Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Н. Хасанова, П. Л. Шабалин, Краевая задача Гильберта с двусторонним разного степенного порядка завихрением на бесконечности, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 3, 38–53

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-3-38-53>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:09:11

Э.Н. ХАСАНОВА, П.Л. ШАБАЛИН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С ДВУСТОРОННИМ РАЗНОГО СТЕПЕННОГО ПОРЯДКА ЗАВИХРЕНИЕМ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Аннотация. Рассматривается краевая задача Гильберта для полуплоскости со счетным множеством точек разрыва первого рода и единственной точкой разрыва второго рода на бесконечности у аргумента функции коэффициентов краевого условия, приводящих к двустороннему разного степенного порядка завихрению на бесконечности. Приведена формула общего решения и получена полная картина разрешимости однородной задачи в специальном классе функций. Выписано общее решение неоднородной задачи.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, бесконечный индекс, завихрение на бесконечности, целая функция.

УДК: 517.54

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-3-38-53

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим краевую задачу Гильберта теории аналитических функций для верхней полуплоскости $E^+ = \{z : z = x + iy, 0 < y\}$ с краевым условием на вещественной оси $L = \partial E^+$

$$a(t)\Re F(t) - b(t)\Im F(t) = c(t), \quad t \in L. \quad (1)$$

В классической постановке (коэффициенты и правая часть краевого условия непрерывны по Гёльдеру) картина разрешимости задачи полностью описывается в терминах индекса задачи, т. е. деленного на 2π полного изменения аргумента функции $G(t) = a(t) - ib(t)$ ([1], с. 280; [2], с. 155). Этот факт справедлив и для задачи с конечным числом точек разрыва первого рода коэффициентов ([1], с. 466; [2], с. 302) и в случае счетного множества точек разрыва первого рода у функции $\arg G(t)$, если только удастся вычислить индекс задачи [3], [4]. Следует отметить, что задача Гильберта с разрывами первого рода коэффициентов краевого условия интересна разнообразными приложениями в некоторых математических и физических задачах (например, [5]–[7]).

Важным этапом развития теории краевых задач с разрывными коэффициентами явились исследования задач с бесконечным индексом, который обеспечивался точкой разрыва второго рода у аргумента коэффициента краевого условия. Ключевым моментом этих исследований явились фундаментальные результаты Н.В. Говорова (см. [8] и библиографию) по задаче Римана с краевым условием на гладком неограниченном разрезе и с завихрением (т. е. точкой разрыва второго рода у аргумента коэффициента краевого условия) степенного

Поступила в редакцию 05.02.2018, после доработки 17.05.2018. Принята к публикации 20.06.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научных проектов №№ 17-01- 00282-а, 18-31-00060.

порядка на бесконечности. Созданный Н.В. Говоровым аппарат лег в основу многочисленных исследований краевых задач с бесконечным индексом, из которых выделим следующие. М.Э. Толочко [9] рассмотрел задачу Римана для полуплоскости уже в случае двустороннего завихрения на бесконечности степенного порядка ρ , $0 < \rho < 1$, для которой получил формулу общего решения и исследовал вопросы существования решения. Подобную задачу с меньшими ограничениями на коэффициент решил И.Е. Сандрыгайло [10].

Развитие метода Н.В. Говорова представлено в монографии В.Н. Монахова и Е.В. Семенко [11] при решении задачи Римана с существенно более широкой трактовкой завихрения на бесконечности, связанной со сложной асимптотикой аргумента коэффициента краевого условия. Здесь же проведен анализ краевого условия с точки зрения корректности постановки задачи. Эти результаты распространены на задачу Римана с бесконечным индексом в пространствах Харди [12]. Свои идеи авторы развили и на более сложные конструкции, впервые рассмотрев задачу с бесконечным индексом на римановых поверхностях ([11], с. 188–213).

Задачу Гильберта с непрерывными на вещественной оси коэффициентами и двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка меньше единицы, впервые сформулировал И.Е. Сандрыгайло [13], который методом Н.И. Мусхелишвили с привлечением соответствующей задачи Римана и результатов из [10] в классе ограниченных функций экспоненциального порядка убывания на бесконечности получил формулы общего решения и основные результаты о разрешимости. Полную картину разрешимости однородной задачи на основе более удачной формулы общего решения, полученной [14] методом регуляризующего множителя Ф.Д. Гахова, привели Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин. Краевые задачи для кусочно аналитических функций с многосторонним завихрением на бесконечности рассмотрены в [15], [16].

Задача Гильберта для полуплоскости со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним степенного порядка ρ , $0 < \rho < 1$, завихрением на бесконечности была поставлена и решена Р.Б. Салимовым и П.Л. Шабалиным ([17], сс. 111, 148). Полная картина разрешимости однородной задачи получена в работах [18] в случае $0 < \rho < 1/2$ и [19] для $1/2 \leq \rho < 1$. Однородную задачу Римана на полуоси со счетным множеством точек разрыва первого рода ее коэффициента и бесконечным индексом впервые рассмотрела М.И. Журавлева. Полученные формулы общего решения этой задачи в классах функций, ограниченных в любом замкнутом круге, ограниченных в плоскости с разрезом и в классе функций вполне регулярного роста порядка σ , $0 < \sigma < 1/2$, анонсированы в [20].

Отметим, что в названных выше работах с двусторонним (многосторонним) завихрением на бесконечности степенного порядка, этот порядок один и тот же. Данная статья продолжает и развивает исследования Э.Н. Хасановой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним разным степенного порядка завихрением на бесконечности [21].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Следуя [21] рассмотрим задачу отыскания аналитической в E^+ функции $F(z)$ по краевому условию (1), считая $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ заданными на L вещественнозначными функциями, непрерывными по Гёльдеру всюду, кроме точек разрыва первого рода t_j , $j = \pm 1, \pm 2, \dots$, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ во всех точках непрерывности коэффициентов, $0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$, $0 > t_{-1} > \dots > t_{-k} > t_{-k-1} > \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} t_{-k} = -\infty$. Обозначим $G(t) = a(t) - ib(t)$, $\bar{G}(t) = |G(t)|e^{i\nu(t)}$, где $\nu(t) = \arg G(t)$ — ветвь, выбранная на каждом

из интервалов непрерывности коэффициентов так, чтобы число $\delta_j = \nu(t_j + 0) - \nu(t_j - 0)$ удовлетворяло неравенству $0 \leq \delta_j < 2\pi$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Теперь запишем краевое условие

$$\Re[e^{-i\nu(t)}F(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}. \quad (2)$$

Дробную часть числа δ_j/π обозначим $\varkappa_j = \{\delta_j/\pi\}$, ряды $\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{-j}$, $\sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_j$ считаем расходящимися и для их характеристики введем функции

$$n_{-}^{*}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < -t_{-1}; \\ \sum_{j=1}^{k-1} \varkappa_{-j}, & -t_{-k+1} \leq x < -t_{-k}, \end{cases} \quad n_{+}^{*}(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < t_1; \\ \sum_{j=1}^{k-1} \varkappa_j, & t_{k-1} \leq x < t_k, \end{cases}$$

для которых потребуем выполнения условий

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n_{+}^{*}(t)}{t^{\varkappa_{+}}} = \Delta_{+}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n_{-}^{*}(t)}{t^{\varkappa_{-}}} = \Delta_{-} \quad (3)$$

с положительными постоянными Δ_{+} , Δ_{-} и $0 < \varkappa_{-} < 1$, $0 < \varkappa_{+} < 1$.

Также будем считать выполненными условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{t_j} < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{-t_{-j}} < \infty. \quad (4)$$

Как и в [18] для аналитического выделения особенностей коэффициентов введем функции

$$P_{+}(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_j}\right)^{\varkappa_j}, \quad P_{-}(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_{-j}}\right)^{\varkappa_{-j}},$$

где под $\arg(1 - z/t_j)$ понимаем однозначную ветвь, обращающуюся в нуль при $z = 0$ и непрерывную в плоскости z , разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки $t = t_j$, $t = +\infty$ при $j > 0$ и соединяющей точки $t = -\infty$, $t = t_j$ при $j < 0$. Имеем ([17], с. 110)

$$\arg P_{+}(t) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^k \varkappa_j \pi, & t_k < t < t_{k+1}; \\ 0, & t < t_1, \end{cases} \quad \arg P_{-}(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^k \varkappa_{-j} \pi, & t_{-k-1} < t < t_{-k}; \\ 0, & t > t_{-1}. \end{cases}$$

Выделяя у $\nu(t)$ функцию скачков, представим непрерывную на $(-\infty, +\infty)$ компоненту функции $\nu(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi + \arg P_{+}(t) + \arg P_{-}(t), \quad \beta(t) = \sum_{j=1}^{|k|} [\delta_j/\pi], \quad t \in (t_k, t_{k+1}). \quad (5)$$

Дополнительно потребуем специального поведения непрерывной на $(-\infty, +\infty)$ функции $\varphi(t)$ в окрестности бесконечности:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \nu^{-}|t|^{\rho^{-}} + \tilde{\nu}(t), & t < 0; \\ \nu^{+}t^{\rho^{+}} + \tilde{\nu}(t), & t > 0, \end{cases} \quad (6)$$

где ρ^{-} , ρ^{+} — заданные числа, подчиненные ограничениям $0 < \rho^{-} < 1$, $0 < \rho^{+} < 1$, $\rho^{-} \neq \rho^{+}$ (случай $\rho^{-} = \rho^{+}$ подробно разобран в [18], [19]), $\nu^{-} \neq 0$, $\nu^{+} \neq 0$, а функция $\tilde{\nu}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера $H_L(\alpha)$ на вещественной оси. Таким образом, точка разрыва второго

рода на бесконечности у функции $\nu(t)$ формируется как заявленным поведением в окрестности бесконечности непрерывной составляющей $\nu(t)$, так и функцией скачков, разрывы первого рода которой образуют знакоположительный ряд, расходящийся по заданному закону.

Далее понадобятся полученные в ([17] с. 114) формулы

$$\ln P_+(z) = \frac{\pi \Delta_+ e^{-i\kappa_+ \pi}}{\sin \pi \kappa_+} z^{\kappa_+} + I_+(z), \quad I_+(z) = -z \int_0^{+\infty} \frac{n_+^*(\tau) - \Delta_+ \tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau - z)} d\tau$$

для $0 < \arg z < 2\pi$, причем $I_+(re^{i\theta}) = o(r^{\kappa_+})$, $r \rightarrow \infty$, $\delta < \theta < 2\pi - \delta$, $\delta > 0$, и

$$\ln P_-(z) = \frac{\pi \Delta_-}{\sin \pi \kappa_-} z^{\kappa_-} + I_-(z), \quad I_-(z) = z \int_0^{+\infty} \frac{n_-^*(\tau) - \Delta_- \tau^{\kappa_-}}{\tau(\tau + z)} d\tau,$$

если $-\pi < \arg z < \pi$, причем $I_-(re^{i\theta}) = o(r^{\kappa_-})$, $r \rightarrow \infty$, $-\pi + \delta < \theta < \pi - \delta$.

Теперь определим класс B_* решений задачи (2), как класс аналитических в E_+ функций $F(z)$ с ограниченным произведением $F(z)e^{\Re I_+(z) + \Re I_-(z)}$.

2. РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим соответствующую неоднородной задаче Гильберта (2) однородную задачу с краевым условием

$$\Re[e^{-i\nu(t)} F(t)] = 0, \quad (7)$$

в котором по-прежнему для функции $\nu(t)$ справедлива формула (5) с условием (6) и разрывы функции $\nu(t)$ удовлетворяют ограничению на плотность распределения (3) и условию (4). Следуя [21] для аналитического выделения особенности (6) степенного порядка на бесконечности у функции $\varphi(t)$ введем

$$P_1(z) + iQ_1(z) = -i \frac{\nu^-}{\sin \pi \rho^-} z^{\rho^-}, \quad P_2(z) + iQ_2(z) = i \frac{\nu^+}{\sin \pi \rho^+} e^{-i\pi \rho^+} z^{\rho^+},$$

где $\arg z = \theta$ — однозначная и непрерывная в полуплоскости E^+ ветвь $\arg z$, удовлетворяющая соотношению $0 \leq \theta \leq \pi$, для которых

$$P_1(t) = \begin{cases} \nu^- |t|^{\rho^-}, & t < 0; \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad Q_1(t) = \begin{cases} -\frac{\nu^- \cos \pi \rho^-}{\sin \pi \rho^-} |t|^{\rho^-}, & t < 0; \\ -\frac{\nu^-}{\sin \pi \rho^-} t^{\rho^-}, & t > 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$P_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \nu^+ t^{\rho^+}, & t > 0, \end{cases} \quad Q_2(t) = \begin{cases} \frac{\nu^+}{\sin \pi \rho^+} |t|^{\rho^+}, & t < 0; \\ \frac{\nu^+ \cos \pi \rho^+}{\sin \pi \rho^+} t^{\rho^+}, & t > 0, \end{cases} \quad (9)$$

и

$$Q_1(re^{i\theta}) = -\frac{r^{\rho^-} \nu^- \cos \theta \rho^-}{\sin \pi \rho^-}, \quad Q_2(re^{i\theta}) = \frac{r^{\rho^+} \nu^+ \cos(\pi \rho^+ - \theta \rho^+)}{\sin \pi \rho^+}. \quad (10)$$

С учетом формул (5), (6), (8)–(10) краевое условие (7) запишем в виде

$$\Im \left\{ i e^{-\Gamma^+(t)} e^{-iP_1(t)+Q_1(t)} e^{-iP_2(t)+Q_2(t)} P_+(t) P_-(t) F(t) \right\} = 0, \quad (11)$$

где $\Gamma^+(t)$ — краевое значение интеграла типа Коши

$$\Gamma(z) = \frac{z}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\nu}(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)}$$

с плотностью $\tilde{\nu}(\tau) \in H_L(\alpha)$ на вещественной оси. Следуя идее решения задачи Гильберта из [14] введем функцию

$$\Phi(z) = ie^{-\Gamma^+(z)} e^{-iP_1(z)+Q_1(z)} e^{-iP_2(z)+Q_2(z)} P_+(z)P_-(z)F(z), \quad z \in E^+,$$

которую с учетом (11) продолжим по симметрии в нижнюю полуплоскость. На этом пути в [21] получена формула общего решения рассматриваемой задачи. Доказанные там результаты формулирует

Теорема 1. *Общее решение краевой задачи (11), (3), (4), (6) в классе функций B_* определяется формулой*

$$F(z) = -ie^{\Gamma(z)} e^{i[P_1(z)+iQ_1(z)]} e^{i[P_2(z)+iQ_2(z)]} \Phi(z)[P_+(z)P_-(z)]^{-1}, \quad (12)$$

где $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leq \max\{\rho^+, \rho^-, \kappa_+, \kappa_-\}$, удовлетворяющая условию

$$\Im \Phi(t) = 0, \quad t \in L, \quad (13)$$

и для достаточно больших $|t|$ неравенствам

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ -\frac{\nu^- t^{\rho^-}}{\sin \pi \rho^-} + \frac{\nu^+ t^{\rho^+} \cos \pi \rho^+}{\sin \pi \rho^+} + \frac{\pi \Delta_+ \cos \kappa_+ \pi}{\sin \pi \kappa_+} t^{\kappa_+} + \frac{\pi \Delta_-}{\sin \pi \kappa_-} t^{\kappa_-} \right\}, \quad (14)$$

если $t > 0$, и

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ -\frac{\nu^- |t|^{\rho^-} \cos \pi \rho^-}{\sin \pi \rho^-} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin \pi \rho^+} + \frac{\pi \Delta_+ |t|^{\kappa_+}}{\sin \pi \kappa_+} + \frac{\pi \Delta_- \cos \kappa_- \pi}{\sin \pi \kappa_-} |t|^{\kappa_-} \right\}, \quad (15)$$

если $t < 0$ с некоторой положительной постоянной C .

3. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Ясно, что существование и множество решений однородной задачи зависят от существования и множества целых функций $\Phi(z)$ заданного порядка, удовлетворяющих на L условиям (13), (14), (15). Проведем исследование разрешимости этой задачи, дополняющее и уточняющее результаты в этом направлении из [21].

Теорема 2. *Пусть $\max\{\kappa_+, \kappa_-\} < \max\{\rho^+, \rho^-\} < 1$. Тогда*

а) *если $\rho^- > \rho^+$ и $\nu^- > 0$ либо $\rho^+ > \rho^-$ и $\nu^+ < 0$, то однородная краевая задача (11) не имеет нетривиальных решений в классе B_* ;*

б) *если $\rho^- > \rho^+$ и $\nu^- < 0$ либо $\rho^+ > \rho^-$ и $\nu^+ > 0$, то однородная краевая задача (11) имеет в классе B_* бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), в которой $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка ρ_Φ , $\rho_\Phi \leq \max\{\rho^+, \rho^-\}$, принимающая на L вещественные значения и удовлетворяющая неравенствам (14), (15).*

Доказательство случая а) теоремы 2 при $\max\{\rho^+, \rho^-\} < 1/2$ приведено в [21].

Пусть теперь $\rho^+ < \rho^-$, $1/2 \leq \rho^- < 1$ и $\nu^- > 0$. Предположим, что при этих условиях существует решение однородной задачи $F(z)$ с ограниченным произведением $F(z) \exp\{\Re(I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta}))\}$. Тогда индикатор роста целой функции $\Phi(z)$ должен удовлетворять неравенству

$$h_\Phi(\pi - \pi/2\rho^-) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{Q_1(re^{i(\pi - \pi/2\rho^-)})}{r^{\rho^-}}, \quad Q_1(re^{i(\pi - \pi/2\rho^-)}) = -\nu^- r^{\rho^-}.$$

В силу зеркальной симметрии функции $\Phi(z)$ имеем $h_\Phi(\pi - \pi/2\rho^-) = h_\Phi(\pi + \pi/2\rho^-)$, следовательно,

$$h_\Phi(\pi - \pi/2\rho^-) + h_\Phi(\pi + \pi/2\rho^-) \leq -2\nu^- < 0,$$

что противоречит известному ([22], с. 84) соотношению

$$h_{\Phi}(\theta) + h_{\Phi}(\theta + \pi/\rho^-) \geq 0.$$

Пусть теперь $\rho^- < \rho^+$, $1/2 \leq \rho^+ < 1$, и $\nu^+ < 0$. Тогда $\pi/2 < \pi/2\rho^+ < \pi$, и в силу симметрии $h_{\Phi}(\pi/2\rho^+) = h_{\Phi}(-\pi/2\rho^+)$. Поскольку $h_{\Phi}(\pi/2\rho^+) \leq \nu^+ < 0$, то снова убеждаемся в невозможности существования нетривиального решения задачи (11).

Пусть выполнено условие б). Согласно теореме 2 целая функция $\Phi(z)$ из (12) должна иметь порядок $\rho_{\Phi} \leq \max\{\rho^+, \rho^-\}$, принимать на L вещественные значения, удовлетворять неравенствам (14), (15). Существование таких целых функций следует из построений, подробно проведенных в ([14], см. также [17], с. 100). Именно, возьмем целую функцию порядка $\varkappa_0$

$$\Phi_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_0}}\right) \left(1 - \frac{z}{r_k e^{-i\theta_0}}\right), \quad r_k = \left(\frac{2k-1}{2\Delta_0}\right)^{1/\varkappa_0}, \quad 0 \leq \theta_0 \leq \pi. \quad (16)$$

Здесь $\arg(1 - z/r_k e^{i\theta_0})$ означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z = r e^{i\theta_0}$, $r > r_k$, принимающую нулевое значение при $z = 0$, $\arg(1 - z/r_k e^{-i\theta_0})$ означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z = r e^{-i\theta_0}$, $r > r_k$, принимающую нулевое значение при $z = 0$, $\varkappa_0$ — число из интервала $(0, 1)$. В ([14], см. также [17], с. 102) доказана асимптотическая формула

$$\ln \Phi_0(t) = \begin{cases} \frac{\Delta_0 \pi 2 \cos(\theta_0 - \pi) \varkappa_0}{\sin \pi \varkappa_0} t^{\varkappa_0} + o(t^{\varkappa_0}), & t \rightarrow +\infty; \\ \frac{\Delta_0 \pi 2 \cos \theta_0 \varkappa_0}{\sin \pi \varkappa_0} |t|^{\varkappa_0} + o(|t|^{\varkappa_0}), & t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Подробно рассмотрим случай $\rho^- > \rho^+$ и $\nu^- < 0$. Если $\rho^- \leq 1/2$, то условия (14), (15) для целой функции $\Phi_0(z)$ будут выполняться для любых Δ_0 , θ_0 в силу очевидных неравенств $\cos \theta_0 \varkappa_0 \geq 0$, $\cos(\theta_0 - \pi) \varkappa_0 \geq 0$, если взять $\varkappa_0 < \rho^-$, а в случае $\varkappa_0 = \rho^-$ числа $\Delta_0 > 0$, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ должны удовлетворять системе

$$\Delta_0 2\pi \cos(\theta_0 - \pi) \rho^- \leq -\nu^-, \quad \Delta_0 2\pi \cos \theta_0 \rho^- \leq -\nu^- \cos \pi \rho^-.$$

Равенства в этой системе достигаются при $\theta_0 = \pi$, $\Delta_0 = -\nu^-/2\pi$. Если $\rho^- > 1/2$, то в (16) следует взять $\varkappa_0 = \rho^-$, $\theta_0 = \pi$, $\Delta_0 = -\nu^-/2\pi$.

Аналогично разбирается случай $\rho^+ > \rho^-$. □

Теорема 3. Пусть $\rho^+ < \varkappa_+ = \varkappa_- = \rho^- < 1/2$. Тогда однородная краевая задача (11)

а) не имеет нетривиальных решений в классе B_* , если $\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^- < 0$ либо $\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^- < 0$, либо $\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^- = 0$ и $\nu^+ < 0$, либо $\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^- = 0$;

б) имеет в классе B_* бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), в которой $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_{\Phi} \leq \rho^-$, удовлетворяющая на L условиям (13) — (15), если

$$\nu^+ > 0 \quad \text{и} \quad \pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^- = 0;$$

с) имеет в классе B_* бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), где $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_{\Phi} \leq \rho^+$, принимающая на L вещественные значения и при $\rho_{\Phi} = \rho^-$ удовлетворяющая неравенствам (14), (15), если

$$\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^- > 0 \quad \text{и} \quad \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^- > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим случай а). Прежде всего отметим, что если выполняется условие $\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^- = 0$, т. е.

$$\nu^- = \frac{\pi\Delta_+ + \pi\Delta_- \cos \pi\rho^-}{\cos \pi\rho^-},$$

то, как легко проверить,

$$\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^- = -\frac{\pi\Delta_+ \sin^2 \pi\rho^-}{\cos \pi\rho^-} < 0,$$

поэтому обоснование всех случаев п. а) теоремы проводится так же, как и для теоремы 2 применением теоремы Фрагмена–Линделефа для плоскости с разрезом по положительной либо отрицательной вещественной полуоси.

Пусть выполнены условия б). Последнее влечет неравенство $\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^- > 0$. Согласно теореме 1 общее решение задачи (11) определяется формулой (12), содержащей произвольную целую функцию $\Phi(z)$ порядка $\rho_\Phi \leq \rho$, принимающую вещественные значения на L и удовлетворяющую неравенствам (14), (15), которые примут вид

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\nu^+ \cos \pi\rho^+}{\sin \pi\rho^+} t^{\rho^+} \right\}, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^-}{\sin \pi\rho^-} |t|^{\rho^-} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin \pi\rho^+} \right\}, \quad t < 0, \quad (18)$$

соответственно. Множество решений задачи (11) определяется множеством целых функций, удовлетворяющих указанным выше условиям. Существование таких функций доказывается следующими построениями. Возьмем целую функцию (16), значения которой на вещественной оси в силу (17), (18) при $t > 0$ должны удовлетворять условию

$$\exp \left\{ \frac{\Delta_0 \pi 2 \cos(\theta_0 - \pi) \varkappa_0}{\sin \pi \varkappa_0} t^{\varkappa_0} \right\} \leq C \exp \left\{ \frac{\nu^+ \cos \pi\rho^+}{\sin \pi\rho^+} t^{\rho^+} \right\}$$

и при $t < 0$ — условию

$$\exp \left\{ \frac{\Delta_0 \pi 2 \cos \theta_0 \varkappa_0}{\sin \pi \varkappa_0} |t|^{\varkappa_0} \right\} \leq C \exp \left\{ \frac{\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^-}{\sin \pi\rho^-} |t|^{\rho^-} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin \pi\rho^+} \right\}.$$

Эти неравенства заведомо выполняются для любых Δ_0, θ_0 , если взять $\varkappa_0 < \rho^+$, а в случае $\varkappa_0 = \rho^+$ следует выбирать Δ_0, θ_0 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta_0 \pi 2 \cos(\theta_0 - \pi) \varkappa_0 < \nu^+ \cos \pi\rho^+.$$

Аналогично обосновывается случай с), когда неравенства (14), (15) принимают вид

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^-}{\sin \pi\rho^-} t^{\rho^-} + \frac{\nu^+ \cos \pi\rho^+}{\sin \pi\rho^+} t^{\rho^+} \right\}, \quad t > 0, \quad (19)$$

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^-}{\sin \pi\rho^-} |t|^{\rho^-} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin \pi\rho^+} \right\}, \quad t < 0. \quad (20)$$

Теорема 4. Пусть $\rho^+ < \varkappa_+ = \varkappa_- = \rho^-$, $1/2 \leq \rho^- < 1$. Тогда однородная краевая задача (11)

а) не имеет нетривиальных решений в классе B_* , если

$$\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^- < 0 \quad \text{и} \quad \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^- < 0;$$

б) имеет в классе B_* бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), в которой $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leq \rho^-$, удовлетворяющая на L условиям (13)–(15), если

$$\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^- = 0 \quad \text{либо} \quad \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^- = 0,$$

$$\text{либо} \quad [\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^-][\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^-] < 0;$$

с) имеет в классе B_* бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), в которой $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leq \rho^-$, принимающая на L вещественные значения и при $\rho_\Phi = \rho^-$ удовлетворяющая неравенствам (14), (15), если

$$\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^- > 0 \quad \text{и} \quad \pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^- > 0.$$

Доказательство. Утверждения а) проверяются как и выше. Проведем доказательство утверждения б). Сначала отметим, что условия (14), (15) принимают вид

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\nu^+ \cos \pi\rho^+}{\sin \pi\rho^+} t^{\rho^+} \right\}, \quad t > 0, \quad (21)$$

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^-}{\sin \pi\rho^-} |t|^{\rho^-} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin \pi\rho^+} \right\}, \quad t < 0, \quad (22)$$

если

$$\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^- = 0,$$

либо

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^-}{\sin \pi\rho^-} t^{\rho^-} + \frac{\nu^+ \cos \pi\rho^+}{\sin \pi\rho^+} t^{\rho^+} \right\}, \quad t > 0,$$

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin \pi\rho^+} \right\}, \quad t < 0,$$

если

$$\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^- = 0.$$

Пусть выполнено условие

$$\pi\Delta_+ \cos \pi\rho^- + \pi\Delta_- - \nu^- = 0,$$

тогда $\pi\Delta_+ + (\pi\Delta_- - \nu^-) \cos \pi\rho^- > 0$. Рассмотрим случай

$$\nu^+ \cos \pi\rho^+ < 0, \quad \rho^+ \geq 1/2, \implies \nu^+ > 0.$$

Примером целой функции порядка не выше ρ^- , удовлетворяющей условиям (13), (21), (22) может служить функция (16) при любых $\Delta_0 > 0$, $\varkappa_0, \rho^+ \leq \varkappa_0 \leq \rho^-$ и $\cos(\theta_0 - \pi)\varkappa_0 < 0$. Пусть теперь

$$\nu^+ \cos \pi\rho^+ > 0, \quad \rho^+ \geq 1/2, \implies \nu^+ < 0.$$

В этих условиях требуется построить целую функцию порядка не выше ρ^- , принимающую на L вещественные значения и удовлетворяющую неравенствам (21), (22). Для этого введем целую функцию порядка $\varkappa_1$

$$\Phi_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_k e^{i\theta_1}} \right) \left(1 - \frac{z}{r_k e^{-i\theta_1}} \right), \quad r_k = \left(\frac{2k-1}{2\Delta_1} \right)^{1/\varkappa_1}.$$

Как и выше $\arg(1 - z/r_k e^{i\theta_1})$ означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z = r e^{i\theta_1}$, $r > r_k$, принимающую нулевое значение при $z = 0$, $\arg(1 - z/r_k e^{-i\theta_1})$ означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z = r e^{i\theta_1}$, $r > r_k$, принимающую нулевое значение при $z = 0$, $\varkappa_1$ — число из промежутка

$(0, \rho^+]$, $\Delta_1 > 0$, θ_1 — фиксированный угол, $0 \leq \theta_1 \leq \pi$. Имеем ([17], с. 102) асимптотическую формулу

$$\ln \Phi_1(t) = \begin{cases} \frac{\Delta_1 \pi 2 \cos(\theta_1 - \pi) \varkappa_1}{\sin \pi \varkappa_1} t^{\varkappa_1} + o(t^{\varkappa_1}), & t \rightarrow +\infty; \\ \frac{\Delta_1 \pi 2 \cos \theta_1 \varkappa_1}{\sin \pi \varkappa_1} |t|^{\varkappa_1} + o(|t|^{\varkappa_1}), & t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Согласно (16) с $\theta_0 = \pi(1 - 1/2\rho^-)$ построим функцию $\Phi_{01}(z)$, для которой справедливо

$$\ln \Phi_{01}(t) = \begin{cases} o(t^{\varkappa_1}), & t \rightarrow +\infty; \\ \Delta_0 \pi 2 |t|^{\varkappa_0} + o(|t|^{\varkappa_0}), & t \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Теперь введем целую функцию $\Phi_2(z) = \Phi_{01}(z)\Phi_1(z)$, удовлетворяющую условию зеркальной симметрии относительно вещественной оси. Справедливость условий (21), (22) для $\Phi_2(z)$ эквивалентна выполнению системы неравенств

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_1 \pi 2 \cos(\theta_1 - \pi) \varkappa_1}{\sin \pi \varkappa_1} t^{\varkappa_1} + o(t^{\varkappa_1}) &< \frac{\nu^+ \cos \pi \rho^+}{\sin \pi \rho^+} t^{\rho^+} + \ln C, \quad t \rightarrow +\infty, \\ \frac{\Delta_1 \pi 2 \cos \theta_1 \varkappa_1}{\sin \pi \varkappa_1} |t|^{\varkappa_1} + \frac{\Delta_0 \pi 2 \cos \theta_0 \varkappa_0}{\sin \pi \varkappa_0} |t|^{\varkappa_0} + o(|t|^{\varkappa_0}) &< \frac{\pi \Delta_+ + (\pi \Delta_- - \nu^-) \cos \pi \rho^-}{\sin \pi \rho^-} |t|^{\rho^-} + \\ &+ \frac{\nu^+}{\sin \pi \rho^+} |t|^{\rho^+} + \ln C, \quad t \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Анализ этой системы показывает, что условия (21), (22) выполнены при любых $\Delta_0, \theta_1, \Delta_1$, если $\varkappa_1 < \rho^+$, и $\varkappa_0 < \rho^-$; если же $\varkappa_1 = \rho^+$, то при $\cos(\theta_1 - \pi)\rho^+ > 0$ должно выполняться неравенство $\Delta_1 2\pi \cos(\theta_1 - \pi)\rho^+ < \nu^+ \cos \pi \rho^+$, а если выполнено неравенство $\cos(\theta_1 - \pi)\rho^+ < 0$, то Δ_1 — любые положительные.

Аналогично рассматривается случай $\rho^+ < 1/2$.

Наконец, когда

$$[\pi \Delta_+ \cos \pi \rho^- + \pi \Delta_- - \nu^-][\pi \Delta_+ + \pi \Delta_- - \nu^- \cos \pi \rho^-] < 0,$$

условия (14), (15) принимают вид (19), (20). Пример целой функции, удовлетворяющей условиям (13), (19), (20) будем искать в виде $\Phi_3(z) = \Phi_0(z)\Phi_1(z)$, где $\varkappa_1 \leq \min\{\rho^+, \rho^-\}$, $\varkappa_0 \leq \max\{\rho^+, \rho^-\}$.

При доказательстве условия с) следует учесть, что в этом случае (14), (15) примут вид

$$\begin{aligned} |\Phi(t)| &\leq C \exp \left\{ \frac{\pi \Delta_+ \cos \pi \rho^- + \pi \Delta_- - \nu^-}{\sin \pi \rho^-} |t|^{\rho^-} + \frac{\nu^+ \cos \pi \rho^+}{\sin \pi \rho^+} t^{\rho^+} \right\}, \quad t > 0, \\ |\Phi(t)| &\leq C \exp \left\{ \frac{\pi \Delta_+ + (\pi \Delta_- - \nu^-) \cos \pi \rho^-}{\sin \pi \rho^-} |t|^{\rho^-} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin \pi \rho^+} \right\}, \quad t < 0. \end{aligned}$$

Построение примеров целых функций с нужными свойствами проводится как и выше.

Теорема 5. Пусть $\max\{\rho^+, \rho^-\} < \varkappa_+$, $\varkappa_+ = \varkappa_-$, $\varkappa_+ < 1/2$. Тогда однородная краевая задача (11) в классе B_* имеет бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), в которой $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка ρ_Φ , $\rho_\Phi \leq \varkappa_+$, удовлетворяющая условию (13) и при $\rho_\Phi = \varkappa_+$ еще и неравенствам (14), (15).

Доказательство основано на построении примеров целых функций порядка $\rho_\Phi \leq \kappa_+$, удовлетворяющих указанным выше условиям. Поскольку по определению $\Delta_+ > 0$, $\Delta_- > 0$, то

$$\pi\Delta_+ \cos \pi\kappa_+ + \pi\Delta_- > 0, \quad \pi\Delta_+ + \pi\Delta_- \cos \pi\kappa_+ > 0.$$

Поэтому целая функция (16) будет удовлетворять условиям (14), (15) при любых Δ_0 , θ_0 , если ее порядок $\rho_{\Phi_0} = \kappa_0 < \kappa_+$, а в случае $\kappa_0 = \kappa_+$ величины Δ_0 , θ_0 должны удовлетворять системе

$$\Delta_0 2 \cos(\theta_0 - \pi)\kappa_0 \leq \Delta_+ \cos \pi\kappa_0 + \Delta_-, \quad \Delta_0 2 \cos \theta_0 \kappa_0 \leq \Delta_+ + \Delta_- \cos \pi\kappa_0,$$

бесконечное множество решений которой очевидно.

Теорема 6. Пусть $\max\{\rho^+, \rho^-\} < \kappa_+$, $\kappa_+ = \kappa_-$, $1/2 \leq \kappa_+ < 1$. Тогда

а) если $[\Delta_+ \cos \pi\kappa_+ + \Delta_-][\Delta_+ + \Delta_- \cos \pi\kappa_+] < 0$, то однородная краевая задача (11) в классе B_* имеет бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), в которой $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка κ_+ , удовлетворяющая условию (13) и неравенствам (14), (15);

б) если $\Delta_+ \cos \pi\kappa_+ + \Delta_- = 0$ или $\Delta_+ + \Delta_- \cos \pi\kappa_+ = 0$, то однородная краевая задача (11) в классе B_* имеет бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), в которой $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leq \kappa_+$, удовлетворяющая условию (13) и неравенствам (14), (15);

с) если $\Delta_+ \cos \pi\kappa_+ + \Delta_- > 0$, $\Delta_+ + \Delta_- \cos \pi\kappa_+ > 0$, то однородная краевая задача (11) имеет в классе B_* бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), в которой $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leq \kappa_+$, удовлетворяющая условию (13) и при $\rho_\Phi = \kappa_+$ еще и неравенствам (14), (15).

Доказательство. Пусть выполнено условие а). Подробно рассмотрим случай $\kappa_+ = \kappa_-$ при $\Delta_+ \cos \pi\kappa_+ + \Delta_- < 0$. Ограничения (14), (15) здесь примут вид

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\pi(\Delta_+ \cos \pi\kappa_+ + \Delta_-)t^{\kappa_+}}{\sin \pi\kappa_+} - \frac{\nu^- t^{\rho^-}}{\sin \pi\rho^-} + \frac{\nu^+ t^{\rho^+} \cos \pi\rho^+}{\sin \pi\rho^+} \right\}, \quad t > 0, \quad (23)$$

$$|\Phi(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{\pi|t|^{\kappa_+}(\Delta_+ + \Delta_- \cos \pi\kappa_+)}{\sin \pi\kappa_+} - \frac{\nu^- |t|^{\rho^-} \cos \pi\rho^-}{\sin \pi\rho^-} + \frac{\nu^+ |t|^{\rho^+}}{\sin \pi\rho^+} \right\}, \quad t < 0. \quad (24)$$

Предположим, что существует целая функция $\Phi(z)$ порядка $\rho_\Phi < \kappa_+$, удовлетворяющая условиям (23), (24). В силу (23) при $t > 0$ имеем

$$\frac{\ln |\Phi(t)|}{t^{\rho_\Phi}} \leq t^{\kappa_+ - \rho_\Phi} \left[\frac{\ln C}{t^{\kappa_+}} + \frac{\pi(\Delta_+ \cos \pi\kappa_+ + \Delta_-)}{\sin \pi\kappa_+} - \frac{\nu^- t^{\rho^- - \kappa_+}}{\sin \pi\rho^-} + \frac{\nu^+ \cos \pi\rho^+}{\sin(\pi\rho^+)t^{\kappa_+ - \rho^+}} \right].$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $t \rightarrow +\infty$, заключаем, что индикатор роста $h_\Phi(0) = -\infty$. К такому же выводу о величине $h_\Phi(\pi)$ приходим, если допустить существование целой функции порядка $\rho_\Phi < \kappa_+$, удовлетворяющей условию (24), если $\Delta_+ + \Delta_- \cos \pi\kappa_+ < 0$. Итак, доказали, что если при выполнении условий а) теоремы порядок целой функции $\Phi(z)$ $\rho_\Phi < \kappa_+$, то либо индикатор $h_\Phi(0)$, либо $h_\Phi(\pi)$ должен обратиться в $-\infty$, что невозможно. Следовательно, возможно лишь равенство $\rho_\Phi = \kappa_+$. Осталось доказать существование целых функций порядка κ_+ , удовлетворяющих условию (13) и неравенствам (23), (24).

Пусть, например,

$$\Delta_+ + \Delta_- \cos \pi\kappa_+ > 0, \quad \Delta_+ \cos \pi\kappa_+ + \Delta_- < 0.$$

У функции $\Phi_0(z)$ в виде (16) возьмем $\varkappa_0 = \varkappa_+$. Тогда условия (23), (24) для этой функции будут выполнены, если параметры θ_0 , Δ_0 будут удовлетворять системе

$$2\Delta_0 \cos(\theta_0 - \pi)\varkappa_+ = \Delta_+ \cos \pi\varkappa_+ + \Delta_-, \quad 2\Delta_0 \cos \theta_0 \varkappa_+ = \Delta_+ + \Delta_- \cos \pi\varkappa_+,$$

которая имеет решение

$$\theta_0 = \frac{1}{\varkappa_+} \operatorname{arccctg} \frac{\Delta_+ + \Delta_- \cos \pi\varkappa_+}{\Delta_- \sin \pi\varkappa_+}, \quad \Delta_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_-^2 + \Delta_+^2 + 2\Delta_- \Delta_+ \cos \pi\varkappa_+}.$$

Аналогично разбирается симметричный случай.

Построение примеров целых функций в случае b) теоремы проводится так. Пусть, например, $\Delta_+ + \Delta_- \cos \pi\varkappa_+ = 0$, тогда будет выполнено неравенство $\Delta_+ \cos \pi\varkappa_+ + \Delta_- > 0$ и функция (16) с $\varkappa_0 = \varkappa_+$ будет удовлетворять условиям (23), (24), если будут выполнены неравенства

$$2\Delta_0 \cos(\theta_0 - \pi)\varkappa_+ \leq \Delta_+ \cos \pi\varkappa_+ + \Delta_-, \quad \Delta_0 \cos \theta_0 \varkappa_+ \leq 0.$$

Последнее неравенство системы будет выполнено, если взять $\theta_0 = \pi$. Теперь первое неравенство системы можно удовлетворить выбором Δ_0 . Итак, функция $\Phi_0(z)$ будет удовлетворять неравенствам (23), (24), если в формуле (16) положить

$$\varkappa_0 = \varkappa_+, \quad \theta_0 = \pi, \quad \Delta_0 < \frac{\Delta_+ \cos \pi\varkappa_+ + \Delta_-}{2}.$$

Аналогично рассматривается случай $\Delta_+ \cos \pi\varkappa_+ + \Delta_- = 0$.

Доказательство условия с) очевидно. $\square$

Теорема 7. Пусть $\varkappa_+ > \max\{\rho^+, \rho^-, \varkappa_-\}$. Тогда

а) если $\varkappa_+ < 1/2$, то однородная краевая задача (11) в классе B_* имеет бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), в которой $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leq \varkappa_+$, удовлетворяющая условию (13) и, если $\rho_\Phi = \varkappa_+$, то еще и неравенствам (23), (24);

б) если $1/2 \leq \varkappa_+ < 1$, то однородная краевая задача (11) имеет в классе B_* бесконечное множество решений, определяемых формулой (12), в которой $\Phi(z)$ — произвольная целая функция порядка $\varkappa_+$, удовлетворяющая условию (13) и неравенствам (23), (24).

При доказательстве утверждения б) учтем, что $\cos \pi\varkappa_+ < 0$, $\Delta_+ > 0$. Предположив существование целых функций порядка $\rho_\Phi < \varkappa_+$, в силу (23), (24) выводим, что либо величина $h_\Phi(0)$, либо $h_\Phi(\pi)$ должна обратиться в $-\infty$, что невозможно. Доказательство существования целых функций порядка $\varkappa_+$ с нужными свойствами стандартно, как и доказательство утверждения а).

4. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Общее решение неоднородной задачи (2) будем искать в классе B_* , считая выполненными все ограничения, налагаемые на коэффициенты краевого условия (7) при решении соответствующей однородной задачи, и принимая во внимание результаты п. 3, содержащего картину разрешимости однородной задачи. Для построения частного решения неоднородной задачи понадобятся дополнительные ограничения. Будем считать, что

$$c(t) = O(t^{-2}), \quad |t| \rightarrow +\infty, \quad (25)$$

функции $c(t)$, $|G(t)|$ удовлетворяют условию $H(\mu)$ в области определения. На точки разрыва коэффициентов краевого условия налагаем следующие ограничения. Обозначим

$$\begin{aligned} p_k &= n_+^*(t_k) - \Delta_+ t_k^{\varkappa_+}, & p_{-k} &= n_-^*(t_{-k}) - \Delta_- (-t_{-k})^{\varkappa_-}, \\ q_k &= n_+^*(t_k) - \Delta_+ t_{k+1}^{\varkappa_+}, & q_{-k} &= n_-^*(t_{-k}) - \Delta_- (t_{-k-1})^{\varkappa_-}. \end{aligned}$$

Будем считать, что эти числа удовлетворяют неравенствам

$$0 < p_k < 1, \quad 0 < p_{-k} < 1, \quad -1 < q_k < 0, \quad -1 < q_{-k} < 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

и сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |p_k^2 - q_k^2| = Q_+, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |p_{-k}^2 - q_{-k}^2| = Q_-. \quad (26)$$

Условия (26) являются менее жесткими, чем ограничения

$$p_{-k} = -n_-^*(-t_{-k}) + \Delta_- (-t_{-(k+1)})^{\varkappa_-} > 0, \quad p_k = -n_+^*(t_k) + \Delta_+ (t_{k+1})^{\varkappa_+} > 0,$$

которые в ([17], с. 121–137) использовались при получении для любого $\xi > 0$ неравенств

$$\left| \int_{t_1}^{\xi} (n_+^*(t) - \Delta_+ t^{\varkappa_+}) t^{\varkappa_+ - 1} dt \right| < \frac{1}{2\Delta_+ \varkappa_+}, \quad \left| \int_{-t_{-1}}^{\xi} (n_-^*(t) - \Delta_- t^{\varkappa_-}) t^{\varkappa_- - 1} dt \right| < \frac{1}{2\Delta_- \varkappa_-},$$

применяемых там для обоснования справедливости условия Гёльдера для функций $e^{I_+(t)}$, $e^{I_-(t)}$.

В силу условий (26) для $\xi \in (t_k, t_{k+1})$ имеем

$$\left| \int_{t_1}^{\xi} (n_+^*(t) - \Delta_+ t^{\varkappa_+}) t^{\varkappa_+ - 1} dt \right| < \frac{1}{2\Delta_+ \varkappa_+} \left| \sum_{j=1}^{k-1} (n_+^*(t_j) - \Delta_+ t_j^2) \Big|_{t_{j+1}}^{t_j} + (n_+^*(t_k) - \Delta_+ t_k^2) \Big|_{\xi}^{t_k} \right|,$$

таким образом,

$$\left| \int_{t_1}^{\xi} (n_+^*(t) - \Delta_+ t^{\varkappa_+}) t^{\varkappa_+ - 1} dt \right| < \frac{Q_+ + 1}{2\Delta_+ \varkappa_+}$$

и, аналогично,

$$\left| \int_{-t_{-1}}^{\xi} (n_-^*(t) - \Delta_- t^{\varkappa_-}) t^{\varkappa_- - 1} dt \right| < \frac{Q_- + 1}{2\Delta_- \varkappa_-}.$$

Итак, и в силу (26) имеем $e^{I_+(t)}$, $e^{I_-(t)} \in H_L(\mu)$.

Отметим, что условия (3), (4), (26) не противоречивы. Возьмем, например, последовательность чисел

$$\varkappa_k := k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha} = \frac{1-\alpha}{k^\alpha} + O(k^{-1-\alpha}), \quad n_+^*(t_k) = \sum_{j=1}^k \varkappa_j = k^{1-\alpha},$$

и сходящуюся к бесконечности последовательность точек $t_k = k^{(1-\alpha)/\varkappa}$, удовлетворяющую при $1-\alpha > \varkappa$ условию (4) и при $\Delta = 1$ — условию (3). При этом $p_k = 0$, $q_k = -(1-\alpha)/k^\alpha + O(k^{-1-\alpha})$, следовательно, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |p_k^2 - q_k^2|$$

сходится при $1/2 < \alpha < 1$.

С учетом формул (5), (6), (8)–(10) краевое условие (2) запишем в виде

$$\Re \left\{ i e^{-\Gamma^+(t)} e^{-iP_1(t)+Q_1(t)} e^{-iP_2(t)+Q_2(t)} F(t) P_+(t) P_-(t) \right\} = \frac{c(t)}{|G(t)|} |P_+(t)| |P_-(t)| e^{Q_1(t)} e^{Q_2(t)} e^{-\Gamma_0(t)} \cos \beta(t) \pi. \quad (27)$$

Преобразуем это условие к краевому условию задачи Шварца для полуплоскости. Нам понадобятся целые функции $\tilde{\Phi}_+(z)$, $\tilde{\Phi}_-(z)$, построенные в виде ([17], с. 154, см. также [19])

$$\tilde{\Phi}_+(z) = \Phi_{\varkappa_+}(z-i)\Phi_{\varkappa_+}(z+i), \quad \tilde{\Phi}_-(z) = \Phi_{\varkappa_-}(z-i)\Phi_{\varkappa_-}(z+i).$$

Здесь $\Phi_{\varkappa_+}(z)$ — функция порядка $\varkappa_+$ вида

$$\Phi_{\varkappa_+}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_k} \right), \quad r_k = \left(\frac{2k-1}{4\Delta_+} \right)^{1/\varkappa_+}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (28)$$

под $\arg(z-i)$, $\arg(z+i)$ понимаем ветви, однозначные в комплексной плоскости, разрезанной по линиям $\{z = x+iy : x > 0, y = 1\}$, $\{z = x+iy : x > 0, y = -1\}$ соответственно. Аналогичной формулой определена $\Phi_{\varkappa_-}(z)$. Ясно, что

$$\Im \tilde{\Phi}_+(t) = \Im \tilde{\Phi}_-(t) = 0, \quad t \in L; \quad \tilde{\Phi}_+(t) \neq 0, \quad \tilde{\Phi}_-(t) \neq 0, \quad t \in L.$$

В [19] выведена формула для граничных значений функции $\tilde{\Phi}_+(z)$:

$$\ln \tilde{\Phi}_+(t) = \begin{cases} \frac{\pi \Delta_+ \cos \varkappa_+ \operatorname{arctg} 1/t}{\sin \pi \varkappa_+} |t|^{\varkappa_+} + O(|t|^{-\varkappa_+}), & t \rightarrow -\infty; \\ \frac{\pi \Delta_+ \cos \varkappa_+ (\pi - \operatorname{arctg} 1/t)}{\sin \pi \varkappa_+} t^{\varkappa_+} + O(t^{-\varkappa_+}), & t \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

которая использована в работе [19] при обосновании следующих свойств функций $\tilde{\Phi}_+(t)$, $\tilde{\Phi}_-(t)$:

$$\frac{|P_+(t)P_-(t)|}{\tilde{\Phi}_+(t)\tilde{\Phi}_-(t)} \in H_L(\mu), \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{|P_+(t)P_-(t)|}{\tilde{\Phi}_+(t)\tilde{\Phi}_-(t)} = m.$$

Считая выполненными условия разрешимости однородной задачи, по аналогии с построениями в ([17], с. 154) введем целые функции

$$\tilde{\Phi}_1(z) = \Phi_{\rho^-}(z-i)\Phi_{\rho^-}(z+i), \quad \tilde{\Phi}_2(z) = \Phi_{\rho^+}(z-i)\Phi_{\rho^+}(z+i),$$

где $\Phi_{\rho^-}(z)$ — целая функция порядка ρ^- вида (28). Такой же формулой определим $\Phi_{\rho^+}(z)$. Здесь под $\arg(z-i)$, $\arg(z+i)$ понимаем ветви, однозначные в комплексной плоскости, разрезанной по линиям $\{z = x+iy : x < 0, y = 1\}$, $\{z = x+iy : x < 0, y = -1\}$ соответственно. При этих предположениях в ([17] с. 174) доказана асимптотическая формула для граничных значений функции $\tilde{\Phi}_1(z)$:

$$\ln \tilde{\Phi}_1(t) = \begin{cases} \frac{2\pi \Delta_{\rho^-} \cos \rho^- (\pi - \operatorname{arctg} 1/t)}{\sin \pi \rho^-} |t|^{\rho^-} + O(|t|^{-\rho^-}), & t \rightarrow -\infty; \\ \frac{2\pi \Delta_{\rho^-} \cos \rho^- \operatorname{arctg} 1/t}{\sin \pi \rho^-} t^{\rho^-} + O(t^{-\rho^-}), & t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Теперь ясно, что для существования предела $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} e^{Q_1(t)}/\tilde{\Phi}_1(t)$ при $\nu^- < 0$ достаточно потребовать справедливости равенств

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} 2\pi\Delta_{\rho^-} \cos \rho^-(\pi - \arctg 1/t) = -\nu^- \cos \pi\rho^-,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 2\pi\Delta_{\rho^-} \cos \rho^- \arctg 1/t = -\nu^-,$$

которые будут выполнены, если положить $2\pi\Delta_{\rho^-} = -\nu^-$. Принадлежность функции $e^{Q_1(t)}/\tilde{\Phi}_1(t)$ классу Гёльдера $H_L(\mu)$ обосновывается как и в ([17], с. 155–173). Аналогичные утверждения справедливы для функции $\tilde{\Phi}_2(t)$. Итак, имеют место соотношения

$$\Im \tilde{\Phi}_1(t) = \Im \tilde{\Phi}_2(t) = 0, \quad t \in L; \quad \tilde{\Phi}_1(t) \neq 0, \quad \tilde{\Phi}_2(t) \neq 0, \quad t \in L;$$

$$\frac{e^{Q_1(t)}}{\tilde{\Phi}_1(t)} \frac{e^{Q_2(t)}}{\tilde{\Phi}_2(t)} \in H_L(\mu), \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{e^{Q_1(t)}}{\tilde{\Phi}_1(t)} = m_1, \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{e^{Q_2(t)}}{\tilde{\Phi}_2(t)} = m_2.$$

Теперь определим частное решение неоднородной задачи. Для этого краевое условие (27) запишем, учитывая, что функции $\tilde{\Phi}_1(z)$, $\tilde{\Phi}_2(z)$, $\tilde{\Phi}_+(z)$, $\tilde{\Phi}_-(z)$ на L принимают отличные от нуля вещественные значения, в виде

$$\Re \left\{ e^{-\Gamma_+(t)} \frac{e^{-iP_1(t)+Q_1(t)}}{\tilde{\Phi}_1(t)} \frac{e^{-iP_2(t)+Q_2(t)}}{\tilde{\Phi}_2(t)} \frac{P_+(t)}{\tilde{\Phi}_+(t)} \frac{P_-(t)}{\tilde{\Phi}_-(t)} F(t) \right\} = c_1(t),$$

где

$$c_1 = \frac{c(t)}{|G(t)|} \frac{|P_+(t)|}{\tilde{\Phi}_+(t)} \frac{|P_-(t)|}{\tilde{\Phi}_-(t)} \frac{e^{Q_1(t)}}{\tilde{\Phi}_1(t)} \frac{e^{Q_2(t)}}{\tilde{\Phi}_2(t)} e^{-\Gamma_0(t)} \cos \beta(t) \pi.$$

Поскольку $c_1(t) \in H_L(\mu^*)$ с некоторым показателем $0 < \mu^* < 1$, то частное решение задачи (27) можно определить из решения задачи Дирихле по формуле

$$F(z) = \frac{e^{\Gamma(z)} \tilde{\Phi}_1(z) \tilde{\Phi}_2(z) \tilde{\Phi}_+(z) \tilde{\Phi}_-(z)}{e^{-i[P_1(z)+iQ_1(z)]} e^{-i[P_2(z)+iQ_2(z)]} P_+(z) P_-(z)} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{c_1(t)}{t-z} dt. \quad (29)$$

Здесь для $\arg z \in (0, \pi)$ имеем оценку

$$|F(z) e^{\Re I_+(z)} e^{\Re I_-(z)}| < \frac{C |\tilde{\Phi}_1(z)| |\tilde{\Phi}_2(z)| |\tilde{\Phi}_+(z)| |\tilde{\Phi}_-(z)| e^{-Q_1(z)} e^{-Q_2(z)}}{\exp\{\pi \Delta_+ \Re(e^{-i\kappa_+} \pi z^{\kappa_+}) / \sin \pi \kappa_+ + \pi \Delta_- \Re z^{\kappa_-} / \sin \pi \kappa_-\}},$$

из которой следует, что порядок функции $F(z) e^{I_+(z)+I_-(z)}$ внутри угла $0 \leq \theta \leq \pi$ меньше единицы. После предельного перехода в последнем неравенстве по $z \rightarrow t$ получим неравенство $|F(t) e^{I_+(t)+I_-(t)}| < \tilde{C}$, из которого по принципу Фрагмена–Линделёфа получим $|F(z) e^{I_+(z)+I_-(z)}| < \tilde{C}$. Последнее означает принадлежность решения (29) классу B_* . Таким образом, доказана

Теорема 8. *Общее решение неоднородной краевой задачи (2)–(4), (6), (25), (26) в классе B_* представляется как сумма частного решения этой задачи (29) и общего решения (12) соответствующей однородной задачи в классе B_* .*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены постановка, решение и полное исследование разрешимости однородной краевой задачи Гильберта для специального класса аналитических в полуплоскости функций в случае, когда двустороннее завихрение на бесконечности создается независимым несимметричным влиянием как непрерывной, так и “дискретной” составляющих аргумента функции коэффициентов краевого условия. Решение неоднородной задачи получено при дополнительных ограничениях на плотность распределения точек разрыва первого рода у функций $\nu(t)$, совместимых (в работе приведен пример) с налагаемыми при решении однородной задачи условиями.

В работе не изучался вопрос о разрешимости неоднородной задачи в случае, когда соответствующая однородная задача не имеет решений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).
- [2] Мухелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1968).
- [3] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Задача Гильберта. Случай бесконечного множества точек разрыва коэффициентов*, Сиб. матем. журн. **49** (4), 898–915 (2008).
- [4] Шабалин П.Л. *Один случай задачи Гильберта с особенностями коэффициентов*. Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Механ. Информатика **9** (1), 58–68 (2009).
- [5] Сабитов И.Х. *Об одной граничной задаче теории функций*. Изв. отд. геол.-хим. и техн. наук АН Тадж. ССР **4** (6), 3–10 (1961).
- [6] Салимов Р.Б., Туктамышов Н.К. *Решение задачи Гильберта для кольца в особом случае и его применение к одной задаче взрыва*, Матем. заметки **66** (1), 135–144 (1999).
- [7] Безродных С.И., Власов В.И. *Задача Римана–Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **42** (3), 277–312 (2002).
- [8] Говоров Н.В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом* (Наука, М., 1986).
- [9] Толочко М.Э. *О разрешимости краевой задачи Римана с бесконечным индексом для полуплоскости*, Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук, №3, 52–59 (1971).
- [10] Сандрыгайло И.Е. *О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости*, Докл. Акад. наук БССР **19** (10), 872–875 (1975).
- [11] Монахов В.Н., Семенко Е.В. *Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях* (Физматлит, М., 2003).
- [12] Монахов В.Н., Семенко Е.В. *Краевые задачи с бесконечным индексом в пространствах Харди*, ДАН СССР **291** (3), 544–547 (1986).
- [13] Сандрыгайло И.Е. *О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости*, Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук, №6, 16–23 (1974).
- [14] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом*, Матем. заметки **73** (5), 724–734 (2003).
- [15] Алехно А.Г. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом в случае многостороннего завихрения*, Докл. АН БССР **25** (8), 681–684 (1981).
- [16] Севрук А.Б. *Однородная краевая задача Гильберта с бесконечным индексом для кусочно аналитических функций*, Вестн. БГУ. Сер. 1, №1, 76–81 (2010).
- [17] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения* (Изд-во Казанск. матем. о-во, Казань, 2005).
- [18] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка меньше 1/2*, Уфимск. матем. журн. **5** (2), 82–93 (2013).
- [19] Salimov R., Shabalin P. *Solvability of the Riemann–Hilbert boundary value problem with a two-side curling at infinity point of order less than 1*, Complex Var. Elliptic Equ. **59** (12), 1739–1757 (2014).
- [20] Журавлева М.И. *Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом со счетным множеством разрывов первого рода ее коэффициента*, ДАН СССР **210** (1), 15–17 (1973).

- [21] Карабашева Э.Н. *О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним разным порядком закрутки на бесконечности*, Изв. КГАСУ **1** (27), 242–252 (2014).
- [22] Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций* (Гостехиздат, М., 1956).

Энже Назиповна Хасанова

*Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,*

e-mail: enkarabasheva@bk.ru

Павел Леонидович Шабалин

*Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,*

e-mail: pavel.shabalin@mail.ru

E.N. Khasanova and P.L. Shabalin

Hilbert boundary-value problem with different two-sided power-law vorticity at infinity

Abstract. We consider the Hilbert boundary-value problem for the half-plane with the countable set of points of discontinuity of the first kind and unique point of discontinuity of the second kind at infinity of the argument of function of coefficients of the boundary condition. This leads to the different two-sided power-law vorticity at infinity. In this paper we derive the general solution and deduce the full solution to the homogeneous problem for the special class of function. We also found the the general solution of the non-homogeneous problem.

Keywords: Hilbert boundary-value problem, infinity index, vorticity at infinity, curling at infinity, entire function.

Enzhe Nazipovna Khasanova

*Kazan State Architecture and Civil Engineering University,
1 Zelyonaya str., Kazan, 420043 Russia,*

e-mail: enkarabasheva@bk.ru

Pavel Leonidovich Shabalin

*Kazan State Architecture and Civil Engineering University,
1 Zelyonaya str., Kazan, 420043 Russia,*

e-mail: pavel.shabalin@mail.ru