Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Авхадиев, Однопараметрические монотонные функционалы, связанные с интегралами Стильтьеса, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 4, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-4-3-14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:13:44

Ф.Г. АВХАДИЕВ

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ИНТЕГРАЛАМИ СТИЛТЬЕСА

Аннотация. Используя интеграл Стильеса, определяем однопараметрические функционалы, обладающие свойством монотонности как функции параметра. Доказаны утверждения, обобщающие известные результаты из следующих статей:

1) Heinig H. and Maligranda L. *Weighted inequalities for monotone and concave functions*, *Studia Math.* **116** (2), p. 133–165 (1995);

2) Avkhadiev F.G. and Kayumov I.R. *Comparison theorems of isoperimetric type for moments of compact sets*, *Collectanea Math.* **55** (1), p. 1–9 (2004).

В отличие от этих работ, доказываем несколько теорем о монотонности интегральных функционалов без требования абсолютной непрерывности интегрирующей функции. Получены также приложения теорем о монотонности к изопериметрическим неравенствам.

Ключевые слова: интеграл Стильеса, монотонная функция, интегральное неравенство, норма в пространстве Лоренца, изопериметрическое неравенство.

УДК: 517.5:517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-4-3-14

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известен следующий факт (например, [1]):

если $g \in L^p(d\mu)$, λ — функция распределения для $|g|$, $d\mu(x) \geq 0$, то

$$\int |g(x)|^p d\mu(x) \Big/ \int d\mu(x) = \int_0^\infty h(t) dt^p,$$

где $h(t) = \lambda(t)/\lambda(0)$. Поскольку функция распределения является невозрастающей, то известное неравенство Гёльдера–Йенсена

$$\left(\frac{\int |g(x)|^p d\mu(x)}{\int d\mu(x)} \right)^{1/p} \leq \left(\frac{\int |g(x)|^q d\mu(x)}{\int d\mu(x)} \right)^{1/q} \quad (0 < p \leq q < \infty)$$

эквивалентно следующему утверждению.

Теорема А. Если $0 < p \leq q < \infty$, $0 \leq h(t) \leq 1$ и $h(t)$ не возрастает в интервале $(0, \infty)$, то

$$\left(\int_0^\infty h(t) dt^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^\infty h(t) dt^q \right)^{1/q}. \quad (1)$$

Поступила в редакцию 19.02.2018, после доработки 19.02.2018. Принята к публикации 22.03.2018

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

Имеется ряд обобщений и аналогов неравенства (1) с интересными приложениями к теоремам вложения в пространствах Соболева и Лоренца, к изопериметрическим проблемам математической физики. Прежде всего, приведем неравенство Е. Стейна [1], [2] для норм в интерполяционных пространствах Лоренца.

Теорема В. Пусть f является невозрастающей функцией в интервале $(0, \infty)$ и $f(t) \geq 0$. Если $\alpha \in (0, \infty)$ и $0 < p < q < \infty$, то имеет место следующее точное неравенство:

$$\left(\frac{p}{\alpha} \int_0^\infty [t^{1/\alpha} f(t)]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \geq \left(\frac{q}{\alpha} \int_0^\infty [t^{1/\alpha} f(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \quad (2)$$

Г. Хайниг и Л. Малигранда [3] доказали несколько обобщений неравенств (1) и (2). В статье [3] дан также обзор близких результатов, полученных в работах А.П. Калдерона и Р. Скотта, Г.Г. Лоренца, В. Мазыи, Й. Берга, В.И. Буренкова и Л.Е. Перссона и других.

В [3], а также в недавних статьях С. Барзы, В.И. Коляды, Й. Сории [4] и В.Д. Степанова, Г.Е. Шамбиловой [5] даны применения неравенств вида (1), (2) и ссылки на ряд предшествующих результатов.

Если $0 < b < \infty$ и $f(t) = 0$ для $t \in (b, \infty)$, то (2) влечет неравенство

$$\left(\frac{p}{\alpha} \int_0^b [t^{1/\alpha} f(t)]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \geq \left(\frac{q}{\alpha} \int_0^b [t^{1/\alpha} f(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

для невозрастающих функций f . Для неубывающих функций $f \not\equiv \text{const}$ это неравенство неверно. Более того, Ф.Г. Авхадиевым и И.Р. Каюмовым [6] доказана

Теорема С. Предположим, что $b \in (0, \infty)$, $\alpha \in (0, \infty)$ и $0 < p < q < \infty$. Если функции $f, h \in L^1(0, b)$, причем $h : [0, b] \rightarrow [0, 1]$ и $f : [0, b] \rightarrow [0, \infty)$ является неубывающей, то

$$\left(\frac{p}{\alpha} \int_0^b h(t) [t^{1/\alpha} f(t)]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq \left(\frac{q}{\alpha} \int_0^b h(t) [t^{1/\alpha} f(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \quad (3)$$

Из теоремы С следует, что неравенство (1) справедливо и без требования монотонности функции h . Опираясь на этот факт, в [6] обоснована следующая теорема сравнения для степенных моментов.

Теорема Д. Предположим, что Ω — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $\text{mes}(\Omega) > 0$, $\omega_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь сферы $|x| = 1$. Если $H \in L^1(\Omega)$, $0 < H(x) \leq 1$ на Ω и $0 < p < q < \infty$, то

$$\left(\frac{p}{\omega_{n-1}} \int_\Omega |x|^{p-n} H(x) dx \right)^{1/p} \leq \left(\frac{q}{\omega_{n-1}} \int_\Omega |x|^{q-n} H(x) dx \right)^{1/q}. \quad (4)$$

Равенство в (4) достигается тогда и только тогда, когда $H(x) = 1$ почти всюду (п.в.) на Ω , и компакт Ω — шар вида $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \rho\}$ с точностью до некоторого множества лебеговой меры нуль.

Отметим, что мы получаем неравенство (4) как следствие неравенства (3) для $\alpha = 1$, $f(t) \equiv 1$ и $h(t) := (1/\omega_{n-1}) \int_{|x|=t} H^*(x) d\omega$, $t \geq 0$, где $x = t\omega \in \mathbb{R}^n$, функция H^* определена равенствами $H^*(x) = H(x)$ при $x \in \Omega$ и $H^*(x) = 0$ при $x \notin \Omega$.

Частный случай неравенства (4) для фиксированных $p = n$ и $q = n + 2$ совпадает с изопериметрическим неравенством Дж. Пойа при $n = 2$ и К. Бэндл при $n \geq 2$ для полярных моментов инерции компакта Ω (см. [7], [8]). Доказательство Дж. Пойа и К. Бэндл основано на методе симметризации Шварца.

Когда число $p > 0$ фиксировано, область интегрирования является шаром и $H(x) \equiv 1$, то равенство в (4) реализуется для любого значения параметра $q \in (p, \infty)$. Такое свойство называется *изопериметрической монотонностью*. Этот термин впервые ввел Дж. Херш [9] (см. также [10] и статьи Р.Г. Салахудинова [11], [12]).

1. АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ C И ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ МОНОТОННОСТЬ

Мы можем применить теорему C , полагая $f(x) \equiv e^{x^2/2}$. Такой выбор функции f позволяет ослабить требования $0 \leq h(x) \leq 1$ теоремы C .

А именно, справедлива

Теорема 1. Пусть $0 < p \leq q < \infty$ и пусть $b \in (0, \infty)$. Тогда справедливы два следующих утверждения.

1) Если $h \in L^1(0, b)$ и $0 \leq h(x) \leq 1 + x^2$ для любого $x \in [0, b]$, то

$$\left(\int_0^b h(x) e^{p x^2/2} dx^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^b h(x) e^{q x^2/2} dx^q \right)^{1/q}. \quad (5)$$

Если $0 < p < q < \infty$, то равенство в (5) имеет место тогда и только тогда, когда существует такое число $a^* \in [0, b]$, что $h(x) = 1 + x^2$ п. в. на $[0, a^*]$ и $h(x) = 0$ п. в. на $[a^*, b]$.

2) Если $h \in L^1(0, 1)$ и $1 - x^2 \leq h(x) < \infty$ для любого $x \in [0, 1]$, то

$$\left(\int_0^1 h(x) e^{-p x^2/2} dx^p \right)^{1/p} \geq \left(\int_0^1 h(x) e^{-q x^2/2} dx^q \right)^{1/q}. \quad (6)$$

Если $0 < p < q < \infty$, то равенство в (6) имеет место тогда и только тогда, когда $h(x) = 1 - x^2$ п. в. на $[0, 1]$.

Доказательство. Случай 1). Интегрированием по частям для любого $x \in [0, \infty)$ получаем тождество

$$\int_0^x (1 + t^2) e^{p t^2/2} dt^p = e^{p x^2/2} x^p. \quad (7)$$

Пусть число $\alpha \in (0, \infty)$. Рассмотрим абсолютно непрерывную функцию $S_\alpha : [0, b] \rightarrow [0, \infty)$, определенную равенством $S_\alpha(x) = \int_0^x h(t) e^{\alpha t^2/2} dt^\alpha$. Полагая $\alpha = p$, будем иметь $dS_p(x)/dx = p h(x) e^{p x^2/2} x^{p-1}$ для почти всех $x \in [0, b]$. С учетом неравенств $0 \leq h(x) \leq 1 + x^2$ и тождества (7) для почти всех $x \in [0, b]$ получаем

$$\frac{dS_p^{q/p}(x)}{dx} = \frac{q}{p} S_p^{q/p-1}(x) S_p'(x) \leq q h(x) e^{q x^2/2} x^{q-1} = \frac{dS_q(x)}{dx}. \quad (8)$$

Интегрируя (8), приходим к неравенству (5).

Для завершения доказательства нужно исследовать случай равенства в (5) при условии $0 < p < q < \infty$.

Если существует такое число $a^* \in [0, b]$, что $h(x) = 1 + x^2$ п. в. на $[0, a^*]$ и $h(x) = 0$ п. в. на $[a^*, b]$, то в силу (7) левая часть (5) равна правой части (5) и равна $e^{(a^*)^2/2} a^*$.

Предположим теперь, что $0 < p < q < \infty$ и в (5) достигается равенство. Следовательно,

$$\left(\int_0^{a^*} h(x) e^{p x^2/2} dx^p \right)^{1/p} = \left(\int_0^{a^*} h(x) e^{q x^2/2} dx^q \right)^{1/q}, \quad (9)$$

где $a^* = \inf \{t \in [0, b] : \int_t^b h(t)dt = 0\}$. Отсюда следует $h(x) = 0$ п. в. на $[a^*, b]$. Мы утверждаем, что $h(x) = 1 + x^2$ п. в. на $[0, a^*]$. Действительно, в противном случае существует такое измеримое множество $E \in [0, a^*]$, что $\text{mes}(E) > 0$ и $h(x) < 1 + x^2$ для любого $x \in E$. Но тогда

$$\frac{dS_p^{q/p}(x)}{dx} < \frac{dS_q(x)}{dx} \quad \forall x \in E. \quad (10)$$

Интегрируя (8) от 0 до a^* с учетом (10), получаем

$$\left(\int_0^{a^*} h(x) e^{p x^2/2} dx^p \right)^{1/p} < \left(\int_0^{a^*} h(x) e^{q x^2/2} dx^q \right)^{1/q},$$

что противоречит равенству (9).

Случай 2). Будем пользоваться тождеством

$$\int_0^x (1 - t^2) e^{-p t^2/2} dt^p = e^{-p x^2/2} x^p. \quad (11)$$

Пусть снова $\alpha \in (0, \infty)$ и $S_\alpha(x) := \int_0^x h(t) e^{\alpha t^2/2} dt^\alpha$. С учетом неравенств $1 - x^2 \leq h(x) < \infty$ и тождества (11) для почти всех $x \in [0, 1]$ получаем $dS_p(x)/dx = p h(x) e^{p x^2/2} x^{p-1}$ и

$$\frac{dS_p^{q/p}(x)}{dx} = \frac{q}{p} S_p^{q/p-1}(x) S_p'(x) \geq q h(x) e^{q x^2/2} x^{q-1} = \frac{dS_q(x)}{dx}.$$

Интегрируя это неравенство, приходим к неравенству (6). Очевидно, равенство в (6) при $0 < p < q < \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $h(x) \equiv 1 - x^2$ за исключением множества меры нуль. $\square$

Докажем теперь неравенства изопериметрического типа, обобщающие теорему D.

Теорема 2. Пусть $0 < p \leq q < \infty$ и пусть

$$\Omega_Y = \Omega \cap K_Y, \quad K_Y = \{r\omega \in \mathbb{R}^n : 0 < r = |x| < \infty, \omega \in Y\},$$

где Ω — компакт в пространстве $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$, Y — компакт на единичной сфере $|x| = 1$. Предположим, что $\omega_Y = \int_Y d\omega > 0$, $\text{mes}_n(\Omega_Y) > 0$. Тогда справедливы два следующих утверждения.

1) Если $H \in L^1(\Omega_Y)$ и $0 < H(x) \leq 1 + |x|^2$ для любого $x \in \Omega_Y$, то

$$\left(\frac{p}{\omega_Y} \int_{\Omega_Y} |x|^{p-n} H(x) e^{p|x|^2/2} dx \right)^{1/p} \leq \left(\frac{q}{\omega_Y} \int_{\Omega_Y} |x|^{q-n} H(x) e^{q|x|^2/2} dx \right)^{1/q}.$$

Если $0 < p < q < \infty$, то равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $H(x) = 1 + |x|^2$ для почти всех $x \in \Omega_Y$ и с точностью до некоторого множества лебеговой меры нуль компакт Ω — шар вида $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \rho\}$.

2) Если $H \in L^1(\Omega_Y)$ и $0 < H(x) \leq 1$ для любого $x \in \Omega_Y$, то

$$\left(\frac{p}{\omega_Y} \int_{\Omega_Y} |x|^{p-n} H(x) dx \right)^{1/p} \leq \left(\frac{q}{\omega_Y} \int_{\Omega_Y} |x|^{q-n} H(x) dx \right)^{1/q}.$$

Если $0 < p < q < \infty$, то равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $H(x) = 1$ для почти всех $x \in \Omega_Y$ и с точностью до некоторого множества лебеговой меры нуль компакт Ω — шар вида $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \rho\}$.

Доказательство. Определим функцию $h : [0, b] \rightarrow [0, \infty)$ равенством

$$h(t) = (1/\omega_Y) \int_{|x|=t} H^*(x) d\omega,$$

где $x = |x|\omega$, функция $H^*(x) = H(x)$ при $x \in \Omega_Y$ и $H^*(x) = 0$ при $x \notin \Omega_Y$.

С учетом равенства $dx = t^{n-1} dt d\omega$ для любого $p > 0$ по теореме Фубини будем иметь

$$\left(\frac{p}{\omega_Y} \int_{\Omega_Y} |x|^{p-n} H(x) e^{p|x|^2/2} dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^{\rho_1} h(x) e^{p x^2/2} dx^p \right)^{1/p},$$

$$\left(\frac{p}{\omega_Y} \int_{\Omega_Y} |x|^{p-n} H(x) dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^{\rho_2} h(x) dx^p \right)^{1/p},$$

где ρ_1, ρ_2 — некоторые положительные числа.

Нетрудно видеть, что случай 1) является следствием теоремы 1. Случай 2) является следствием теоремы С. $\square$

Замечание 1. Теорема 2 интересна тем, что изопериметрическая монотонность связана с новыми экстремальными областями вида “шар минус открытый конус”.

Следствие 1. Предположим, что $H \in L^1(\Omega_Y)$, $0 < H(x) \leq 1 + |x|^2$ при любом $x \in \Omega_Y$ и $V^* := (n/\omega_Y) \int_{\Omega_Y} H(x) e^{n|x|^2/2} dx$. Тогда

$$V^* \ln V^* \leq V^* + \frac{n^2}{\omega_Y} \int_{\Omega_Y} H(x) e^{n|x|^2/2} (\ln |x| + |x|^2/2) dx. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $V_p^* := (p/\omega_Y) \int_{\Omega_Y} |x|^{p-n} H(x) e^{p|x|^2/2} dx$. В силу теоремы 2 имеем

$$d(V_p^*)^{1/p}/dp \geq 0.$$

Непосредственными вычислениями получаем

$$\frac{d \ln(V_p^*)^{1/p}}{dp} = -\frac{\ln V_p^*}{p^2} + \frac{\int_{\Omega_Y} |x|^{p-n} H(x) e^{p|x|^2/2} (1 + p \ln |x| + p|x|^2/2) dx}{p\omega_Y V_p^*}.$$

Следовательно,

$$V_p^* \ln V_p^* \leq \frac{p}{\omega_Y} \int_{\Omega_Y} |x|^{p-n} H(x) e^{p|x|^2/2} (1 + p \ln |x| + p|x|^2/2) dx.$$

Полагая $p = n$, получим неравенство (12). $\square$

Следствие 2. Предположим, что $0 < H(x) \leq 1$ при любом $x \in \Omega_Y$ и $V^{**} := n/\omega_Y \int_{\Omega_Y} H(x) dx$. Тогда

$$V^{**} \ln V^{**} \leq V^{**} + \frac{n^2}{\omega_Y} \int_{\Omega_Y} H(x) \ln |x| dx. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $V_p^{**} := (p/\omega_Y) \int_{\Omega_Y} |x|^{p-n} H(x) dx$. Применяя теорему 2 и нетрудные вычисления, имеем

$$0 \leq \frac{d \ln(V_p^{**})^{1/p}}{dp} = -\frac{\ln V_p^{**}}{p^2} + \frac{\int_{\Omega_Y} |x|^{p-n} H(x) (1 + p \ln |x|) dx}{p\omega_Y V_p^{**}}.$$

Следовательно, $V_p^{**} \ln V_p^{**} \leq (p/\omega_Y) \int_{\Omega_Y} |x|^{p-n} H(x) (1 + p \ln |x|) dx$. Полагая $p = n$, получаем неравенство (13). $\square$

2. ТЕОРЕМЫ МОНОТОННОСТИ ДЛЯ СТЕПЕНЕЙ ИНТЕГРАЛА РИМАНА–СТИЛТЬЕСА

В этом разделе мы изучаем монотонность по параметру $p \in (0, \infty)$ функционалов

$$\left(\int_a^b h(x) f^p(x) d\psi^p(x) \right)^{1/p}.$$

Предполагаем, что интегрирующая функция ψ является неубывающей. В отличие от статей [3] и [6] не требуем абсолютной непрерывности функции ψ . В частности, в наших утверждениях функция ψ может быть неубывающей кусочно-постоянной функцией.

Кроме того, требуем монотонность функции f , но не требуем монотонности функции h . Более точно в этом разделе рассматриваются два вида условий на пару функций f, h . А именно, предполагается, что f является неубывающей и $0 \leq h(x) \leq 1$ в теореме 3 и что f является невозрастающей и $1 \leq h(x) < \infty$ в теореме 4. Остальные условия на функции ψ, f, h взяты как достаточные условия, гарантирующие существование рассматриваемого интеграла Римана–Стилтьеса.

Если интегрирующая функция ψ является абсолютно непрерывной на отрезке $[a, b]$, то утверждение следующей теоремы может быть получено как следствие теоремы 1 из [6] с помощью замены переменных.

Теорема 3. Пусть $-\infty < a < b < \infty$, $0 < p \leq q < \infty$. Предположим, что $h : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $\psi : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ — ограниченные функции, удовлетворяющие условиям (i) функция h непрерывна в интервале (a, b) и $0 \leq h(x) \leq 1$ для любого $x \in [a, b]$; (ii) функция f непрерывна в интервале (a, b) и является неубывающей на отрезке $[a, b]$; (iii) функция ψ является неубывающей на отрезке $[a, b]$ и непрерывной в точках a и b . Тогда справедливо неравенство

$$\left(\int_a^b h(x) f^p(x) d\psi^p(x) \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b h(x) f^q(x) d\psi^q(x) \right)^{1/q}. \quad (14)$$

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. существуют числа p и q , $0 < p < q < \infty$, и функции h, f, ψ , удовлетворяющие условиям теоремы и противоположному неравенству

$$\left(\int_a^b h(x) f^p(x) d\psi^p(x) \right)^{1/p} > \left(\int_a^b h(x) f^q(x) d\psi^q(x) \right)^{1/q}. \quad (15)$$

Условия, наложенные на функции h, f, ψ гарантируют существование интегралов Римана–Стилтьеса, содержащихся в неравенствах (14) и (15) (например, [13], [14]). Поэтому существуют такое разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ и такие точки $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, что из (15) вытекает

$$\sigma^{1/p}(p) > \sigma^{1/q}(q), \quad (16)$$

где $\sigma(\alpha) := \sum_{k=1}^n h(\xi_k) f^\alpha(\xi_k) [\psi^\alpha(x_k) - \psi^\alpha(x_{k-1})]$, $\alpha \in (0, \infty)$. Отметим, что $\psi(x_{n-1}) > 0$.

Действительно, если $\psi(x_{n-1}) = 0$, то справедливо равенство $\psi(x_k) = 0$ для любого $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Следовательно, в этом случае $\sigma(\alpha) = h(\xi_n) f^\alpha(\xi_n) \psi^\alpha(x_n)$ и (16) имеет вид

$$h^{1/p}(\xi_n) f(\xi_n) \psi(x_n) > h^{1/q}(\xi_n) f(\xi_n) \psi(x_n). \quad (17)$$

Это неравенство противоречит условиям $0 < p < q < \infty$, $h(x_n) \in [0, 1]$, $f(x_n) \in [0, \infty)$ и $\psi(x_n) \in [0, \infty)$. Действительно, из (17) следует $h(x_n) \neq 0$, $f(x_n) \neq 0$ и $\psi(x_n) \neq 0$. Но тогда (17) равносильно неравенству $h^{q/p}(\xi_n) > 1$, что противоречит условиям $h(x_n) \in (0, 1]$ и $q/p > 1$.

Определим теперь число $a' \in \{a, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ следующим образом. Если $\psi(x_1) > 0$, то полагаем $a' = a$. Если $\psi(x_1) = 0$, то возьмем $a' = x_k$, где $k \geq 1$ однозначно определена условиями $\psi(x_k) = 0$, $\psi(x_{k+1}) > 0$. Такое число $k < n - 1$ существует, так как $\psi(x_{n-1}) > 0$.

Определим также функции $H : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $F : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $\Psi : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ равенствами $H(b) = h(\xi_n)$, $F(b) = f(\xi_n)$,

$$H(x) = h(\xi_k), \quad F(x) = f(\xi_k) \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k],$$

$$\Psi(x) = \psi(x_{k-1}) + \frac{\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}) \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k],$$

где $k = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, H и F являются ступенчатыми функциями, могут иметь лишь конечное число точек разрыва, причем $0 \leq H(x) \leq 1$ для любого $x \in [a, b]$, а функция F является неубывающей. Функция Ψ является непрерывной, неубывающей и кусочно-линейной, причем $\Psi(x) > 0$ для любой точки $x \in (a', b]$. Нетрудно видеть, что $\sigma(\alpha) = \int_{a'}^b H(x)F^\alpha(x) d\Psi^\alpha(x)$ для любого $\alpha \in (0, \infty)$ и формула (16) равносильна неравенству

$$\left(\int_{a'}^b H(x)F^p(x) d\Psi^p(x) \right)^{1/p} > \left(\int_{a'}^b H(x)F^q(x) d\Psi^q(x) \right)^{1/q}. \quad (18)$$

Определим абсолютно непрерывную функцию $S_\alpha : [a', b] \rightarrow [0, \infty)$ равенством $S_\alpha(x) = \int_{a'}^x H(t)F^\alpha(t) d\Psi^\alpha(t)$, $x \in [a', b]$, где $\alpha \in (0, \infty)$. С учетом свойств функций H , F , Ψ и неравенств $0 < p < q < \infty$ для любого $x \in [a', b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ имеем $dS_p(x)/dx = pH(x)F^p(x)\Psi^{p-1}(x)\Psi'(x)$,

$$S_p(x) \leq F^p(x)[\Psi^p(x) - \Psi^p(a')] \leq F^p(x)\Psi^p(x), \quad (19)$$

$$\frac{dS_p^{q/p}(x)}{dx} = \frac{q}{p} S_p^{q/p-1}(x) S_p'(x) \leq qH(x)F^q(x)\Psi^{q-1}(x)\Psi'(x) = \frac{dS_q(x)}{dx}.$$

Интегрируя, получаем $\left(\int_{a'}^b H(x)F^p(x) d\Psi^p(x) \right)^{q/p} \leq \int_{a'}^b H(x)F^q(x) d\Psi^q(x)$. Очевидно, последнее неравенство противоречит неравенству (18), вытекающему из нашего предположения (15). $\square$

Следствие 3. Предположим, что функции h , f , ψ удовлетворяют условиям теоремы 3, $\gamma \in [1, \infty)$. Тогда

$$\int_a^b h(x)f(x) d\psi(x) \leq \left(\int_a^b h(x)f^\gamma(x) d\psi^\gamma(x) \right)^{1/\gamma}.$$

Для случая, когда $h(x) \equiv 1$ и интегрирующая функция ψ является непрерывной, подобные неравенства получены в статье [3].

Следствие 4. Предположим, что функции h , f , ψ удовлетворяют условиям теоремы 3. Кроме того, предположим, что $f(x) > 0$, $\psi(x) > 0$ при любом $x \in (a, b]$ и $V := \int_a^b h(x)f(x) d\psi(x) > 0$.

Тогда

$$V \ln V \leq \int_a^b h f \ln f d\psi + \int_a^b h f d(\psi \ln \psi), \quad (20)$$

где $h = h(x)$, $f = f(x)$, $\psi = \psi(x)$.

Доказательство. Для положительных чисел p , достаточно близких к единице, будем иметь $V_p := \int_a^b h(x) f^p(x) d\psi(x) > 0$. В силу неравенства (14) величина $V_p^{1/p}$ является неубывающей функцией от переменной p , следовательно, $dV_p^{1/p}/dp \geq 0$. Непосредственными вычислениями получаем

$$p^2 V_p \frac{dV_p^{1/p}}{dp} = -V_p \ln V_p + p \int_a^b h f^p \ln f d\psi + p \int_a^b h f d(\psi^p \ln \psi). \quad (21)$$

Поэтому для положительных чисел p , достаточно близких к единице, справедливо неравенство

$$V_p \ln V_p \leq p \int_a^b h f^p \ln f d\psi + p \int_a^b h f d(\psi^p \ln \psi). \quad (22)$$

Ясно, что (22) влечет (20) при $p = 1$. $\square$

В следующей теореме установлено невозрастание по параметру степени интеграла Римана–Стилтьеса. Если интегрирующая функция ψ является абсолютно непрерывной на отрезке $[a, b]$, то утверждение теоремы 4 может быть получено как следствие теоремы 3 из [6] с помощью замены переменных.

Как и в теореме 3, в теореме 4 не требуем абсолютной непрерывности интегрирующей функции ψ . Существенное отличие теоремы 4 от теоремы 3 состоит в новых требованиях на функции h и f , приводящих к неравенству, противоположному (14).

Теорема 4. Пусть $-\infty < a < b < \infty$, $0 < p \leq q < \infty$. Предположим, что $h : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $\psi : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ — ограниченные функции, удовлетворяющие условиям

- (i) функция h непрерывна в интервале (a, b) и $1 \leq h(x) < \infty$ для любого $x \in [a, b]$;
- (ii) функция f непрерывна в интервале (a, b) и является невозрастающей на отрезке $[a, b]$;
- (iii) функция ψ является неубывающей на отрезке $[a, b]$ и непрерывной в точках a и b , кроме того, $\psi(a) = 0$.

Тогда

$$\left(\int_a^b h(x) f^p(x) d\psi(x) \right)^{1/p} \geq \left(\int_a^b h(x) f^q(x) d\psi(x) \right)^{1/q}. \quad (23)$$

Доказательство. Снова предполагаем обратное: существуют числа p и q , $0 < p < q < \infty$, и функции h, f, ψ , удовлетворяющие условиям теоремы и противоположному (23) неравенству

$$\left(\int_a^b h(x) f^p(x) d\psi(x) \right)^{1/p} < \left(\int_a^b h(x) f^q(x) d\psi(x) \right)^{1/q}. \quad (24)$$

Следовательно, существуют такое разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ и такие точки $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, что

$$\sigma^{1/p}(p) < \sigma^{1/q}(q), \quad (25)$$

где интегральная сумма $\sigma(\alpha)$ определена так же, как и при доказательстве теоремы 3.

Далее, определим число $a' \in \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$, полагая $a' = x_k$, где $k \geq 0$ однозначно определено условиями $\psi(x_k) = 0$, $\psi(x_{k+1}) > 0$. Такое число $k < n - 1$ существует, так как $\psi(x_{n-1}) > 0$ в силу неравенства (25).

Определим функции H, F, Ψ так же, как и при доказательстве теоремы 3. Ступенчатые функции H и F могут иметь лишь конечное число точек разрыва, причем $1 \leq H(x) < \infty$

для любого $x \in [a, b]$, а функция F является невозрастающей. Как и при доказательстве теоремы 3 функция Ψ является непрерывной, неубывающей и кусочно-линейной, причем $\Psi(x) > 0$ для любой точки $x \in (a', b]$. Кроме того, $\Psi(a') = 0$ в силу условия (iii) теоремы 4 и выбора точки a' .

Ясно, что формула (25) равносильна неравенству

$$\left(\int_{a'}^b H(x) F^p(x) d\Psi^p(x) \right)^{1/p} < \left(\int_{a'}^b H(x) F^q(x) d\Psi^q(x) \right)^{1/q}. \quad (26)$$

Для абсолютно непрерывной функции $S_\alpha : [a', b] \rightarrow [0, \infty)$, определенной равенством $S_\alpha(x) = \int_{a'}^x H(t) F^\alpha(t) d\Psi^\alpha(t)$, $x \in [a', b]$, с учетом свойств функций H, F, Ψ и неравенств $0 < p < q < \infty$ для любого $x \in [a', b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ имеем

$$S_p(x) \geq F^p(x) \Psi^p(x), \quad (27)$$

$$\frac{dS_p^{q/p}(x)}{dx} = \frac{q}{p} S_p^{q/p-1}(x) S_p'(x) \geq q H(x) F^q(x) \Psi^{q-1}(x) \Psi'(x) = \frac{dS_q(x)}{dx}.$$

Интегрируя, получаем $\left(\int_{a'}^b H(x) F^p(x) d\Psi^p(x) \right)^{q/p} \geq \int_{a'}^b H(x) F^q(x) d\Psi^q(x)$, что противоречит неравенствам (24) – (26). $\square$

Отметим, что в доказательствах теорем 3 и 4 ключевую роль играют неравенства (19) и (27) соответственно.

Следствие 5. Пусть функции h, f, ψ удовлетворяют условиям теоремы 4. Предположим, что $f(x) > 0, \psi(x) > 0$ при любом $x \in (a, b]$ и $V := \int_a^b h(x) f(x) d\psi(x) > 0$. Тогда имеем

$$V \ln V \geq \int_a^b h f \ln f d\psi + \int_a^b h f d(\psi \ln \psi).$$

Это неравенство является следствием теоремы 4 и тождества (21). Действительно, пусть $V_p := \int_a^b h(x) f^p(x) d\psi^p(x) > 0$. Величина $V_p^{1/p}$ является невозрастающей функцией от переменной p в силу теоремы 4. Следовательно, $dV_p^{1/p}/dp \leq 0$. Применяя тождество (21), получаем, что для положительных чисел p , достаточно близких к единице, справедливо $V_p \ln V_p \geq p \int_a^b h f^p \ln f d\psi + p \int_a^b h f d(\psi^p \ln \psi)$. Отсюда и следует требуемое утверждение при $p = 1$. $\square$

Полагая $f^q = F, \psi^q = \Psi$ в теореме 4, получаем следующее обобщение неравенства Г. Хайнига и Л. Малигранды [3].

Следствие 6. Пусть $-\infty < a < b < \infty$, и пусть $\gamma \in (0, 1]$. Предположим, что $H : [a, b] \rightarrow [0, \infty), F : [a, b] \rightarrow [0, \infty), \Psi : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ — ограниченные функции, удовлетворяющие условиям

- (i) $H \in L^1(a, b)$ и $1 \leq H(x)$ для любого $x \in [a, b]$;
- (ii) функция F является невозрастающей на отрезке $[a, b]$;
- (iii) функция Ψ является неубывающей и непрерывной на отрезке $[a, b]$ и $\Psi(a) = 0$.

Тогда

$$\int_a^b H(x)F(x) d\Psi(x) \leq \left(\int_a^b H(x)F^\gamma(x) d\Psi^\gamma(x) \right)^{1/\gamma}.$$

Полагая в этом неравенстве $H(x) \equiv 1$, получаем результат Г. Хайнига и Л. Малигранды из [3].

3. ТЕОРЕМЫ МОНОТОННОСТИ ДЛЯ ПОВТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Рассмотрим интегралы вида

$$P_\alpha(h, g, f, \psi, \varphi) = \int_a^b h(x) d\psi^\alpha(x) \int_c^d g(x, y) f^\alpha(x, y) d\varphi^\alpha(y),$$

где $\alpha \in (0, \infty)$ — параметр, $-\infty < a < b < \infty$ и $-\infty < c < d < \infty$. Такие интегралы являются частными случаями мультиномиальных распределений, встречающихся в теории вероятностей (например, [15]). Для случая, когда интегрирующие функции являются абсолютно непрерывными и $h(x) \equiv 1$ или $g(x, y)$ равна произведению вида $g_1(x)g_2(y)$, монотонность $P_\alpha^{1/\alpha}$ исследована в [6].

Нашей целью является исследование монотонности $P_\alpha^{1/\alpha}(h, g, f, \psi, \varphi)$ в общем случае без требования абсолютной непрерывности интегрирующих функций ψ и φ .

Теорема 5. Пусть $0 < p \leq q < \infty$. Предположим, что $h : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $g : [a, b] \times [c, d] \rightarrow [0, \infty)$, $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow [0, \infty)$, $\psi : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $\varphi : [c, d] \rightarrow [0, \infty)$ — ограниченные функции, удовлетворяющие условиям

- (i) функция h непрерывна в интервале (a, b) и $0 \leq h(x) \leq 1$ для любого $x \in [a, b]$;
 - (ii) функция g непрерывна на множестве $(a, b) \times (c, d)$, при любом $y \in [c, d]$ функция $g(\cdot, y) : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ является неубывающей, кроме того, $0 \leq g(x, y) \leq 1$ для любой точки $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$;
 - (iii) функция f непрерывна на множестве $(a, b) \times (c, d)$, функции $f(x, \cdot) : [c, d] \rightarrow [0, \infty)$ и $f(\cdot, y) : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ являются неубывающими при любом $x \in [a, b]$ и при любом $y \in [c, d]$, соответственно;
 - (iv) функции ψ и φ являются неубывающими на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно. Кроме того, ψ непрерывна в точках a и b , а φ непрерывна в точках c и d .
- Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b h(x) d\psi^p(x) \int_c^d g(x, y) f^p(x, y) d\varphi^p(y) \right)^{1/p} &\leq \\ &\leq \left(\int_a^b h(x) d\psi^q(x) \int_c^d g(x, y) f^q(x, y) d\varphi^q(y) \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Доказательство. Фиксируем точку $x \in [a, b]$ и применяем теорему 3 по переменной y на отрезке $[c, d]$ вместо $[a, b]$. Будем иметь

$$\left(\int_c^d g(x, y) f^p(x, y) d\varphi^p(y) \right)^{1/p} \leq F(x) := \left(\int_c^d g(x, y) f^q(x, y) d\varphi^q(y) \right)^{1/q}.$$

Следовательно,

$$P_p(h, g, f, \psi, \varphi) \leq \int_a^b h(x) F^p(x) d\psi^p(x). \quad (28)$$

Из условий (ii)–(iv) теоремы 5 и базовых свойств интегралов Римана–Стилтьеса легко следует, что функция $F : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ является ограниченной, неубывающей и, кроме того, непрерывной в интервале (a, b) . Применяя к интегралу из правой части (28) неравенство (14) при $f(x) \equiv F(x)$, получаем $P_p(h, g, f, \psi, \varphi) \leq P_q^{p/q}(h, g, f, \psi, \varphi)$. $\square$

Замечание 2. Отметим еще один вариант требований на функции в теореме 5. А именно, если функции ψ и φ являются абсолютно непрерывными на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно, то можно ослабить требование непрерывности интегрируемых функций и распространить теорему 5 на интегралы Лебега–Стилтьеса. Здесь подразумеваем, что другие условия на функции h, g, f, ψ, φ , связанные с монотонностью и неравенствами, сохраняются.

С применением теоремы 4 доказывается

Теорема 6. Пусть $0 < p \leq q < \infty$. Предположим, что $h : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $g : [a, b] \times [c, d] \rightarrow [0, \infty)$, $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow [0, \infty)$, $\psi : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, $\varphi : [c, d] \rightarrow [0, \infty)$ — ограниченные функции, удовлетворяющие условиям

- (i) функция h непрерывна в интервале (a, b) и $1 \leq h(x) < \infty$ для любого $x \in [a, b]$;
- (ii) функция g непрерывна на множестве $(a, b) \times (c, d)$, при любом $y \in [c, d]$ функция $g(\cdot, y) : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ является невозрастающей, кроме того, $1 \leq g(x, y) < \infty$ для любой точки $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$;
- (iii) функция f непрерывна на множестве $(a, b) \times (c, d)$, функции $f(x, \cdot) : [c, d] \rightarrow [0, \infty)$ и $f(\cdot, y) : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ являются невозрастающими при любом $x \in [a, b]$ и при любом $y \in [c, d]$ соответственно;
- (iv) функции ψ и φ являются неубывающими на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно. Кроме того, ψ непрерывна в точках a и b , $\psi(a) = 0$, а φ непрерывна в точках c и d , $\varphi(c) = 0$.

Тогда справедливо

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b h(x) d\psi^p(x) \int_c^d g(x, y) f^p(x, y) d\varphi^p(y) \right)^{1/p} &\geq \\ &\geq \left(\int_a^b h(x) d\psi^q(x) \int_c^d g(x, y) f^q(x, y) d\varphi^q(y) \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Доказательство. Применяем схему доказательства теоремы 5. А именно, фиксируем точку $x \in [a, b]$. По теореме 4, примененной для отрезка $[c, d]$, получаем

$$\left(\int_c^d g(x, y) f^p(x, y) d\varphi^p(y) \right)^{1/p} \geq F(x) := \left(\int_c^d g(x, y) f^q(x, y) d\varphi^q(y) \right)^{1/q}.$$

Таким образом, для повторного интеграла $P_p(h, g, f, \psi, \varphi)$ возникает неравенство

$$P_p(h, g, f, \psi, \varphi) \geq \int_a^b h(x) F^p(x) d\psi^p(x). \quad (29)$$

Из базовых свойств интегралов Римана–Стилтьеса и условий (ii)–(iv) теоремы 6 следует, что функция $F : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ является ограниченной, невозрастающей и, кроме того, непрерывной в интервале (a, b) . Следовательно, можем применить к интегралу из правой части (29) неравенство (23) при $f(x) \equiv F(x)$. Как результат будем иметь

$$P_p(h, g, f, \psi, \varphi) \geq P_q^{p/q}(h, g, f, \psi, \varphi). \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Stein E.M. *Singular integrals and differentiability properties of functions* (Princeton Univ. Press, 1970).
- [2] Stein E.M. and Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, 1971.
- [3] Heinig H. and Maligranda L. *Weighted inequalities for monotone and concave functions*, *Studia Math.* **116** (2), 133–165 (1995).
- [4] Barza S., Kolyada V., Soria J. *Sharp constants related to the triangle inequality in Lorentz spaces*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361**, 5555–5574 (2009).
- [5] Степанов В.Д., Шамбилова Г.Е. *Ограниченность квазилинейных интегральных операторов в конусе монотонных функций*, *Сиб. матем. журн.* **57** (5), 1131–1155 (2016).
- [6] Avkhadiev F.G., Kayumov I.R. *Comparison theorems of isoperimetric type for moments of compact sets*, *Collectanea Math.* **55** (1), 1–9 (2004).
- [7] Поля Г., Серё Г. *Изопериметрические неравенства математической физики* (Физматгиз, М., 1962).
- [8] Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications*. Monographs and studies in mathematics **7** (Pitman, London, 1980).
- [9] Hersch J. *Isoperimetric monotonicity — some properties and conjectures (connection between isoperimetric inequalities)*, *SIAM Rev.* **30** (4), 551–577 (1988).
- [10] Авхадиев Ф.Г. *Новые изопериметрические неравенства для моментов областей и жесткости кручения*, *Изв. вузов. Матем.* № 7, 3–11 (2004).
- [11] Salahudinov R.G. *Isoperimetric inequalities for L_p -norms of the distance function to the boundary*, *Учен. зап. Казанск. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки* **148** (2), 151–162 (2006).
- [12] Salahudinov R.G. *Refined inequalities for euclidian moments of a domain with respect to its boundary*, *SIAM J. Math. Anal.* **44** (4), 2949–2961 (2012).
- [13] Смирнов В.И. *Курс высшей математики*. Т. 5 (Физматлит, М., 1959).
- [14] Halmos, Paul R. *Measure theory*, **I** (Springer-Verlag, Berlin, New York, 1974).
- [15] Marshall A.W, Olkin I. *Inequalities: theory and its applications* (Academic Press, Inc., 1979).

Фарит Габидинович Авхадиев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: avkhadiev47@mail.ru

F.G. Avkhadiev

One-parameter monotone functionals connected with Stieltjes integrals

Abstract. Using Stieltjes integrals we define one-parameter functionals that are monotone as a function on the parameter. We prove generalizations of some results from the papers:

- 1) Heinig H. and Maligranda L. *Weighted inequalities for monotone and concave functions*, *Studia Mathematica* **116** (2), 133–165 (1995);
- 2) Avkhadiev F.G. and Kayumov I.R. *Comparison theorems of isoperimetric type for moments of compact sets*, *Collectanea Math.* **55** (1), 1–9 (2004).

In contrast to these papers we prove several theorems on monotonicity of integral functionals in the case when integrating functions are not absolutely continuous. In addition, we obtain applications to isoperimetric inequalities.

Keywords: Stieltjes integral, monotone function, integral inequality, norm in Lorentz space, isoperimetric inequality.

Farit Gabidinovich Avkhadiev

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: avkhadiev47@mail.ru