Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Сосов, О действиях с сохранением пучка прямых на пространстве Лобачевского групп вещественных чисел, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 3, 32–37

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-3-32-37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:38:09

Е.Н. СОСОВ

О ДЕЙСТВИЯХ С СОХРАНЕНИЕМ ПУЧКА ПРЯМЫХ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО ГРУПП ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Аннотация. Рассматривается модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского Λ . Получены явные формулы для действий с сохранением гиперболического пучка прямых на пространстве Λ мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел и действий, сохраняющих параболический пучок прямых, аддитивной группы вещественных чисел.

Ключевые слова: пространство Лобачевского, модель Бельтрами–Клейна, пучок прямых.

УДК: 514.753

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-3-32-37

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{E}$ — полное, сепарабельное евклидово пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ размерности $\dim \mathbb{E} > 1$ и $B(O, 1) \subset \mathbb{E}$ — открытый шар с центром в фиксированной точке $O \in \mathbb{E}$ радиуса 1. Точки пространства будем задавать их радиусами-векторами относительно точки O , которая при этом задается нулевым радиусом-вектором 0 .

Рассмотрим модель Бельтрами–Клейна пространства Лобачевского [1]–[5]. В этой модели л-точка есть точка в $\Lambda = B(0, 1)$, л-прямая есть хорда в Λ , а расстояние между л-точками $x, y \in \Lambda$ вычисляется по формуле [1]:

$$\rho(x, y) = k \operatorname{Arch} \frac{1 - (x, y)}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2}}, \quad (1)$$

где $k > 0$ — константа, выбор которой равносильно выбору масштаба; (x, y) — скалярное произведение радиусов-векторов точек $x, y \in \Lambda$ и x^2 — скалярный квадрат радиус-вектора точки x .

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $p, x \in \Lambda$. В [1] была определена точка $\lambda_p(x) \in \Lambda$ с помощью следующих трех условий:

- 1) $\rho(p, \lambda_p(x)) = |\lambda| \rho(p, x)$;
- 2) если $x \neq p$, $\lambda > 0$, то точки $x, \lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p, x)$, проходящей через точки p, x , по одну сторону от точки p .
- 3) если $x \neq p$, $\lambda < 0$, то точки $x, \lambda_p(x)$ лежат на л-прямой $P(p, x)$ по разные стороны от точки p .

Тогда отображение $x \mapsto \lambda_p(x)$, где λ пробегает множество всех ненулевых вещественных чисел, определяет действие мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского (точка $p \in \Lambda$ фиксирована), которое на каждой

прямой эллиптического пучка является гомотетией и переводит в себя пучок концентрических сфер с общим центром в точке p .

В той же работе (см. более подробно в [2]) было найдено следующее представление отображения $\lambda_p : \Lambda \rightarrow \Lambda$:

$$\lambda_p(x) = \frac{p \operatorname{ch} A \operatorname{sh}((1 - \lambda)C) + x \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C)}{\operatorname{ch} A \operatorname{sh}((1 - \lambda)C) + \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C)}, \quad (2)$$

где $A = \frac{\rho(0,p)}{k}$, $B = \frac{\rho(0,x)}{k}$, $C = \frac{\rho(p,x)}{k}$. В работе находятся аналогичные явные формулы для действий групп вещественных чисел на пространстве Λ , сохраняющих гиперболические и параболические пучки прямых. Это дает возможность получить различные расширения группы движений пространства Лобачевского, найти применения таких расширений в специальной теории относительности и фрактальной геометрии, получить специальные квазикомформные отображения пространства Лобачевского. В модели Пуанкаре в полупространстве евклидова пространства имеются просто устроенные параболический пучок прямых и пучок орисфер, поэтому с помощью изометрии моделей действие аддитивной группы вещественных чисел, сохраняющих эти пучки, переносится и в эту модель пространства Лобачевского.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Пусть в пространстве Λ заданы прямая P и гиперплоскость Π с уравнениями

$$r = r_0 + ta, \quad (n, x) = q, \quad (3)$$

где r_0 — радиус-вектор фиксированной точки, t — параметр, a — направляющий вектор прямой P , n — единичный вектор евклидовой нормали гиперплоскости Π , $0 \leq q < 1$ — константа. Сначала получим формулу для действия мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пространстве Λ , сохраняющем гиперболический пучок прямых.

Теорема 1. Пусть в пространстве Лобачевского Λ фиксированы прямая P , гиперплоскость Π с уравнениями (3), а x_Q — обозначение для ортогональной проекции по Лобачевскому произвольной точки $x \in \Lambda$ на $Q \in \{P, \Pi\}$. Тогда отображения

$$\lambda_Q : \Lambda \rightarrow \Lambda, \quad \lambda_Q(x) = \frac{x_Q \operatorname{ch} A_Q \operatorname{sh}((1 - \lambda)C_Q) + x \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C_Q)}{\operatorname{ch} A_Q \operatorname{sh}((1 - \lambda)C_Q) + \operatorname{ch} B \operatorname{sh}(\lambda C_Q)}, \quad (4)$$

где $A_Q = \frac{\rho(0, x_Q)}{k}$, $B = \frac{\rho(0, x)}{k}$, $C_Q = \frac{\rho(x_Q, x)}{k}$, при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ определяют действие мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на Λ . Кроме того, λ_P при каждом $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ является гомотетией на каждой прямой, ортогональной прямой P , и переводит в себя пучок эквидистантных гиперповерхностей для прямой P (так называемых гиперповерхностей Клиффорда), а λ_Π является гомотетией на каждой прямой гиперболического пучка прямых, ортогональной гиперплоскости Π , и переводит в себя пучок эквидистантных гиперповерхностей с базой Π .

Доказательство. Пусть $x \in \Lambda$. Тогда векторнопараметрическое уравнение прямой в пространстве $\mathbb{E}$, проходящей через точку x и полюс гиперплоскости Π , можно задать в форме

$$r = x + t(qx - n),$$

где t — параметр. Пересечение этой прямой с гиперплоскостью Π произойдет при значении параметра

$$t_* = \frac{(n, x) - q}{1 - q(n, x)}.$$

Тогда ортогональная проекция x_Π по Лобачевскому точки $x \in \Lambda$ на гиперплоскость Π примет вид

$$x_\Pi = \frac{(1 - q^2)x + (q - (n, x))n}{1 - q(n, x)}. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь гиперплоскость с уравнением

$$(R, (a, x)r_0 + (1 - (r_0, x))a) = (a, x).$$

Очевидно, что она проходит через точку x и ее полюс лежит на прямой P . Теперь нетрудно найти параметр t_1 , который соответствует точке пересечения прямой P с этой гиперплоскостью:

$$t_1 = \frac{(a, (1 - r_0^2)x - (1 - (x, r_0))r_0)}{(a, (a, x)r_0 + (1 - (x, r_0))a)}.$$

Тогда ортогональная проекция x_P по Лобачевскому точки $x \in \Lambda$ на прямую P примет вид

$$x_P = r_0 + \frac{(a, (1 - r_0^2)x - (1 - (x, r_0))r_0)}{(a, (a, x)r_0 + (1 - (x, r_0))a)}a. \quad (6)$$

Используя формулы (5), (6), представление (2) отображения λ_p и его определение, получим представление (4). Оставшиеся свойства теперь очевидны. $\square$

Следствие. Пусть в пространстве Лобачевского Λ фиксированы прямая P и гиперплоскость Π с уравнениями (3), где $r_0 = 0$, $q = 0$, $|a| = 1$. Тогда

$$x_P = (a, x)a, \quad x_\Pi = x - (n, x)n$$

и при $Q \in \{P, \Pi\}$, $x \in \Lambda$ имеем

$$\lambda_Q(x) = x_Q + (x - x_Q) \operatorname{th}(\lambda C_Q) \operatorname{cth} C_Q,$$

где $C_Q = \frac{\rho(x_Q, x)}{k}$.

Теперь получим формулу для действия аддитивной группы вещественных чисел на пространстве Λ , сохраняющем параболический пучок прямых.

Теорема 2. Пусть единичный вектор τ евклидова пространства является радиус-вектором центра параболического пучка в пространстве Лобачевского Λ , $h \in \mathbb{R}$. Тогда отображение $h_\tau : \Lambda \rightarrow \Lambda$,

$$h_\tau(x) = \tau + \frac{2(\tau, \tau - x)}{(\tau - x)^2 + (1 - x^2)e^{\frac{-2h}{k}}}(x - \tau) \quad (7)$$

определяет действие аддитивной группы вещественных чисел на Λ такое, что $\rho(x, h_\tau(x)) = |h|$ для каждого $x \in \Lambda$. Кроме того, h_τ на каждой прямой параболического пучка прямых с центром в τ является параллельным переносом и переводит в себя пучок эквидистантных гиперповерхностей для такой прямой, а также пучок орисфер с центром в τ .

Доказательство. Представим

$$h_\tau(x) = \tau + t(x - \tau),$$

где t будем искать из условия $\rho(h_\tau(x), x) = |h|$. Тогда, используя (1), получим уравнение

$$\operatorname{ch} \frac{h}{k} = \frac{1 - (x, \tau + t(x - \tau))}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - (\tau + t(x - \tau))^2}},$$

эквивалентная форма которого имеет вид

$$t^2 \left((x-\tau, x)^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{h}{k} (1-x^2)(x-\tau)^2 \right) - 2t(1-(\tau, x)) \left(\operatorname{ch}^2 \frac{h}{k} (1-x^2) + (x, x-\tau) \right) + (1-(\tau, x))^2 = 0.$$

Найдем корни этого уравнения:

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{(1-(\tau, x))(\operatorname{ch}^2 \frac{h}{k} (1-x^2) + (x, x-\tau)) \pm (1-(\tau, x))(1-x^2) \operatorname{ch} \frac{h}{k} \operatorname{sh} \frac{|h|}{k}}{\operatorname{ch}^2 \frac{h}{k} (1-x^2)(x-\tau)^2 + (x, x-\tau)^2} = \\ &= \frac{(1-(\tau, x))((1-x^2)e^{\frac{h}{k}} \operatorname{ch} \frac{h}{k} + (x, x-\tau))}{\operatorname{ch}^2 \frac{h}{k} (1-x^2)(x-\tau)^2 + (x, x-\tau)^2} = \frac{2(\tau, \tau-x)}{(\tau-x)^2 + (1-x^2)e^{\frac{-2h}{k}}}. \end{aligned}$$

Таким образом, представление (7) верно. Представим радиус-вектор произвольной точки x в виде $x = x_1\tau + y$, где вектор y ортогонален τ , и рассмотрим в Λ прямую с уравнением $r = t\tau$. Эквилидистантная гиперповерхность такой прямой имеет уравнение

$$x_1^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

где $0 < a < 1$ — вещественная константа. Найдем уравнение прообраза этой гиперповерхности при отображении h_τ

$$\left(1 + \frac{2(1-x_1)}{(1-x_1)^2 + y^2 + (1-x_1^2 - y^2)e^{\frac{-2h}{k}}}(x_1-1) \right)^2 + \frac{4y^2(1-x_1)^2}{a^2((1-x_1)^2 + y^2 + (1-x_1^2 - y^2)e^{\frac{-2h}{k}})^2} = 1,$$

его эквивалентная форма имеет вид

$$x_1^2 + \frac{y^2((1-a^2)e^{\frac{2h}{k}} + a^2)}{a^2} = 1.$$

Таким образом, h_τ переводит в себя пучок эквилидистантных гиперповерхностей для данной прямой. Любой другой пучок эквилидистантных гиперповерхностей для прямой из параболического пучка с центром в τ можно получить из рассмотренного движением. Остальные утверждения теоремы теперь очевидны. $\square$

Пусть n — единичный вектор евклидова пространства $\mathbb{E}$. Представим радиус-вектор произвольной точки x этого пространства в виде $x = x_1n + x_2$, где вектор x_2 ортогонален n , и рассмотрим в полупространстве $\Pi_+ = \{(x_1; x_2) \in \mathbb{E}; x_1 > 0\}$ модель Пуанкаре с метрикой [2]:

$$\rho_{\Pi_+}((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = k \operatorname{Arch} \frac{x_1^2 + y_1^2 + (x_2 - y_2)^2}{2x_1y_1} = 2k \operatorname{Arsh} \frac{|x - y|}{2\sqrt{x_1y_1}}.$$

Найдем явный вид действия аддитивной группы вещественных чисел в модели Пуанкаре (Π_+, ρ_{Π_+}) , сохраняющего параболический пучок прямых.

Теорема 3. *Имеют место следующие утверждения.*

а) *Отображение*

$$\Phi : (\Lambda, \rho) \rightarrow (\Pi_+, \rho_{\Pi_+}), \quad \Phi((x_1; x_2)) = \frac{(\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}; x_2)}{1+x_1}$$

является изометрией, обратная изометрия которого имеет вид

$$\Phi^{-1}((x_1; x_2)) = \frac{(1-x_1^2-x_2^2; 2x_2)}{1+x_1^2+x_2^2}.$$

б) Пусть

$$g_a : (\Lambda, \rho) \rightarrow (\Lambda, \rho), \quad g_a((x_1; x_2)) = \frac{(x_1 + p; x_2 \sqrt{1 - p^2})}{1 + px_1}$$

— параллельный перенос на вектор $a = pn$, где $p = |a| < 1$, в модели Бельтрами–Клейна [1]. Тогда в модели Пуанкаре при изометрии Φ ему соответствует преобразование

$$G_a = \Phi \circ g_a \circ \Phi^{-1} : (\Pi_+, \rho_{\Pi_+}) \rightarrow (\Pi_+, \rho_{\Pi_+}), \quad G_a((x_1; x_2)) = \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}}((x_1; x_2)).$$

с) Пусть $\tau = -n$. Отображению $h_\tau : \Lambda \rightarrow \Lambda$, заданному формулой (7), в модели Пуанкаре при изометрии Φ соответствует преобразование

$$H_\tau = \Phi \circ h_\tau \circ \Phi^{-1} : (\Pi_+, \rho_{\Pi_+}) \rightarrow (\Pi_+, \rho_{\Pi_+}), \quad H_\tau((x_1; x_2)) = ((e^{-\frac{h}{k}} x_1; x_2)),$$

которое определяет действие аддитивной группы вещественных чисел на Π_+ такое, что $\rho_{\Pi_+}(x, H_\tau(x)) = |h|$ для каждого $x \in \Pi_+$. Кроме того, H_τ на каждой прямой параболического пучка прямых с направляющим вектором n является параллельным переносом и переводит в себя пучок эквидистантных гиперповерхностей для такой прямой (изображаемых в модели Пуанкаре полугиперконусами вращения вокруг этой прямой с общей вершиной на абсолюте), а также пучок орисфер с уравнениями $x_1 = \text{const}$.

Доказательство. а) Покажем, что отображение Φ сохраняет расстояния между соответствующими парами точек

$$\begin{aligned} \text{ch} \frac{\rho_{\Pi_+}(\Phi((x_1; x_2)), \Phi((y_1; y_2)))}{k} &= \frac{\frac{1-x_1^2-x_2^2}{(1+x_1)^2} + \frac{1-y_1^2-y_2^2}{(1+y_1)^2} + \left(\frac{x_2}{1+x_1} - \frac{y_2}{1+y_1}\right)^2}{\frac{2\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}{(1+x_1)(1+y_1)}} = \\ &= \frac{1 - x_1 y_1 - (x_2, y_2)}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} = \text{ch} \frac{\rho((x_1; x_2), (y_1; y_2))}{k}. \end{aligned}$$

Осталась нетрудная проверка того, что приведенная формула для Φ^{-1} действительно определяет обратное отображение.

б) Учитывая полученные формулы в п. а), с помощью непосредственного вычисления докажем

$$\begin{aligned} \Phi \circ g_a \circ \Phi^{-1}((x_1; x_2)) &= \Phi \circ g_a \left(\frac{(1 - x_1^2 - x_2^2; 2x_2)}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right) = \\ &= \Phi \left(\frac{\left(\frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} + p; \frac{2x_2\sqrt{1-p^2}}{1+x_1^2+x_2^2} \right)}{1 + \frac{p(1-x_1^2-x_2^2)}{1+x_1^2+x_2^2}} \right) = \Phi \left(\frac{(1+p+(p-1)(x_1^2+x_2^2); 2x_2\sqrt{1-p^2})}{1+p+(1-p)(x_1^2+x_2^2)} \right) = \\ &= \frac{\left(\sqrt{(1+p+(1-p)(x_1^2+x_2^2))^2 - (1+p+(p-1)(x_1^2+x_2^2))^2 - 4x_2^2(1-p^2)}; 2x_2\sqrt{1-p^2} \right)}{2(1+p)} = \\ &= \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}}((x_1; x_2)). \end{aligned}$$

с) Сначала прямым вычислением найдем искомое преобразование

$$\Phi \circ h_\tau \circ \Phi^{-1}((x_1; x_2)) = \Phi \circ h_\tau \left(\frac{(1 - x_1^2 - x_2^2; 2x_2)}{1 + x_1^2 + x_2^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi \left((-1; 0) + \frac{2 \left(1 + \frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right) \left(1 + \frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}; \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2} \right)}{\left(1 + \frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right)^2 + \left(\frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2} \right)^2 + \left(1 - \left(\frac{1-x_1^2-x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right)^2 - \left(\frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2} \right)^2 \right) e^{-\frac{2h}{k}}} \right) = \\
&= \Phi \left(\frac{\left(1 - x_2^2 - x_1^2 e^{-\frac{2h}{k}}; 2x_2 \right)}{1 + x_2^2 + x_1^2 e^{-\frac{2h}{k}}} \right) = \frac{\left(\sqrt{\left(1 + x_2^2 + x_1^2 e^{-\frac{2h}{k}} \right)^2 - \left(1 - x_2^2 - x_1^2 e^{-\frac{2h}{k}} \right)^2 - 4x_2^2}; 2x_2 \right)}{2} = \\
&= (e^{-\frac{h}{k}} x_1; x_2).
\end{aligned}$$

Теперь оставшиеся утверждения являются следствиями п. а), полученной формулы и теоремы 2. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сосов Е.Н. О действии мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского, Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **154** (4), 156–160 (2012).
- [2] Сосов Е.Н. Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Учебно-методическое пособие (Казанск. ун-т, Казань, 2016).
- [3] Нут Ю.Ю. Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении (Изд-во АН СССР, М., 1961).
- [4] Трайнин Я.Л. Аналитическая геометрия в пространстве Лобачевского (Новосибирск. гос. педагогический ин-т, Новосибирск, 1974).
- [5] Сабинин Л.В. Одули как новый подход к геометрии со связностью, ДАН СССР **233** (5), 800–803 (1977).

Евгений Николаевич Сосов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Evgenii.Sosov@kpfu.ru

E.N. Sosov

On the real group actions preserving bundle of straight lines on the Lobachevskii space

Abstract. We consider the Lobachevskii space. In terms of the Beltrami–Klein model we obtain explicit expressions for the real group actions preserving hyperbolic or parabolic bundle of straight lines on the Lobachevskii space.

Keywords: Lobachevskii space, Beltrami–Klein model, bundle of straight lines.

Evgenii Nikolaevich Sosov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: Evgenii.Sosov@kpfu.ru