n]$, $s = 1, \dots, m$.

Пусть $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GO(n, p)$, причем $g_{11} = 1$. Поскольку $gU_n = U_n$, $gV_n = V_n$, то $g(\{x_i\}_{i=1}^n) = \{x_1, y_2, \dots, y_n\}$, где $\{y_2, \dots, y_n\} = g|_{V_n}(\{x_2, \dots, x_n\})$. Используя $GO(n, p)$ -инвариантность многочлена p , согласно (3.5) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^m r_s(x_1) \cdot \varphi_s(x_2, \dots, x_n) &= p(x_1, \dots, x_n) = p(gx) = p(x_1, y_2, \dots, y_n) = \\ &= \sum_{s=1}^m r_s(x_1) \cdot \varphi_s(y_2, \dots, y_n) = \sum_{s=1}^m r_s(x_1) \cdot \varphi_s(h(\{x_2, \dots, x_n\})), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $h = (g_{ij})_{i,j=2}^n \in O(n-1, p-1)$.

Поскольку равенство (3.6) верно для любых значений $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, то $\varphi_s(x_2, \dots, x_n) = \varphi_s(h(\{x_2, \dots, x_n\}))$ для любых $h \in O(n-1, p-1)$. Следовательно, $\varphi_s \in \mathbb{R}\langle x_2, \dots, x_n \rangle^{O(n-1, p-1)}$ при каждом $s = 1, \dots, m$.

Согласно п. (i) теоремы 3.2 многочлены $\varphi_s(x_2, \dots, x_n)$, $s = 1, \dots, m$, выражаются через многочлены (3.1) с помощью конечного числа операций d -поля $\mathbb{R}\langle x_2, \dots, x_n \rangle^{O(n-1, p-1)}$, которое в силу (2.1) содержится в d -поле $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n, p)}$.

Поэтому из (3.5) следует, что многочлен $p(x_1, \dots, x_n)$ выражается через (3.1) и (3.2) с помощью конечного числа операций d -поля $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n, p)}$.

Покажем теперь, что система d -многочленов (3.1), (3.2) есть базис трансцендентности d -поля $\mathbb{R}\langle x \rangle^{GO(n, p)}$.

Поскольку $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n, p)} \subset \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и степень трансцендентности поля $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ над полем $\mathbb{R}$ равна n , то в силу следствия 3.1, достаточно показать, что

$$\text{ст. тр. } \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle / \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{\Gamma(n, p)} = 0, \quad (3.7)$$

т.е. достаточно установить, что все многочлены $q_i[x_1, \dots, x_n] = x_i$, $i = 1, \dots, n$, являются алгебраическими элементами над d -полем $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{\Gamma(n, p)}$. Последнее означает существование такого d -многочлена $\psi_i[y]$ с коэффициентами из дифференциального поля $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{\Gamma(n, p)}$, для которого верно равенство $\psi_i[x_i] = 0$, $i = 1, \dots, n$. Заметим, что многочлен $q_1[x_1, \dots, x_n] = x_1$ уже принадлежит d - полю $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{\Gamma(n, p)}$.

При доказательстве теоремы 3 из [16] установлено, что многочлены

$$q_i[x_1, \dots, x_n] = x_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

являются алгебраическими элементами над d -полем $\mathbb{R}\langle x_2, \dots, x_n \rangle^{O(n-1, p-1)}$. Поскольку $(g_{ij})_{i,j=2}^n \in O(n-1, p-1)$ для каждого $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GO(n, p)$ (см. (3.1)), то $\mathbb{R}\langle x_2, \dots, x_n \rangle^{O(n-1, p-1)} \subset \mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n, p)}$.

Следовательно, многочлены $q_i[x_1, \dots, x_n]$ будут алгебраическими элементами и над d -полем $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n, p)}$. Это означает, что верно равенство (3.7), и поэтому многочлены вида (3.1), (3.2) есть конечный базис трансцендентности d -поля $\mathbb{R}\langle x \rangle^{GO(n, p)}$ со степенью трансцендентности n .

Доказательство теоремы 3.3 для d -поля $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{SGO(n, p)}$ использует п. (ii) теоремы 3.2 и дословно повторяет предыдущее доказательство для d -поля $\mathbb{R}\langle x_1, \dots, x_n \rangle^{GO(n, p)}$. $\square$

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ПСЕВДОГАЛИЛЕЕВОЙ ГРУППЫ

В этом разделе устанавливаются необходимые и достаточные условия для эквивалентности путей, лежащих в ${}^p\Gamma_n$ относительно действия групп

$$GO(n, p), SGO(n, p), R^n \triangleleft GO(n, p) \text{ и } R^n \triangleleft SGO(n, p).$$

Рассмотрим произвольный путь $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ в псевдогалилеевом пространстве ${}^p\Gamma_n$, и положим $\hat{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=2}^n \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $M_{n-1}(\hat{x}(t)) = (x_i^{(j-1)}(t))_{i,j=2}^n$. Будем говорить, что путь $x(t)$ является ΓO -регулярным, если $\det M_{n-1}(\hat{x}(t)) \neq 0$ при всех $t \in (0, 1)$.

Вариантом теоремы 1.1 для групп $\Gamma O(n, p)$ и $S\Gamma O(n, p)$ является

Теорема 4.1. *ΓO -регулярные пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\Gamma O(n, p)$ -эквивалентными (соответственно $S\Gamma O(n, p)$ -эквивалентными) тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства*

$$y_1(t) = \pm x_1(t), \quad (4.1)$$

$$M_{n-1}^{-1}(\hat{x}(t))M_{n-1}^{(1)}(\hat{x}(t)) = M_{n-1}^{-1}(\hat{y}(t))M_{n-1}^{(1)}(\hat{y}(t)) \quad (4.2)$$

и

$$M_{n-1}^T(\hat{x}(t))J_{n-1}^{(p-1)}M_{n-1}(\hat{x}(t)) = M_{n-1}^T(\hat{y}(t))J_{n-1}^{(p-1)}M_{n-1}(\hat{y}(t)) \quad (4.3)$$

для всех $t \in (0, 1)$ (соответственно выполнены равенства (4.2), (4.3) и равенства

$$y_1(t) = x_1(t), \quad (4.4)$$

$$\det M_{n-1}(\hat{x}(t)) = \det M_{n-1}(\hat{y}(t)) \quad (4.5)$$

для всех $t \in (0, 1)$.

Доказательство. Если пути $x(t)$ и $y(t)$ $\Gamma O(n, p)$ -эквивалентны, то существует такое $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma O(n, p)$, что $y(t) = gx(t)$ для всех $t \in (0, 1)$. Так как $g_{11} = \pm 1$, $g_{in} = 0$ для всех $i = 2, \dots, n$, и $gV_n = V_n$, то $g\{x_1(t), 0, \dots, 0\} = \{\pm x_1(t), 0, \dots, 0\}$ и $g\{0, x_2(t), \dots, x_n(t)\} = \{0, z_2(t), \dots, z_n(t)\}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} g(x(t)) &= g\{x_1(t), 0, \dots, 0\} + g\{0, x_2(t), \dots, x_n(t)\} = \\ &= \{\pm x_1(t), 0, \dots, 0\} + \{0, z_2(t), \dots, z_n(t)\} = \{\pm x_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)\}, \end{aligned}$$

т. е. $y_1(t) = \pm x_1(t)$ для всех $t \in (0, 1)$ и

$$\{y_2(t), y_3(t), \dots, y_n(t)\} = h\{x_2(t), \dots, x_n(t)\},$$

где $h = (g_{ij})_{i,j=1}^{n-1} \in O(n-1, p-1)$.

Используя теперь п. (i) теоремы 1.1, получим справедливость нужных нам равенств (4.2), (4.3).

Пусть теперь выполнены равенства (4.1)–(4.3). Из п. (i) теоремы 1.1 и из равенств (4.2),

$$(4.3) \text{ вытекает существование преобразования } h = \begin{pmatrix} g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \in O(n-1, p-1),$$

для которого $\{y_2(t), \dots, y_n(t)\} = h\{x_2(t), \dots, x_n(t)\}$.

$$\text{Если } g = (g_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \pm 1 & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}, \text{ то } g \in \Gamma O(n, p),$$

$$\text{при этом } g(\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}) = \left\{ \sum_{j=1}^n g_{ij}x_j(t) \right\} = \{\pm x_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}.$$

Согласно равенству (4.1) имеем $y_1(t) = \pm x_1(t)$. В случае равенства $y_1(t) = -x_1(t)$ полагаем $g_{11} = -1$, если же $y_1(t) = x_1(t)$, то берем $g_{11} = 1$. В обоих случаях получим $g \in \Gamma O(n, \mathbb{R})$ и $y(t) = gx(t)$ для всех $t \in (0, 1)$.

Доказательство теоремы 4.1 для группы $S\Gamma O(n, p)$ использует п. (ii) теоремы 1.1 и аналогично предыдущему доказательству. $\square$

С помощью теорем 1.2 и 4.1 получаем следующий критерий для $\Gamma O(n, p)$ -эквивалентности (соответственно $S\Gamma O(n, p)$ -эквивалентности) ΓO -регулярных путей.

Теорема 4.2. *ΓO -регулярные пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\Gamma O(n, p)$ -эквивалентными ($S\Gamma O(n, p)$ -эквивалентными) в том и только том случае, если выполнены равенство (4.1) и*

$$\sum_{i=2}^p (x_i^{(k)}(t))^2 - \sum_{i=p+1}^n (x_i^{(k)}(t))^2 = \sum_{i=2}^p (y_i^{(k)}(t))^2 - \sum_{i=p+1}^n (y_i^{(k)}(t))^2 \quad (4.6)$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$ и $t \in (0, 1)$ (соответственно выполнены равенства (4.4), (4.5) и равенство (4.6) для всех $k = 0, 1, 2, \dots, n-3$ и $t \in (0, 1)$).

Доказательство. Если пути $x(t)$ и $y(t)$ $\Gamma O(n, p)$ -эквивалентны, то найдется такое $(g_{ij})_{i,j=1}^n \in \Gamma O(n, p)$, что $y(t) = gx(t)$. Поскольку $h = (g_{ij})_{i,j=2}^n \in O(n-1, p-1)$ и $\{y_2(t), \dots, y_n(t)\} = h\{x_2(t), \dots, x_n(t)\}$, то в силу теоремы 1.2 верны равенства (4.6) для всех $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$ и $t \in (0, 1)$. Кроме того, согласно теореме 4.1 справедливо (4.1).

Обратно, пусть верны равенства (4.1) и (4.6). В силу теоремы 1.2 существует такое $h = (h_{ij})_{i,j=2}^n$ из $O(n-1, p-1)$, что $\{y_2(t), \dots, y_n(t)\} = h\{x_2(t), \dots, x_n(t)\}$.

$$\text{Для матрицы } g = (g_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \in \Gamma O(n, p) \text{ для всех } t \in (0, 1)$$

имеем $y(t) = gx(t)$ (в случае $y_1(t) = x_1(t)$ полагаем $g_{11} = 1$, а в случае $y_1(t) = -x_1(t)$ берется $g_{11} = -1$).

Доказательство теоремы 4.2 для группы $S\Gamma O(n, p)$ повторяет предыдущее доказательство для группы $\Gamma O(n, p)$. $\square$

Из утверждения 1.1 и теоремы 4.2 вытекают следующие необходимые и достаточные условия для $\mathbb{R}^n \triangleleft \Gamma O(n, p)$ -эквивалентности ($\mathbb{R}^n \triangleleft S\Gamma O(n, p)$ -эквивалентности) путей (ср. с теоремой 1.3).

Теорема 4.3. *Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — такие пути в $\mathbb{R}^n$, для которых пути $x^{(1)}(t)$ и $y^{(1)}(t)$ ΓO -регулярны. Тогда*

(i) *пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\mathbb{R}^n \triangleleft \Gamma O(n, p)$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$y_1^{(1)}(t) = \pm x_1^{(1)}(t), \quad (4.7)$$

$$\sum_{i=2}^p (x_i^{(k)}(t))^2 - \sum_{i=p+1}^n (x_i^{(k)}(t))^2 = \sum_{i=2}^p (y_i^{(k)}(t))^2 - \sum_{i=p+1}^n (y_i^{(k)}(t))^2 \quad (4.8)$$

для всех $k = 1, \dots, n-1$ и $t \in (0, 1)$;

(ii) *пути $x(t)$ и $y(t)$ являются $\mathbb{R}^n \triangleleft S\Gamma O(n, p)$ -эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства (4.8) при $k = 1, \dots, n-2$ и равенства $y_1^{(1)}(t) = x_1^{(1)}(t)$, $\det M_{n-1}^{(1)}(\hat{x}(t)) = \det M_{n-1}^{(1)}(\hat{y}(t))$ при каждом $t \in (0, 1)$.*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Картан Э. *Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенная методом подвижного репера* (ПЛАТОН, Волгоград, 1998).
- [2] Картан Э. *Избранные труды* (МЦНМО, М., 1998).
- [3] Аминов Ю.А. *Дифференциальная геометрия и топология* (Наука, М., 1987).
- [4] Бляшке В. *Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна* (ОНТИ, М–Л., 1935).
- [5] Широков П.А., Широков А.П. *Аффинная дифференциальная геометрия* (Физ.-мат.лит., М., 1959).
- [6] Pommaret J.F. *Differential Galois theory*. Mathematics and its Appl., 15 (Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1983).
- [7] Арипов Р.Г., Хаджиев Дж. *Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии*, Изв. вузов. Матем., № 7, 1–14 (2007).
- [8] Муминов К.К. *Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы*, Изв. вузов. Матем., № 7, 27–38 (2002).
- [9] Муминов К.К., Чилин В.И. *Эквивалентность кривых в конечномерных векторных пространствах* (LAP LAMBERT Academic Publishing, Германия, 2015).
- [10] Чилин В.И., Муминов К.К. *Полная система дифференциальных инвариантов кривой в псевдоевклидовом пространстве*, Динам. системы (1–2), 135–149 (2013).
- [11] Khadjiev Dj., Peksen Ö. *The complete system of global integral and differential invariants for equi-affine curves*, Diff. Geom. Appl. **20** (2), 167–175 (2004).
- [12] Розенфельд Б.А. *Неевклидовы пространства* (Наука, М., 1969).
- [13] Капланский И. *Введение в дифференциальную алгебру* (Ин. лит., М., 1959).
- [14] Kolchin E.R. *Differential algebra and algebraic groups* (Academic Press, New York–London, 1973).
- [15] Хаджиев Дж. *Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых* (ФАН, Ташкент, 1998).
- [16] Муминов К.К., Чилин В.И. *Базисы трансцендентности в дифференциальных полях инвариантных рациональных функций*, Узбекск. матем. журн., № 1, 85–96 (2016).

Кобилжон Кодирович Муминов

математический факультет,
Национальный университет Узбекистана,
Вузгородок, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,
e-mail: m.muminov@rambler.ru

Владимир Иванович Чилин

математический факультет,
Национальный университет Узбекистана,
Вузгородок, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,
e-mail: vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz

K.K. Muminov and V.I. Chilin

Basis of transcendence in differential field of invariants of pseugo-Galilean group

Abstract. Let G be a subgroup of the group of invertible linear operators, acting in a finite-dimensional real linear space X . One of the problems of differential geometry is the study of necessary and sufficient conditions for G -equivalence of paths in X . In solving this problem we use methods of the theory of differential invariants describing transcendence basis of differential fields of G -invariant differential rational functions. Using explicit descriptions of these bases allows to establish criteria for G -equivalence of paths in X . Such an approach has been used in solving the problem of equivalence of paths with respect to the actions of special linear, orthogonal, pseudo-orthogonal, and symplectic groups.

We give an explicit description of one of the finite bases of transcendence in the differential field of invariant differential rational functions with respect to the action of the pseudo-Galilean group ΓO . Using this basis, necessary and sufficient conditions are established for the ΓO -equivalence of paths in X .

Keywords: pseudo-Galilean space, group of movements, differential rational function, transcendence basis, differential invariant, regular path.

Kobilzhon Kodirovich Muminov

Analysis,

*National University of Uzbekistan,
Vuzgorodok, Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: m.muminov@rambler.ru

Vladimir Ivanovich Chilin

Analysis,

*National University of Uzbekistan,
Vuzgorodok, Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz