Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Асанова, О решении начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 4, 15–26

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-4-15-26>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:01:45

А.Т. АСАНОВА

О РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Исследуются вопросы существования единственного классического решения этой задачи и способы его построения. Путем введения новой неизвестной функции начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка сводится к эквивалентной нелокальной задаче с интегральным условием для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и с функциональным соотношением. На основе метода введения функциональных параметров установлены условия однозначной разрешимости эквивалентной нелокальной задачи. Предложены алгоритмы нахождения решения эквивалентной задачи и доказана их сходимость. Получены условия существования единственного классического решения начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка в терминах исходных данных.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка, начально-краевая задача, система интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа, нелокальная задача, интегральное условие, разрешимость, алгоритм.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-4-15-26

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка широко используются в качестве математической модели реальных процессов физики, химии, биологии, экологии и т.д. [1]. Исследованию вопросов разрешимости и свойств решений различных типов начально-краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка посвящены работы многих авторов, обзор и библиографию можно посмотреть в [2]. Тем не менее, проблема нахождения эффективных признаков существования классических решений начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных третьего порядка и способы построения приближенных решений рассматриваемых задач остаются открытыми и представляют интерес в прикладных задачах.

В работе [3] нелокальная задача с интегральным условием по временной переменной для системы гиперболических уравнений путем введения новых функций была сведена

Поступила в редакцию 15.03.2018, после доработки 15.03.2018. Принята к публикации 20.06.2018

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта № АР 05131220 по грантовому финансированию Министерства образования и науки Республики Казахстан.

к семейству краевых задач с интегральным условием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и с функциональным соотношением. На основе эквивалентности корректных разрешимостей исходной нелокальной задачи с интегральным условием и семейства краевых задач с интегральным условием были установлены критерии корректной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных. В работах [4]–[6] были исследованы нелокальные задачи с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений со смешанными производными. На основе метода введения функциональных параметров исследуемые задачи были сведены к задаче Гурса для системы гиперболических уравнений и двум краевым задачам с интегральным условием для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно параметров. Получены условия однозначной разрешимости вспомогательных краевых задач с интегральным условием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в терминах исходных данных. Построены алгоритмы нахождения приближенных решений нелокальных задач с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений со смешанными производными и доказана их сходимость. Установлены достаточные условия существования единственного классического решения рассматриваемой задачи в терминах коэффициентов системы уравнений и матриц граничного условия.

В настоящей работе вопросы существования, единственности и нахождения классических решений начально-краевых задач для системы уравнений в частных производных третьего порядка изучаются на основе введения дополнительных функциональных параметров [3]–[10]. В разделе 1 приведена постановка начально-краевой задачи для системы уравнений в частных производных третьего порядка. В разделе 2 начально-краевая задача для системы уравнений в частных производных третьего порядка сводится к эквивалентной нелокальной задаче с интегральным условием для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и с интегральным соотношением. В разделе 3 установлены условия существования единственного решения эквивалентной задачи и доказана сходимость построенного алгоритма. В разделе 4 получены условия существования единственного классического решения начально-краевой задачи для системы уравнений в частных производных третьего порядка в терминах исходных данных. Применение данного подхода позволяет распространить результаты работ [3]–[6] на новые классы задач для систем уравнений в частных производных высокого порядка.

В области $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ рассматривается начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} = A(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + B(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + D(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + E(t, x)u + f(t, x), \quad (1.1)$$

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \left\{ P_{2,j}(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} + P_{1,j}(x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + P_{0,j}(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right\} \Big|_{t=t_j} + \\ & + \sum_{j=1}^2 \left\{ S_{1,j}(x) \frac{\partial u(t_j, x)}{\partial x} + S_{0,j}(x) u(t_j, x) \right\} = \varphi_2(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.4)$$

где $u(t, x) = \text{col}(u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))$ — искомая функция, $n \times n$ -матрицы $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $D(t, x)$, $E(t, x)$ и n -вектор-функция $f(t, x)$ непрерывны на Ω , n -вектор-функция

$\varphi_1(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0, \omega]$, $n \times n$ -матрицы $P_{i,j}(x)$, $S_{k,j}(x)$, $i = \overline{0, 2}$, $k = 0, 1$, $j = 1, 2$, n -вектор-функция $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[0, \omega]$, $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, n -вектор-функция $\psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$. Также выполняется условие согласования данных: $\varphi_1(0) = \psi(0)$.

Пусть $\|u(t, x)\| = \max_{i=\overline{1, n}} |u_i(t, x)|$, $\|A(x, t)\| = \max_{i=\overline{1, n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t, x)|$. Через $C(\Omega, R^n)$ (соответственно $C([0, \omega], R^n)$, $C([0, T], R^n)$) обозначим пространство непрерывных на Ω функций $u : \Omega \rightarrow R^n$ ($\varphi : [0, \omega] \rightarrow R^n$, $\psi : [0, T] \rightarrow R^n$) с нормой $\|u\|_0 = \max_{(t, x) \in \Omega} \|u(t, x)\|$ ($\|\varphi\|_1 = \max_{x \in [0, \omega]} \|\varphi(x)\|$, $\|\psi\|_2 = \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|$).

Функция $u(t, x) \in C(\Omega, R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t^2 \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, называется классическим решением задачи (1.1)–(1.4), если она удовлетворяет системе (1.1) при всех $(t, x) \in \Omega$ и выполнены краевые условия (1.2)–(1.4).

2. СВЕДЕНИЕ К ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЗАДАЧЕ. СХЕМА МЕТОДА ВВЕДЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4). Введем новую функцию $w(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$. Тогда задача (1.1)–(1.4) перейдет к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial w}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial w}{\partial t} + C(t, x) w + D(t, x) \int_0^t \frac{\partial w(\tau, x)}{\partial x} d\tau + E(t, x) \int_0^t w(\tau, x) d\tau + g(t, x), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \left\{ P_{2,j}(x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial x} + P_{1,j}(x) \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} + P_{0,j}(x) w(t, x) \right\} \Big|_{t=t_j} + \\ & + \sum_{j=1}^2 \left\{ S_{1,j}(x) \int_0^{t_j} \frac{\partial w(\tau, x)}{\partial x} d\tau + S_{0,j}(x) \int_0^{t_j} w(\tau, x) d\tau \right\} = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$w(t, 0) = \dot{\psi}(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

где $g(t, x) = D(t, x) \dot{\varphi}_1(x) + E(t, x) \varphi_1(x) + f(t, x)$, $\varphi(x) = \varphi_2(x) - [S_{1,1}(x) + S_{1,2}(x)] \dot{\varphi}_1(x) - [S_{0,1}(x) + S_{0,2}(x)] \varphi_1(x)$, а в условии (2.3) учтены условия согласования данных.

С учетом условия (1.2) следующие представления связывают функцию $u(t, x)$ и ее производную $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ с функцией $w(t, x)$ и ее производной $\frac{\partial w(t, x)}{\partial x}$:

$$u(t, x) = \varphi_1(x) + \int_0^t w(\tau, x) d\tau, \quad (t, x) \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x) + \int_0^t \frac{\partial w(\tau, x)}{\partial x} d\tau, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (2.5)$$

В системе (2.1) вместо функций $u(t, x)$ и $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ использованы интегральные представления (2.4) и (2.5) соответственно, а в условиях (2.2) — их значения при $t = t_j$, $j = 1, 2$.

Функция $w(t, x) \in C(\Omega, R^n)$, имеющая частные производные $\frac{\partial w(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial w(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, называется классическим решением задачи (2.1)–(2.3), если она удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа (2.1), нелокальному условию (2.2), краевому условию (2.3).

Если $u^*(t, x)$ является решением задачи (1.1)–(1.4), то функция $w^*(t, x)$, определяемая равенством $w^*(t, x) = \frac{\partial u^*(t, x)}{\partial t}$, будет решением задачи (2.1)–(2.3). Наоборот, если функция $w^{**}(t, x)$ является решением задачи (2.1)–(2.3), то функция $u^{**}(t, x)$, определяемая из интегрального представления $u^{**}(t, x) = \varphi_1(x) + \int_0^t w^{**}(\tau, x) d\tau$, будет решением задачи (1.1)–(1.4).

Задача (2.1)–(2.3) является нелокальной задачей с интегральным условием для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка. Интегральные соотношения (2.4), (2.5) позволяют определить функцию $u(t, x)$ — решение исходной задачи (1.1)–(1.4) — и ее производную $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$.

Нелокальные задачи с интегральным условием исследовались в работах многих авторов [2]–[6], [11]–[13]. Различными методами были установлены условия разрешимости и предложены способы нахождения их решений. В работах [12], [13] нелокальная задача с неоднородными интегральными условиями для гиперболического уравнения второго порядка путем введения новой функции была сведена к нелокальной задаче с однородными интегральными условиями для нагруженного гиперболического уравнения второго порядка. На основе свойств решений указанного класса задач были получены условия разрешимости исходной неоднородной задачи.

В работе [3] задача (2.1)–(2.3) была исследована для случая $D(t, x) = 0$, $E(t, x) = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$. С помощью новых функций исследуемая задача была сведена к семейству краевых задач с интегральным условием для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и с функциональным соотношением. На основе эквивалентности корректных разрешимостей исходной нелокальной задачи с интегральным условием и семейства краевых задач с интегральным условием были установлены критерии корректной разрешимости исследуемой задачи в терминах исходных данных.

Введение новой функции в виде производной по времени от искомой неизвестной функции позволило свести исходную начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений третьего порядка к нелокальной задаче с интегральным условием для системы интегро-дифференциальных гиперболических уравнений второго порядка. Кроме того, интегральные слагаемые в системе уравнений являются вольтерровыми интегралами, что позволяет без ограничения общности применить методы решения и распространить результаты по нелокальным задачам для системы гиперболических уравнений второго порядка с интегральным условием на данный класс задач.

В данном разделе на основе метода введения функциональных параметров без разбиения области и результатов работы [3] будут построены алгоритмы нахождения решения задачи (2.1)–(2.3).

Обозначим $\lambda(x) = w(0, x)$ и в задаче (2.1)–(2.3) произведем замену функции $w(t, x)$: $w(t, x) = \tilde{w}(t, x) + \lambda(x)$, где $\tilde{w}(t, x)$ — неизвестная функция.

Тогда задача (2.1)–(2.3) перейдет к следующей задаче с функциональным параметром:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t \partial x} = & A(t, x) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + C(t, x) \tilde{w} + D(t, x) \int_0^t \frac{\partial \tilde{w}(\tau, x)}{\partial x} d\tau + E(t, x) \int_0^t \tilde{w}(\tau, x) d\tau + \\ & + [A(t, x) + D(t, x)t] \dot{\lambda}(x) + [C(t, x) + E(t, x)t] \lambda(x) + g(t, x), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\tilde{w}(0, x) = 0, \quad x \in [0, \omega], \quad (2.7)$$

$$\tilde{w}(t, 0) = \dot{\psi}(t) - \lambda(0), \quad t \in [0, T]; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \left\{ P_{2,j}(x) \frac{\partial \tilde{w}(t_j, x)}{\partial x} + P_{2,j}(x) \dot{\lambda}(x) + P_{1,j}(x) \frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_j} + P_{0,j}(x) \tilde{w}(t_j, x) + P_{0,j}(x) \lambda(x) \right\} + \\
& + \sum_{j=1}^2 \left\{ S_{1,j}(x) \int_0^{t_j} \left[\frac{\partial \tilde{w}(\tau, x)}{\partial x} + \dot{\lambda}(x) \right] d\tau + S_{0,j}(x) \int_0^{t_j} [\tilde{w}(\tau, x) + \lambda(x)] d\tau \right\} = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega].
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Из условия согласования данных в точке $(0, 0)$ получим $\lambda(0) = \dot{\psi}(0)$.

Решением задачи (2.6)–(2.9) будем называть пару функций $\{\tilde{w}(t, x), \lambda(x)\}$, где функция $\tilde{w}(t, x) \in C(\Omega, R^n)$ имеет частные производные $\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial x} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial t} \in C(\Omega, R^n)$, $\frac{\partial^2 \tilde{w}(t, x)}{\partial t \partial x} \in C(\Omega, R^n)$, функция $\lambda(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0, \omega]$, которые удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа (2.6), условиям на характеристиках (2.7), (2.8) и функциональным соотношениям (2.9).

Задачи (2.1)–(2.3) и (2.6)–(2.9) эквивалентны. Если функция $w^*(t, x)$ является решением задачи (2.1)–(2.3), то пара функций $\{\tilde{w}^*(t, x), \lambda^*(x)\}$, где $\tilde{w}^*(t, x) = w^*(t, x) - \lambda^*(x)$, $\lambda^*(x) = w^*(0, x)$, будет решением задачи (2.6)–(2.10). Обратное также верно. Если пара функций $\{\tilde{w}^{**}(t, x), \lambda^{**}(x)\}$ является решением задачи (2.6)–(2.9), то функция $w^{**}(t, x)$, определяемая равенством $w^{**}(t, x) = \tilde{w}^{**}(t, x) + \lambda^{**}(x)$, где $w^{**}(0, x) = \lambda^{**}(x)$, будет решением задачи (2.1)–(2.3).

Задача (2.6)–(2.8) при фиксированном $\lambda(x)$ является задачей Гурса относительно функции $\tilde{w}(t, x)$ в области Ω . Неизвестный параметр $\lambda(x)$ определяется из функционального соотношения (2.9) вместе с условием согласования.

Задача Гурса (2.6)–(2.8) будет эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial x} = \int_0^t \left\{ A \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + B \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} + C \tilde{w} + D \int_0^\tau \frac{\partial \tilde{w}(\tau_1, x)}{\partial x} d\tau_1 + E \int_0^\tau \tilde{w}(\tau_1, x) d\tau_1 + \right. \\
\left. + [A + D\tau] \dot{\lambda}(x) + [C + E\tau] \lambda(x) + g \right\} (\tau, x) d\tau, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial t} = \ddot{\psi}(t) + \int_0^x \left\{ A \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi} + B \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + C \tilde{w} + D \int_0^t \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi} (\tau, \xi) d\tau + E \int_0^t \tilde{w}(\tau, \xi) d\tau + \right. \\
\left. + [A + Dt] \dot{\lambda}(\xi) + [C + Et] \lambda(\xi) + g \right\} (t, \xi) d\xi, \tag{2.11}
\end{aligned}$$

$$\tilde{w}(t, x) = \dot{\psi}(t) - \dot{\psi}(0) + \int_0^x \frac{\partial \tilde{w}(t, \xi)}{\partial \xi} d\xi. \tag{2.12}$$

Подставив в (2.9) вместо $\frac{\partial \tilde{w}(t_j, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{w}(\tau, x)}{\partial x}$ соответствующие выражения из представления (2.10), получим

$$Q_1(x) \dot{\lambda}(x) = Q_2(x) \lambda(x) + G\left(x, \tilde{w}, \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}\right) + F(x), \quad x \in [0, \omega], \tag{2.13}$$

где

$$Q_1(x) = \sum_{j=1}^2 \left[P_{2,j}(x) \left\{ I + \int_0^{t_j} [A + D\tau] (\tau, x) d\tau \right\} + S_{1,j}(x) \left\{ t_j I + \int_0^{t_j} \int_0^\tau [A + D\tau_1] (\tau_1, x) d\tau_1 d\tau \right\} \right],$$

$$\begin{aligned}
Q_2(x) = & - \sum_{j=1}^2 \left[P_{0,j}(x) + P_{2,j}(x) \int_0^{t_j} [C + E\tau](\tau, x) d\tau + S_{0,j}(x)t_j + \right. \\
& \left. + S_{1,j}(x) \int_0^{t_j} \int_0^\tau [C + E\tau_1](\tau_1, x) d\tau_1 d\tau \right], \\
G\left(x, \tilde{w}, \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}\right) = & - \sum_{j=1}^2 \left[P_{2,j}(x) \int_0^{t_j} \left\{ A \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + B \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau} + C \tilde{w} + D \int_0^\tau \frac{\partial \tilde{w}(\tau_1, x)}{\partial x} d\tau_1 + \right. \right. \\
& + E \int_0^\tau \tilde{w}(\tau_1, x) d\tau_1 \left. \right\} (\tau, x) d\tau + P_{1,j}(x) \frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=t_j} + P_{0,j}(x) \tilde{w}(t_j, x) + \\
& + S_{1,j}(x) \int_0^{t_j} \int_0^\tau \left\{ A \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + B \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tau_1} + C \tilde{w} + D \int_0^{\tau_1} \frac{\partial \tilde{w}(\tau_2, x)}{\partial x} d\tau_2 + \right. \\
& \left. + E \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_2, x) d\tau_2 \right\} (\tau_1, x) d\tau_1 d\tau + S_{0,j}(x) \int_0^{t_j} \tilde{w}(\tau, x) d\tau \Big], \\
F(x) = & \varphi(x) - \sum_{j=1}^2 \left[P_{2,j}(x) \int_0^{t_j} g(\tau, x) d\tau + S_{1,j}(x) \int_0^{t_j} \int_0^\tau g(\tau_1, x) d\tau_1 d\tau \right],
\end{aligned}$$

I — единичная матрица размерности n .

Соотношение (2.13) вместе с условием

$$\lambda(0) = \dot{\psi}(0) \quad (2.14)$$

является задачей Коши для системы дифференциальных уравнений относительно параметра $\lambda(x)$.

Таким образом, для определения неизвестных функций $\tilde{w}(t, x)$ и $\lambda(x)$ имеем замкнутую систему уравнений (2.10)–(2.14).

Для отыскания $\tilde{w}(t, x)$ и $\lambda(x)$ применяется итерационный процесс и решение задачи (2.6)–(2.9) находится по следующему алгоритму.

Шаг 0. 1) Предположим, что матрица $Q_1(x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$. Полагая в правой части системы уравнений (2.13) $\tilde{w}(t, x) = \dot{\psi}(t) - \dot{\psi}(0)$, $\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial t} = \ddot{\psi}(t)$ и решая задачу Коши (2.13), (2.14), находим $\lambda^{(0)}(x)$ и ее производную $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$ для всех $x \in [0, \omega]$. 2) Решая задачу Гурса (2.6)–(2.8) при $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(0)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$, из системы интегральных уравнений (2.10)–(2.12) находим непрерывные на Ω функцию $w^{(0)}(t, x)$ и ее производные $\frac{\partial w^{(0)}(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial w^{(0)}(t, x)}{\partial t}$ для всех $(t, x) \in \Omega$.

Шаг 1. 1) Полагая в правой части системы (2.13) $\tilde{w}(t, x) = w^{(0)}(t, x)$, $\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial w^{(0)}(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial w^{(0)}(t, x)}{\partial t}$ и решая задачу Коши (2.13), (2.14), находим $\lambda^{(1)}(x)$ и ее производную $\dot{\lambda}^{(1)}(x)$ для всех $x \in [0, \omega]$.

2) Решая задачу Гурса (2.6)–(2.8) при $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(1)}(x)$, $\lambda(x) = \lambda^{(1)}(x)$, из системы интегральных уравнений (2.10)–(2.12) находим непрерывные на Ω функцию $w^{(1)}(t, x)$ и ее производные $\frac{\partial w^{(1)}(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial w^{(1)}(t, x)}{\partial t}$ для всех $(t, x) \in \Omega$.

И т. д.

Шаг k . 1) Полагая в правой части системы (2.13) $\tilde{w}(t, x) = w^{(k-1)}(t, x)$, $\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial w^{(k-1)}(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{w}(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial w^{(k-1)}(t, x)}{\partial t}$ и решая задачу Коши (2.13), (2.14), находим $\lambda^{(k)}(x)$ и ее производную $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$ для всех $x \in [0, \omega]$. 2) Решая задачу Гурса (2.6)–(2.8) при $\dot{\lambda}(x) = \dot{\lambda}^{(k)}(x)$,

$\lambda(x) = \lambda^{(k)}(x)$, из системы интегральных уравнений (2.10)–(2.12) находим непрерывные на Ω функцию $w^{(k)}(t, x)$ и ее производные $\frac{\partial w^{(k)}(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial w^{(k)}(t, x)}{\partial t}$ для всех $(t, x) \in \Omega$.
 $k = 1, 2, \dots$

Введение дополнительного параметра $\lambda(x)$ позволило разбить на два этапа процесс нахождения решения задачи (2.1)–(2.3): 1) определение функции $\tilde{w}(t, x)$ из задачи Гурса для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа (2.6)–(2.8); 2) определение функции $\lambda(x)$ из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.13), (2.14).

3. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ (2.6)–(2.9)

В данном разделе будут приведены утверждения о существовании единственного решения задачи (2.6)–(2.9).

Предположим, что матрица $Q_1(x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$. Пусть

$$\begin{aligned} \alpha &= \max_{(t,x) \in \Omega} \|A(t, x)\|, \quad \beta = \max_{(t,x) \in \Omega} \|B(t, x)\|, \quad \gamma = \max_{(t,x) \in \Omega} \|C(t, x)\|, \\ \theta &= \max_{(t,x) \in \Omega} t \|D(t, x)\|, \quad \sigma = \max_{(t,x) \in \Omega} t \|E(t, x)\|, \quad H = \alpha + \beta + \gamma + \theta + \sigma, \\ \varkappa &= \max_{x \in [0, \omega]} \|[Q_1(x)]^{-1}\|, \quad \alpha_0 = \max_{x \in [0, \omega]} \|[Q_1(x)]^{-1} Q_2(x)\|, \quad H_1 = \max(T, \omega) [\alpha + \gamma + \theta + \sigma], \\ p_{k,j} &= \max_{x \in [0, \omega]} \|P_{k,j}(x)\|, \quad s_{l,j} = \max_{x \in [0, \omega]} \|S_{l,j}(x)\|, \quad k = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad l = 0, 1. \end{aligned}$$

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (2.6)–(2.9) дает

Теорема 1. Пусть матрица $Q_1(x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполняется неравенство

$$(i) \quad q(t_1, t_2) = \varkappa \cdot \max \left[\omega e^{\alpha_0 \omega}, \alpha_0 \omega e^{\alpha_0 \omega} + 1 \right] H_1 \sum_{j=1}^2 \left[\left\{ p_{2,j} t_j + s_{1,j} \frac{t_j^2}{2} \right\} H + p_{1,j} + p_{0,j} + s_{0,j} t_j \right] e^{H(\omega + t_j)} < 1.$$

Тогда задача (2.6)–(2.9) имеет единственное решение.

Доказательство. По условию теоремы матрица $Q_1(x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$. Тогда из систем уравнений (2.13), (2.14), используя 0-шаг алгоритма, находим $\lambda^{(0)}(x)$ и $\dot{\lambda}^{(0)}(x)$ для всех $x \in [0, \omega]$. Для них справедливы оценки

$$\|\lambda^{(0)}(x)\| \leq (1 + \omega \varkappa a_0) \max(1, T) e^{\alpha_0 x} \max(\|\dot{\psi}\|_2, \|\ddot{\psi}\|_2, \|\varphi\|_1, \|g\|_0),$$

$$\|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\| \leq [\alpha_0 (1 + \omega \varkappa a_0) \max(1, T) e^{\alpha_0 x} + \varkappa a_0] \max(\|\dot{\psi}\|_2, \|\ddot{\psi}\|_2, \|\varphi\|_1, \|g\|_0),$$

где $a_0 = 1 + \sum_{j=1}^2 \left[(p_{2,j} t_j (\beta + \gamma + \sigma + 1) + p_{1,j} + s_{1,j} \frac{t_j^2}{2} (\beta + \gamma + \sigma + 1) + p_{0,j} s_{0,j} t_j) \right]$. Решая систему интегральных уравнений (2.10)–(2.12) при найденных значениях параметра, находим $\frac{\partial \tilde{w}^{(0)}(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{w}^{(0)}(t, x)}{\partial t}$, $\tilde{w}^{(0)}(t, x)$ для всех $x \in [0, \omega]$.

Имеют место оценки

$$\left\| \frac{\partial \tilde{w}^{(0)}(t, x)}{\partial x} \right\| \leq \max(T, \omega) M e^{H(x+t)},$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{w}^{(0)}(t, x)}{\partial t} \right\| \leq \max(T, \omega) M e^{H(x+t)},$$

$$\|\tilde{w}^{(0)}(t, x)\| \leq \max(T, \omega) M e^{H(x+t)},$$

где $M = (\alpha + \theta) \max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(0)}(x)\| + (\gamma + \sigma) \max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(0)}(x)\| + \|g\|_0$.

Последовательно из k -го и $(k+1)$ -го шагов алгоритма определяя функции $\lambda^{(k)}(x)$, $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$, $\frac{\partial \tilde{w}^{(k)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{w}^{(k)}(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{w}^{(k)}(t,x)$, $\lambda^{(k+1)}(x)$, $\dot{\lambda}^{(k+1)}(x)$, $\frac{\partial \tilde{w}^{(k+1)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{w}^{(k+1)}(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{w}^{(k+1)}(t,x)$ и оценивая соответствующие разности, получим

$$\|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\| \leq \varkappa e^{\alpha_0 x} \max_{x \in [0, \omega]} \int_0^x \|G(\xi, \cdot, \cdot, \cdot)\| d\xi, \quad (3.1)$$

$$\|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(k)}(x)\| \leq \alpha_0 e^{\alpha_0 x} \varkappa \max_{x \in [0, \omega]} \int_0^x \|G(\xi, \cdot, \cdot, \cdot)\| d\xi + \varkappa \|G(x, \cdot, \cdot, \cdot)\|, \quad (3.2)$$

где $G(x, \cdot, \cdot, \cdot) = G\left(x, \tilde{w}^{(k)} - \tilde{w}^{(k-1)}, \frac{\partial \tilde{w}^{(k)}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}^{(k-1)}}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{w}^{(k)}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}^{(k-1)}}{\partial t}\right)$.

$$\left\| \frac{\partial \tilde{w}^{(k+1)}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{w}^{(k)}(t,x)}{\partial x} \right\| \leq \max(T, \omega) \{\cdot\} e^{H(x+t)}, \quad (3.3)$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{w}^{(k+1)}(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{w}^{(k)}(t,x)}{\partial t} \right\| \leq \max(T, \omega) \{\cdot\} e^{H(x+t)}, \quad (3.4)$$

$$\|\tilde{w}^{(k+1)}(t,x) - \tilde{w}^{(k)}(t,x)\| \leq \max(T, \omega) \{\cdot\} e^{H(x+t)}, \quad (3.5)$$

где $\{\cdot\} = \left\{ (\alpha + \theta) \max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(k)}(x)\| + (\gamma + \sigma) \max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\| \right\}$.

Пусть

$$\Delta_{k+1} = \max \left(\max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^{(k+1)}(x) - \lambda^{(k)}(x)\|, \max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^{(k+1)}(x) - \dot{\lambda}^{(k)}(x)\| \right).$$

Тогда из соотношений (3.1), (3.2) с учетом оценок (3.3)–(3.5) получим основное неравенство

$$\Delta_{k+1} \leq q(t_1, t_2) \Delta_k. \quad (3.6)$$

По условию теоремы $q(t_1, t_2) < 1$. Отсюда вытекает сходимость последовательности Δ_k при $k \rightarrow \infty$ к Δ_* . Это дает равномерную сходимость последовательностей $\lambda^{(k)}(x)$, $\dot{\lambda}^{(k)}(x)$ при $k \rightarrow \infty$ соответственно к $\lambda^*(x)$, $\dot{\lambda}^*(x)$. Функция $\lambda^*(x)$ является непрерывной и непрерывно дифференцируемой на $[0, \omega]$. На основе оценок (3.3)–(3.5) установим равномерную сходимость последовательностей $\frac{\partial \tilde{w}^{(k)}(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{w}^{(k)}(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{w}^{(k)}(t,x)$ относительно $(t, x) \in \Omega$ к функциям $\frac{\partial \tilde{w}^*(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{w}^*(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{w}^*(t,x)$ соответственно. Очевидно, функции $\frac{\partial \tilde{w}^*(t,x)}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{w}^*(t,x)}{\partial t}$, $\tilde{w}^*(t,x)$ являются непрерывными на Ω . Пара функций $\{\tilde{w}^*(t,x), \lambda^*(x)\}$ является решением задачи (2.6)–(2.9).

Докажем единственность решения задачи (2.6)–(2.9). Пусть существует два решения — пара функций $\{\tilde{w}^*(t,x), \lambda^*(x)\}$ и $\{\tilde{w}^{**}(t,x), \lambda^{**}(x)\}$. Обозначим

$$\tilde{\Delta} = \max \left(\max_{x \in [0, \omega]} \|\lambda^*(x) - \lambda^{**}(x)\|, \max_{x \in [0, \omega]} \|\dot{\lambda}^*(x) - \dot{\lambda}^{**}(x)\| \right).$$

Проведя вычисления, аналогично (3.1)–(3.5) получим

$$\tilde{\Delta} \leq q(t_1, t_2) \tilde{\Delta}. \quad (3.7)$$

По условию теоремы $q(t_1, t_2) < 1$. Тогда неравенство (3.7) имеет место только при $\tilde{\Delta} \equiv 0$, отсюда получаем $\lambda^*(x) = \lambda^{**}(x)$ и $\tilde{w}^*(t,x) = \tilde{w}^{**}(t,x)$. Таким образом, решение задачи (2.6)–(2.9) единственно. $\square$

Условия теоремы 1 одновременно с существованием единственного решения задачи (2.6)–(2.9) обеспечивают сходимость последовательности $\{\tilde{w}^{(k)}(t, x), \lambda^{(k)}(x)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, определяемой по предложенному алгоритму.

4. УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ (1.1)–(1.4)

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.3), эквивалентную задаче (1.1)–(1.4). По паре функций $\{\tilde{w}^*(t, x), \lambda^*(x)\}$ — решение задачи (2.6)–(2.9) — составим сумму

$$w^*(t, x) = \tilde{w}^*(t, x) + \lambda^*(x), \quad (t, x) \in \Omega.$$

Функция $w^*(t, x)$ непрерывна на Ω , имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial w^*(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial w^*(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 w^*(t, x)}{\partial x \partial t}$ на Ω и является решением задачи (2.1)–(2.3).

Из эквивалентности задач (2.1)–(2.3) и (2.6)–(2.9) следует

Теорема 2. Пусть

1) $n \times n$ -матрицы $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $D(t, x)$, $E(t, x)$ и n -вектор-функция $g(t, x)$ непрерывны на Ω ;

2) n -вектор-функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0, \omega]$, $n \times n$ -матрицы $P_{i,j}(x)$, $S_{k,j}(x)$, $i = \overline{0, 2}$, $k = 0, 1$, $j = 1, 2$, непрерывны на $[0, \omega]$, n -вектор-функция $\psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$;

3) матрица $Q_1(x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполнено условие (i) теоремы 1. Тогда задача (2.1)–(2.3) имеет единственное классическое решение.

Так как задачи (2.1)–(2.3) и (1.1)–(1.4) эквивалентны и $g(t, x) = D(t, x)\dot{\varphi}_1(x) + E(t, x)\varphi_1(x) + f(t, x)$ и $\varphi(x) = \varphi_2(x) - [S_{1,1}(x) + S_{1,2}(x)]\dot{\varphi}_1(x) - [S_{0,1}(x) + S_{0,2}(x)]\varphi_1(x)$, $\varphi_1(0) = \psi(0)$, то справедлива

Теорема 3. Пусть

1) $n \times n$ -матрицы $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $D(t, x)$, $E(t, x)$ и n -вектор-функция $f(t, x)$ непрерывны на Ω ;

2) n -вектор-функция $\varphi_1(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0, \omega]$, $n \times n$ -матрицы $P_{i,j}(x)$, $S_{k,j}(x)$, $i = \overline{0, 2}$, $k = 0, 1$, $j = 1, 2$, n -вектор-функция $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[0, \omega]$, n -вектор-функция $\psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и выполнено условие согласования данных $\varphi_1(0) = \psi(0)$;

3) матрица $Q_1(x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполнено условие (i) теоремы 1. Тогда начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка (1.1)–(1.4) имеет единственное классическое решение $u^*(t, x)$.

Доказательство. Рассмотрим нелокальную задачу с интегральным условием для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа (2.1)–(2.3). При выполнении условий теоремы 2 задача (2.1)–(2.3) имеет единственное классическое решение $w^*(t, x)$, т. е. выполняются равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t \partial x} = & A(t, x) \frac{\partial w^*}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial w^*}{\partial t} + C(t, x) w^* + \\ & + D(t, x) \int_0^t \frac{\partial w^*(\tau, x)}{\partial x} d\tau + E(t, x) \int_0^t w^*(\tau, x) d\tau + g(t, x), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ P_{2,j}(x) \frac{\partial w^*(t, x)}{\partial x} + P_{1,j}(x) \frac{\partial w^*(t, x)}{\partial t} + P_{0,j}(x) w^*(t, x) \right\} \Big|_{t=t_j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \left\{ S_{1,j}(x) \int_0^{t_j} \frac{\partial w^*(\tau, x)}{\partial x} d\tau + S_{0,j}(x) \int_0^{t_j} w^*(\tau, x) d\tau \right\} = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (4.2)$$

$$w^*(t, 0) = \dot{\psi}(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.3)$$

Определим функцию

$$u^*(t, x) = \varphi_1(x) + \int_0^t w^*(\tau, x) d\tau, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (4.4)$$

Свойства функций $\varphi_1(x)$ и $w^*(t, x)$ позволяют продифференцировать соотношение (4.4) по x и t :

$$\frac{\partial u^*(t, x)}{\partial x} = \dot{\varphi}_1(x) + \int_0^t \frac{\partial w^*(\tau, x)}{\partial x} d\tau, \quad (t, x) \in \Omega, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial u^*(t, x)}{\partial t} = w^*(t, x), \quad (t, x) \in \Omega. \quad (4.6)$$

С учетом представлений функций $g(t, x) = D(t, x)\dot{\varphi}_1(x) + E(t, x)\varphi_1(x) + f(t, x)$ и $\varphi(x) = \varphi_2(x) - [S_{1,1}(x) + S_{1,2}(x)]\dot{\varphi}_1(x) - [S_{0,1}(x) + S_{0,2}(x)]\varphi_1(x)$ из (4.1)–(4.3) получим

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial w^*}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial w^*}{\partial t} + C(t, x) w^* + D(t, x) \left[\dot{\varphi}_1(x) + \int_0^t \frac{\partial w^*(\tau, x)}{\partial x} d\tau \right] +$$

$$+ E(t, x) \left[\varphi_1(x) + \int_0^t w^*(\tau, x) d\tau \right] + f(t, x), \quad (4.7)$$

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ P_{2,j}(x) \frac{\partial w^*(t, x)}{\partial x} + P_{1,j}(x) \frac{\partial w^*(t, x)}{\partial t} + P_{0,j}(x) w^*(t, x) \right\} \Big|_{t=t_j} + \sum_{j=1}^2 \left\{ S_{1,j}(x) \left[\dot{\varphi}_1(x) + \int_0^{t_j} \frac{\partial w^*(\tau, x)}{\partial x} d\tau \right] + \right.$$

$$\left. + \int_0^{t_j} \frac{\partial w^*(\tau, x)}{\partial x} d\tau \right] + S_{0,j}(x) \left[\varphi_1(x) + \int_0^{t_j} w^*(\tau, x) d\tau \right] \right\} = \varphi_2(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (4.8)$$

$$w^*(t, 0) = \dot{\psi}(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.9)$$

Заменяя выражения в квадратных скобках соответствующими представлениями из (4.5), (4.4), а также учитывая равенство (4.6), из соотношений (4.7) и (4.8) имеем

$$\frac{\partial^3 u^*}{\partial t^2 \partial x} = A(t, x) \frac{\partial^2 u^*}{\partial t \partial x} + B(t, x) \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + C(t, x) \frac{\partial u^*}{\partial t} + D(t, x) \frac{\partial u^*}{\partial x} + E(t, x) u^* + f(x, t), \quad (4.10)$$

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ P_{2,j}(x) \frac{\partial^2 u^*(t, x)}{\partial t \partial x} + P_{1,j}(x) \frac{\partial^2 u^*(t, x)}{\partial t^2} + P_{0,j}(x) \frac{\partial u^*(t, x)}{\partial t} \right\} \Big|_{t=t_j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^2 \left\{ S_{1,j}(x) \frac{\partial u^*(t_j, x)}{\partial x} + S_{0,j}(x) u^*(t_j, x) \right\} = \varphi_2(x), \quad x \in [0, \omega]. \quad (4.11)$$

Предварительно заменив t на τ в соотношении (4.9), проинтегрируем его по τ от 0 до t :

$$\int_0^t w^*(\tau, 0) d\tau = \int_0^t \dot{\psi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Учитывая представление (4.4) при $x = 0$, отсюда получим $u^*(t, 0) - \varphi_1(0) = \psi(t) - \psi(0)$, $t \in [0, T]$. Из условия согласования данных $\varphi_1(0) = \psi(0)$ следует

$$u^*(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4.12)$$

Кроме того, из интегрального соотношения (4.4) при $t = 0$ имеем

$$u^*(0, x) = \varphi_1(x), \quad x \in [0, \omega]. \quad (4.13)$$

Таким образом, функция $u^*(t, x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка (4.10), условиям (4.11), (4.12) и (4.13), т.е. установили, что функция $u^*(t, x)$ является решением задачи (1.1)–(1.4). Единственность решения задачи (1.1)–(1.4) следует из единственности решения задачи (2.1)–(2.3) и представления (4.4). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] De Angelis M., Fiore G. *Existence and uniqueness of solutions of a class of third order dissipative problems with various boundary conditions describing the Josephson effect*, J. Math. Anal. and Appl. **404** (2), 477–490 (2013).
- [2] Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных* (Наука, М., 2006).
- [3] Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. *Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations*, J. Math. Anal. and Appl. **402** (1), 167–178 (2013).
- [4] Асанова А.Т. *Нелокальная задача с интегральными условиями для систем гиперболических уравнений в характеристическом прямоугольнике*, Изв. вузов. Матем., № 5, 11–25 (2017).
- [5] Assanova A.T. *Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions*, Electronic J. Diff. Equat. **2017** (170), 1–12 (2017).
- [6] Асанова А.Т. *О нелокальной задаче с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения **54** (2), 202–214 (2018).
- [7] Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. *Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений*, Ж. вычислит. матем. и матем. физ. **42** (11), 1673–1685 (2002).
- [8] Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. *Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения **39** (10), 1343–1354 (2003).
- [9] Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. *Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения **41** (3), 337–346 (2005).
- [10] Асанова А.Т. *Признаки однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений со смешанными производными*, Изв. вузов. Матем., № 5, 3–21 (2016).
- [11] Kiguradze T.I. *Some boundary value problems for systems of linear partial differential equations of hyperbolic type*, Mem. Diff. Equat. Math. Phys. **1**, 1–144 (1994).
- [12] Pulkina L.S. *A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations*, Electronic J. Diff. Equat. **1999** (45), 1–6 (1999).
- [13] Пулькина Л.С. *Нелокальная задача для нагруженного гиперболического уравнения*, Тр. МИАН **236** (1), 298–303 (2002).

Анар Турмаганбеткызы Асанова,

Институт математики и математического моделирования,

ул. Пушкина, 125, г. Алматы, 050010, Казахстан,

e-mail: assanova@math.kz; anarasanova@list.ru

A.T. Assanova

**On solving initial-boundary value problem for system of equations
in partial derivatives of the third order**

Abstract. We consider the initial-boundary value problem for the system of partial differential equations of third order. We investigate the questions of an existence unique classical solution to the considering problem and approaches of its construction. By the introduction of new unknown function the initial-boundary value problem for the system of partial differential equations of third order is reduced to an equivalent nonlocal problem with integral condition for the system of integro-differential equations of hyperbolic type and functional relation. Conditions of a unique solvability to the nonlocal problem with integral condition for the system of integro-differential equations hyperbolic type and functional relation are obtained based on the method of introduction functional parameters. Algorithms for finding a solution of the equivalent problem are proposed and their convergence are proved. Conditions of the existence unique classical solution to the initial-boundary value problem for the system of partial differential equations of third order are established in the terms of initial data.

Keywords: system of partial differential equations of third order, initial-boundary value problem, system of integro-differential equations of hyperbolic type, nonlocal problem, integral condition, solvability, algorithm.

Anar Turmaganbetkyzy Assanova,

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,

125 Pushkin str., Almaty, 050010, Kazakhstan,

e-mail: assanova@math.kz; anarasanova@list.ru