Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, О стационарных подгруппах компактных однородных пространств, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 4, 36–51

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-4-36-51>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:57:01

В.В. ГОРБАЦЕВИЧ

О СТАЦИОНАРНЫХ ПОДГРУППАХ КОМПАКТНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Аннотация. Изучаются некоторые специальные свойства стационарных подгрупп и их алгебр Ли для компактных однородных пространств. Рассмотрены случаи разложимых стационарных подалгебр Ли и стационарных подалгебр малой размерности. Подробно рассмотрен случай несократимых транзитивных действий групп Ли.

Ключевые слова: группа Ли, однородное пространство, стационарная подгруппа, несократимое действие.

УДК: 512.816

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-4-36-51

ВВЕДЕНИЕ

В этой статье будем рассматривать компактные однородные пространства $M = G/H$, где транзитивная группа Ли G будет обычно предполагаться односвязной, а ее действие на M — локально эффективным. Многие используемые ниже сведения о таких однородных пространствах можно найти в [1]. Сведения о строении групп и алгебр Ли, используемые ниже, можно найти в обзоре [2]. Результаты данной статьи можно перенести на более общие — псевдокомпактные — однородные пространства [3].

Цель данной статьи — изучение некоторых специальных свойств стационарной подгруппы $H \subset G$. Напомним, что замкнутая подгруппа, фактор-пространство по которой компактно, называется равномерной (иногда используют термин “кокомпактная”). Особое внимание будет уделено случаям, когда размерность подгруппы H невелика.

Группы Ли будем обозначать заглавными латинскими буквами, а их алгебры Ли — соответствующими строчными латинскими буквами (иногда не указывая явно это соответствие обозначений).

Для группы Ли G будет использоваться ее разложение Леви $G = S \cdot R$ — полупрямое (если группа Ли G односвязна) произведение радикала R и полупростой части (фактора Леви) S группы Ли G . Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G рассматривается соответствующее разложение Леви $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}$, а через $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{s}$ будем обозначать естественный эпиморфизм с ядром $\mathfrak{r}$.

Существует одно фундаментальное алгебраическое утверждение о стационарной подгруппе произвольного компактного однородного пространства. Оно было доказано А.Л. Онищиком [4] как обобщение подобного утверждения Ж. Титса о комплексных однородных пространствах [5]. Сформулируем этот результат после напомним некоторых понятий.

Алгебра Ли g называется треугольной (другие названия — типа R , вполне разрешимая), если все собственные значения линейных операторов ad_X ($X \in g$) присоединенного представления вещественны. Как известно, все максимальные треугольные подалгебры Ли в фиксированной алгебре Ли между собой сопряжены. Аналогично, группа Ли G называется треугольной, если ее алгебра Ли треугольная (тем самым треугольность группы Ли определяется ее связной компонентой единицы). Максимальные связные треугольные подгруппы каждой группы Ли между собой сопряжены. Максимальные треугольные подалгебры Ли и подгруппы Ли можно рассматривать как некоторую замену понятий борелевской подалгебры и подгруппы, широко используемых при изучении комплексных алгебр Ли и комплексных групп Ли, а также комплексных однородных пространств.

Если $g = s + r$ — разложение Леви вещественной алгебры Ли g (r — радикал, а s — полупростая часть алгебры Ли g), то ее максимальные треугольные подалгебры Ли t имеют вид $t = t_s + t_r$ — это полупрямые суммы некоторой максимальной треугольной подалгебры Ли t_s в s и (единственной) максимальной треугольной подалгебры Ли t_r в радикале r . Аналогичное разложение $T = T_s \cdot T_r$ имеет место для максимальных связных треугольных подгрупп Ли (здесь точка означает почти полупрямое произведение, когда пересечение множителей дискретно, но не обязательно тривиально). Отметим, что нильрадикал алгебры Ли всегда содержится в любой ее максимальной треугольной подалгебре.

Теорема 1 ([4]). Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство группы Ли G . Тогда нормализатор $N_G(H_0)$ в G связной компоненты единицы H_0 стационарной подгруппы Ли H содержит некоторую максимальную связную треугольную подгруппу T в G .

Аналогично нормализатор $N_g(h)$ стационарной подалгебры h в алгебре Ли g группы Ли G содержит некоторую максимальную треугольную подалгебру Ли t в g .

Подгруппы Ли и подалгебры Ли, содержащие соответственно максимальную связную треугольную подгруппу Ли и максимальную треугольную подалгебру Ли, были названы в [4] соответственно t -подгруппой и t -подалгеброй. Строение t -подалгебр Ли в полупростых вещественных алгебрах Ли (соответственно t -подгрупп Ли в полупростых вещественных группах Ли) было полностью описано в [4] в терминах схем Сатаке [2].

Кроме указанного выше общего алгебраического утверждения, имеют место некоторые общие топологические утверждения о компактных однородных пространствах. Приведем некоторые простейшие среди них, касающиеся произвольных однородных пространств групп Ли.

Для однородного пространства $M = G/H$ удобно предполагать, что транзитивная группа Ли G односвязна. Отметим, что, переходя от G к группе Ли ее универсально накрывающей, всегда можем считать, что транзитивная группа Ли G односвязна (однако ее действие будет лишь локально эффективным, если даже исходное транзитивное действие было эффективным). Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M)$ изоморфна группе $\pi_0(H) = H/H_0$ связных компонент стационарной подгруппы $H \subset G$. Далее, вторая гомотопическая группа $\pi_2(M)$ будет изоморфна $\pi_1(H_0)$. Эти факты вытекают из точной гомотопической последовательности расслоения $H \rightarrow G \rightarrow G/H$ и из того факта, что вторая гомотопическая группа любой группы Ли тривиальна. В частности, если группа Ли H_0 односвязна, то группа $\pi_2(M)$ конечна. Отметим также, что если группа Ли H_0 полупроста и компактна, то группа $\pi_2(M)$ конечна (как хорошо известно, здесь всегда группа $\pi_1(H_0)$ конечна).

Выделим теперь некоторые специальные классы компактных однородных пространств $M = G/H$, для которых известны достаточно общие свойства стационарных подгрупп H .

1. Если транзитивная группа Ли G компактна, то стационарной подгруппой ее однородных пространств (автоматически компактных) может быть ее любая замкнутая подгруппа.

Дать описание всех замкнутых подгрупп Ли в заданной компактной группе Ли в принципе возможно, но оно будет чрезвычайно громоздко. Поэтому по возможности будем стараться избегать ситуаций, в которых в какой-то мере фигурируют транзитивные компактные группы Ли. В частности, ниже будет видно, как усиливаются утверждения о стационарных подгруппах в случае, когда транзитивная группа Ли не имеет компактных полупростых факторов (т.е. в полупростой ее части нет компактных нормальных делителей).

Отметим, что любая компактная группа Ли может быть реализована как стационарная подгруппа некоторого компактного однородного пространства некоторой компактной группы Ли. А именно, пусть H — произвольная компактная группа Ли. Она, как известно, имеет точное унитарное конечномерное представление и может быть вложена в группу Ли $SU(n)$ (при некотором натуральном n) в качестве подгруппы Ли (очевидно, замкнутой). Тогда для однородного пространства $M = SU(n)/H$ стационарная подгруппа — это в точности заданная компактная группа Ли H . При этом $\pi_1(M) = \pi_0(H)$.

2. Пусть транзитивная группа Ли G разрешима. Тогда известно [6], что связная компонента единицы H_0 стационарной подгруппы H содержится в нильрадикале N группы Ли G . В частности, здесь группа Ли H_0 всегда нильпотентна. Однако выделить среди всех связных нильпотентных замкнутых подгрупп Ли F в N те, которые являются связными компонентами единицы стационарных подгрупп компактных однородных пространств, довольно трудно. Необходимым условием здесь является следующее: нормализатор $N_G(F)$ должен быть равномерной подгруппой в G .

3. Пусть транзитивная на компактном многообразии M группа Ли G полупроста. Тогда стационарная подгруппа H содержит нильрадикал N_Γ параболической подгруппы, соответствующей системе "белых" корней $\Gamma \subset \Pi_1$ в схеме Сатаке. Этот результат был фактически доказан в [7] (хотя там упоминаются инвариантные аффинные связности, но, как выяснилось [8], это несущественно). Фактически условие $H_0 \supset N_\Gamma$ является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы некоторая связная замкнутая подгруппа Ли H_0 была связной компонентой единицы равномерной подгруппы Ли в G (и тем самым соответствовала компактному однородному пространству). Этот результат был обобщен в [8] на компактные однородные пространства редуктивных групп Ли.

Отметим существенность условия локальной эффективности транзитивных действий при изучении стационарных подгрупп и подалгебр. Без такого ограничения подобное изучение становится практически бессмысленным. Произвольная связная группа Ли F может оказаться стационарной подгруппой некоторого компактного однородного пространства. Например, на окружности S^1 транзитивно действует группа Ли $G = SO(2) \times F$ со стационарной подгруппой F .

Опишем вкратце содержание статьи. В разделе 1 изучим строение некоторого класса стационарных подгрупп для компактных однородных пространств. Как оказывается, к этому классу относятся стационарные подгруппы компактных однородных пространств, для которых размерность этой стационарной подгруппы не более четырех. Это позволит в разделе 2 подробно изучить компактные однородные пространства с такой небольшой размерностью стационарной подгруппы. В разделе 3 изучены стационарные подгруппы транзитивных действий на однородных пространствах размерностей 2 и 3. Особое внимание уделено случаю, когда транзитивное действие несократимо.

1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАЗЛОЖИМЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПОДГРУПП

Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство связной группы Ли G . Рассмотрим стационарную подалгебру Ли h и предположим, что она может быть представлена в виде прямой суммы $h = l \oplus p$ двух своих идеалов l и p , причем идеал l характеристичен (т.е. инвариантен относительно всех автоморфизмов алгебры Ли h). Как будет показано ниже, такого рода разложения можно найти довольно часто и они бывают полезны при изучении свойств стационарных подалгебр Ли h (и такие алгебры Ли h естественно называть разложимыми). Приведем примеры такого рода разложений.

1. Предположим, что разложение Леви для алгебры Ли h прямое, т.е. $h = s \oplus r$ — прямая сумма полупростой алгебры Ли s и разрешимой алгебры Ли r . Ясно, что в этом случае и s и r являются в h характеристическими идеалами. Поэтому любой из них можно взять в качестве идеала l , а другой — в качестве дополнительного идеала p .

2. Предположим, что алгебра Ли h есть прямая сумма $s \oplus f$, где алгебра Ли s полупроста, а алгебра Ли f в своей полупростой части не имеет простых идеалов, общих с s . Легко понять, что в этом случае s , f характеристичны, и потому могут быть взяты в качестве l в интересующих нас прямых разложениях алгебры Ли h .

3. Предположим, что $h = l \oplus p$, где идеал l компактен и полупрост, а односвязная группа Ли, алгебра Ли которой изоморфна p , стягиваема (как топологическое пространство). Строение стягиваемых групп Ли описать довольно просто — это полупрямые произведения полупростой части, простые компоненты которой локально изоморфны $SL_2(\mathbf{R})$ (и сами они диффеоморфны $\mathbf{R}^3$) и радикалу, которым могут быть произвольные односвязные разрешимые группы Ли. Топологически стягиваемая группа Ли диффеоморфна евклидову пространству (подробнее в [1]).

Для таких $h = l \oplus p$ идеалы l и p характеристичны (на самом деле здесь имеем частный случай ситуации из п. 2), что позволяет использовать любой из них в интересующем нас прямом разложении алгебры Ли h .

4. Предположим, что алгебра Ли h абелева. Рассмотрим соответствующую ей связную подгруппу Ли $H \subset G$. Она абелева и потому может быть разложена в прямое произведение максимального тора L и некоторой замкнутой односвязной подгруппы Ли P (изоморфной $\mathbf{R}^k$ при некотором $k \geq 0$). В этом случае идеал l , соответствующий подгруппе L , будет, очевидно, характеристичен относительно действия группы автоморфизмов соответствующей связной группы Ли H . Но идеал l , если он нетривиален, не будет, конечно, характеристичен относительно автоморфизмов самой абелевой алгебры Ли h . Поэтому разложение $h = l \oplus p$ нужно заменить на разложение соответствующих связных групп Ли $H = L \cdot P$. В дальнейшем эту тонкость будем учитывать.

Кроме условия на стационарную подалгебру Ли h , будем рассматривать и аналогичное условие на уровне групп Ли. А именно, будем часто предполагать, что подгруппа Ли H_0 может быть разложена в почти прямое произведение $H_0 = L \cdot P$ двух замкнутых нормальных делителей L и P , где подгруппа L характеристична, т.е. инвариантна относительно всех автоморфизмов группы Ли H_0 (это условие слабее условия характеристичности соответствующей подалгебры Ли h , но его будет достаточно). Напомним, что почти прямым произведением называется такое, когда пересечение двух нормальных сомножителей дискретно (а не обязательно тривиально, как в случае прямого произведения). Подалгебры Ли, соответствующие этим двум подгруппам, дают разложение в прямую сумму соответствующих алгебр Ли.

5. Рассмотрим довольно общий случай и дадим условие существования интересующих нас разложений.

Пусть $g = g_1 \oplus g_2$ — некоторая алгебра Ли, разложенная в прямую сумму своих нетривиальных идеалов g_i . Алгебра Ли группы автоморфизмов $\text{Aut}(g)$ — это алгебра Ли дифференцирований $\text{Der}(g_1 \oplus g_2)$. Она может быть разложена в сумму подалгебр вида $\text{Der}(g_i, g_j)$ ([9]). Здесь $\text{Der}(g_i, g_j)$ — это алгебры Ли дифференцирований из g_i в g_j , т. е. таких линейных отображений $g_i \rightarrow g_j$, которые являются ограничениями на g_i дифференцирований алгебр Ли g . При $i = j$ имеем $\text{Der}(g_i, g_i) = \text{Der}(g_i)$. А при $i \neq j$ элементы из $\text{Der}(g_i, g_j)$ являются гомоморфизмами алгебр Ли, переводящими g_i в центр $Z(g_j)$ алгебры Ли g_j , а $[g_i, g_i]$ — в нуль. Отсюда получаем, что идеал g_1 будет характеристичен в $g_1 \oplus g_2$ тогда и только тогда, когда $[g_1, g_1] = g_1$ (например, если идеал g_1 полупрост) или же $Z(g_2) = \{0\}$. В частности идеал g_1 никогда не будет характеристичен, если алгебра Ли g нильпотентна (или, что то же, нильпотентны идеалы g_1 и g_2). Поэтому неудивительно, что в наших примерах выше постоянно фигурировали полупростые идеалы.

После рассмотрения целой серии примеров (и контрпримеров) приступим к изучению стационарных подалгебр Ли h , имеющих прямые разложения $h = l \oplus p$ при условии, что идеал l характеристичен в h (или аналогичное имеется для соответствующих подгрупп Ли).

В дальнейшем при рассмотрении полупростых вещественных алгебр Ли s часто будем использовать их разложение в прямую сумму $s = s_c \oplus s_n$ компактного идеала s_c и идеала s_n , не содержащего простых компактных идеалов (фактически s_c является максимальным компактным идеалом в s).

Теорема 2. Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство группы Ли G . Предположим, что стационарная подалгебра Ли h разлагается в прямую сумму (возможно, тривиальную) $h = l \oplus p$, где идеал l полупрост и характеристичен в h . Тогда идеал l обязательно компактен и содержится в s_c — максимальном компактном идеале некоторой полупростой части s алгебры Ли g .

Если компактная компонента s_c полупростой части s алгебры Ли g тривиальна, то обязательно $l = \{0\}$ и потому $h = p$.

Аналогичное утверждение имеет место на уровне групп Ли. Пусть связная компонента единицы H_0 стационарной подгруппы H имеет разложение в почти прямое произведение $H_0 = L \cdot P$ связной полупростой характеристической подгруппы Ли L и некоторой подгруппы Ли P . Тогда L обязательно будет компактной и содержаться в максимальной связной компактной нормальной подгруппе S_c полупростой части группы Ли G . Если же эта подгруппа S_c тривиальна, то $L = \{e\}$ и $H_0 = P$.

Доказательство. В силу характеристичности подалгебры Ли l в h имеем включение $N_g(h) \subset N_g(l)$, а потому (учитывая теорему 1) подалгебра Ли $N_g(l)$ является t -подалгеброй, т. е. содержит некоторую максимальную треугольную подалгебру Ли t . Положим $t = t_s + t_r$ (об этом разложении было сказано выше).

Через $\pi : g \rightarrow s$ обозначим естественный эпиморфизм, ядром которого является радикал r алгебры Ли g . Рассмотрим подалгебру Ли $\pi(l) \subset s$. Она полупроста (такова по нашему предположению подалгебра l) и изоморфна l (ядро эпиморфизма π — разрешимый идеал r). Покажем, что $\pi(l)$ содержится в s_c — максимальном компактном идеале полупростой алгебры Ли s .

Рассмотрим сумму двух подалгебр Ли $f = \pi(l) + t_s$, считая эти подалгебры Ли пока векторными подпространствами. Так как t_s нормализует h , то она нормализует и подалгебру Ли l (в силу ее характеристичности), а потому нормализует и $\pi(l)$. Но это означает, что $[t_s, \pi(l)] \subset \pi(l)$. Поэтому на самом деле подпространство $f = \pi(l) + t_s$ является подалгеброй Ли в s , а полупростая подалгебра Ли $\pi(l)$ будет в ней идеалом. Фактор-алгебра Ли по этому идеалу разрешима (ибо такова t_s). Отсюда в силу обычных свойств разложения

Леви следует, что подалгебра Ли f есть прямая сумма подалгебр Ли $\pi(l)$ и t_s . В частности, подалгебры Ли $\pi(l)$ и t_s коммутируют друг с другом. В частности, $\pi(l)$ централизует нильрадикал n подалгебры Ли t_s , который при этом является максимальной нильпотентной (т. е. состоящей из нильпотентных элементов) подалгеброй в s_n .

Для доказательства того, что подалгебра Ли $\pi(l)$ содержится в s_c , используем теперь одно вспомогательное утверждение. Скорее всего, в той или иной форме оно было известно и ранее. Но автор не нашел подходящей ссылки и потому приводит доказательство ниже-следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $s = s_c \oplus s_n$ — вещественная полупростая алгебра Ли, а n — максимальная нильпотентная подалгебра Ли в s_n . Тогда централизатор $Z_s(n)$ подалгебры Ли n в s равен $s_c \oplus Z(n)$, где $Z(n)$ — центр n .

Доказательство. Так как очевидно, что $n \subset s_n$, то централизатор $Z_s(n)$ содержит s_c . Поэтому $Z_s(n) = s_c \oplus f$, где f — некоторая подалгебра в s_n . При этом $f = Z_{s_n}(n)$. Поэтому далее можно считать, что $s = s_n$.

Рассмотрим комплексификацию $s^{\mathbb{C}}$ алгебры Ли s . Алгебра Ли s получается как вещественная форма этой своей комплексификации, соответствующая некоторому инволютивному автоморфизму, при этом $n^{\mathbb{C}}$ — максимальная нильпотентная подалгебра Ли в $s^{\mathbb{C}}$. Ясно, что централизатор этой комплексной подалгебры инвариантен относительно указанного инволютивного автоморфизма и потому соответствует $Z_s(n)$. Поэтому для доказательства утверждения леммы 1 достаточно доказать его только для случая, когда алгебра Ли s комплексна.

Рассмотрим некоторую картановскую подалгебру $a \subset s_n$ и такую систему корней $\{e_\alpha\}$, что положительные корни порождают заданную максимальную нильпотентную подалгебру Ли n . Пусть n^* — противоположная n , максимальная нильпотентная подалгебра Ли (она натянута на отрицательные корни). Тогда $s = n^* + a + n$ — сумма трех подалгебр. Ясно, что в n^* нет элементов, централизующих n ($[e_{-\alpha}, e_\alpha] = h_\alpha \neq 0$). Нет их, очевидно, и в a . Отсюда следует $Z_s(n) \subset n$, а потому $Z_s(n) = Z(n)$. $\square$

Возвращаемся к доказательству теоремы 2. В силу доказанного выше и леммы 1 получаем $\pi(l) \subset s_c \oplus Z(n)$. Но алгебра Ли $\pi(l)$ полупроста, а потому содержится в s_c ($Z(n)$ — абелев радикал в $s_c \oplus Z(n)$). Этим доказана часть первого утверждения теоремы 2. Если $s_c = \{0\}$ (т. е. s_c тривиальна), то получаем, что и подалгебра Ли $\pi(l)$ тривиальна. Но тогда и l тривиальна. Этим доказана теорема 2 в части, относящийся к алгебрам Ли.

Что касается части утверждения теоремы 2, относящейся к группам Ли и их подгруппам Ли, то отличие заключается в том, что сначала используем тот факт, что подгруппа L характеристична в H_0 (это условие слабее, чем условие характеристичности соответствующего идеала). Дальнейшие рассуждения, в том числе и разложение полупростой алгебры Ли в сумму $s_n = n^* + a + n$ (для групп Ли подобное разложение существует только локально), проводятся буквально так же, как выше на уровне алгебр Ли. $\square$

Следствие 1. Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство группы Ли G . Предположим, что стационарная подалгебра Ли h редуктивна. Тогда ее полупростая часть компактна. Если же группа Ли G не имеет компактных полупростых факторов, то стационарная подалгебра Ли h абелева.

Доказательство. По условию h редуктивна и потому разлагается в прямую сумму полупростой части l и абелева радикала. Подалгебра Ли l , очевидно, характеристична в h и потому применима теорема 2, из которой следуют все утверждения следствия 1. $\square$

Отметим, что условие отсутствия компактных факторов у группы Ли в следствии 1 (и в групповой части теоремы 2) существенно. Если $M = K/L$ — однородное пространство компактной группы Ли K , то стационарная подалгебра здесь вовсе не обязана быть абелевой.

Теорема 3. Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство группы Ли G , не имеющей компактных полупростых факторов. Если связная компонента единицы H_0 стационарной подгруппы абелева, то она будет односвязна.

Доказательство. По условию связная группа Ли H_0 абелева, а потому она имеет разложение в прямое произведение $H_0 = T \times A$ компактного тора T и односвязной абелевой группы Ли A (изоморфной $\mathbf{R}^k$ при некотором $k \geq 0$). Ясно, что подгруппа Ли T характеристична в H_0 (чего нельзя сказать о подгруппе A). Поэтому в силу теоремы 2 $T = \{e\}$ и $H_0 = A$ — односвязная абелева группа Ли. $\square$

Для компактных однородных пространств M автором было построено натуральное расслоение $M_c \rightarrow M' \rightarrow M_a$ ([1]) — это гладкое локально тривиальное расслоение некоторого компактного однородного пространства M' , конечнолистно накрывающего M . База M_a этого расслоения асферична (т. е. все гомотопические группы $\pi_i(M_a) = 0, i \geq 2$), а слой M_c — компактное однородное пространство с конечной фундаментальной группой $\pi_1(M_c)$. Если M имеет вид G/H , где G — односвязная, связная группа Ли, то $M' = G/H'$ для подходящей подгруппы $H' \subset H$ конечного индекса. Пусть K — максимальная компактная подгруппа в G (в силу односвязности G эта подгруппа односвязна и полупроста), тогда $M_c = K/K \cap H'$, а $M_a = K \setminus G/H'$ — пространство орбит естественного действия компактной группы Ли K на M' . Если группа Ли H_0 односвязна и абелева, то пересечение $K \cap H$ — конечная группа. Выбирая H' подходящим образом, можно считать, что $K \cap H = \{e\}$. Для исходного однородного пространства $M = G/H$ пространство орбит естественного действия группы K на G/H в общем случае не является многообразием, так как имеет особые точки, которые соответствуют неглавным (точнее, исключительным) орбитам этого действия. Поэтому переход к подходящему M' , конечнолистно накрывающему M , в общем случае необходим. При этом канонического выбора для M' не существует, однако группа $\pi_1(M_a)$ (а с нею и гомотопический тип асферичного многообразия M_a) определяется по многообразию M (и даже по группе $\pi_1(M)$) однозначно с точностью до перехода к подгруппе конечного индекса.

Из следствия 1 и теоремы 2 для натурального расслоения в силу односвязности группы Ли H_0 получаем

Следствие 2. Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство односвязной группы Ли G , не имеющей компактных полупростых факторов. Тогда если стационарная подалгебра $\mathfrak{h}$ редуктивна, то для подходящего компактного однородного пространства $M' = G/H'$ (где H' — подгруппа конечного индекса в H) натуральное расслоение является главным, т. е. имеет вид $K \rightarrow M' \rightarrow M'_a$, где K — максимальная компактная подгруппа в G .

В приведенных выше результатах часто оказывалось, что стационарная подалгебра абелева. То же будет и в следующем разделе статьи для несократимых действий групп Ли на компактных многообразиях размерностей 2 и 3. Однако общее изучение свойств компактных однородных пространств с абелевой стационарной подалгеброй довольно трудно даже в очень частных случаях (например, при условии, что транзитивная группа Ли разрешима). Однако для полупростых транзитивных групп Ли условие абелевости стационарной подалгебры накладывает на транзитивную группу Ли некоторые довольно сильные ограничения. Приведем пример такого рода ограничений.

Предложение 1. Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство редуктивной группы Ли G . Если стационарная подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ абелева, то она содержит нильрадикал $\mathfrak{n}_\Gamma$ максимальной параболической подалгебры, соответствующей системе корней Γ , получающейся удалением некоторого простого “белого” корня схемы Сатаке, входящего с коэффициентом 1 в разложение старшего корня алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G .

Доказательство. Первым шагом будет использование результата из [8], в силу которого стационарная подалгебра содержит нильрадикал $\mathfrak{n}_\Gamma$ некоторой параболической подалгебры. Так как стационарная подалгебра в нашем случае абелева, то и алгебра Ли $\mathfrak{n}_\Gamma$ должна быть абелевой.

Рассмотрим теперь комплексификацию $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Комплексификация нильрадикала $\mathfrak{n}_\Gamma$ будет, как известно, нильрадикалом (причем тоже абелевым) некоторой параболической подалгебры Ли в комплексной алгебре Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Известно (например, [10]), как описываются те системы корней в комплексных редуктивных алгебрах Ли, для которых нильрадикал абелев. Это в точности максимальные параболические подалгебры, соответствующие некоторой системе корней Γ комплексной редуктивной алгебры Ли, получающейся удалением простого корня, входящего с коэффициентом 1 в разложение старшего корня алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G . Так как исходная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ у нас вещественная, то корни нужно брать не на схеме Дынкина, а на схеме Сатаке, причем корни должны быть белыми. $\square$

Утверждение данного предложения дает нетривиальное ограничение снизу на размерность недискретной абелевой стационарной подгруппы Ли. При этом для любой редуктивной группы Ли возможен случай, когда стационарная подгруппа компактного однородного пространства дискретна (и тогда стационарная подалгебра нулевая).

В заключение этого раздела рассмотрим результаты о стационарных подгруппах в отдельных весьма частных случаях.

Предложение 2. Пусть $M = R/H$ — компактное однородное пространство разрешимой группы Ли R (сolv-многообразие), нильрадикал которой обозначим через N . Если стационарная подгруппа H не дискретна, то $\dim Z(N) \geq 2$.

Доказательство. В силу [6] имеем $H_0 \subset N$. По теореме 1 подгруппа H_0 нормальна в N ($N_R(H_0)$ содержит максимальную треугольную подгруппу, а нильпотентная N всегда треугольна). Как хорошо известно, идеал в нильпотентной алгебре Ли всегда имеет нетривиальное пересечение с центром этой алгебры Ли. Поэтому $\dim(H_0 \cap Z(N)) \geq 1$.

Если $\dim Z(N) = 1$, то из сказанного выше следует $H_0 \supset Z(N)$. Подгруппа Ли $Z(N)$ характеристична в N и нормальна в R . Получаем, что подгруппа H_0 содержит нормальный делитель группы Ли R , имеющий положительную размерность. Но это противоречит локальной тривиальности транзитивного действия группы Ли R на M , которую предполагаем. Поэтому случай $\dim Z(N) = 1$ невозможен. $\square$

Отметим, что размерность центра нильпотентной группы Ли всегда больше или равна 1. Доказанное предложение 2 для недискретных стационарных подгрупп исключает случай, когда эта размерность равна 1. В частности, нильрадикал N в этом случае не может быть филиформным, т. е. являющимся нильпотентной группой Ли максимального возможного класса нильпотентности.

2. О СТАЦИОНАРНЫХ ПОДГРУППАХ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В этом разделе применим полученные выше результаты для изучения стационарных подгрупп компактных однородных пространств при условии, что размерности этих подгрупп не превосходят 4.

Когда на многообразии M существует транзитивное действие конечномерной группы Ли, то это многообразие называется однородным многообразием. Если же транзитивная группа Ли G фиксирована, то говорим об M как об однородном пространстве и записываем его в виде $M = G/H$. Размерность однородного пространства G/H не зависит, конечно, от выбора группы Ли, транзитивной на нем. А вот размерность транзитивной группы Ли может для заданного однородного многообразия M быть различной (в том числе и сколь угодно большой). Коразмерностью $\text{codim}(G/H)$ однородного пространства G/H назовем размерность $\dim H$ стационарной подгруппы для соответствующего транзитивного действия. Понятие коразмерности однородного пространства отличается от понятия кооднородности (многообразие называется 1-кооднородным, если существует действие группы Ли на нем, минимальная коразмерность орбиты которого равна 1).

Ясно, что для однородного пространства $M = G/H$ имеем равенство $\dim M + \text{codim } M = \dim G$. Существуют компактные однородные многообразия (например, тор T^n при $n \geq 2$ или нечетномерная сфера S^{2k+1}), для которых $\text{codim } M$ может быть сколь угодно велика. С другой стороны, существуют однородные многообразия (например, четномерные сферы S^{2k}), для которых возможные значения $\text{codim } M$ ограничены сверху.

Известны описания компактных однородных многообразий небольшой размерности. В частности, для размерности 2 такие многообразия перечислены Дж. Мостовым [11], а для размерности 3 — автором [12] (который впоследствии дал описания компактных однородных многообразий, с точностью до конечнолистного накрытия, вплоть до размерности 7). Для комплексных трехмерных однородных пространств классификацию можно найти в [13].

Ниже подробно рассматриваются компактные однородные пространства малой коразмерности. Будут рассмотрены случаи коразмерностей от 0 до 4 включительно.

Сначала рассмотрим компактные однородные пространства G/H коразмерности 0. Это компактные однородные пространства с дискретной стационарной подгруппой (и нулевой стационарной подалгеброй). Дискретная равномерная подгруппа в группе Ли называется решеткой. Однородные пространства вида G/D , где D — решетка в G , в общем случае практически не поддаются подробному описанию. В некоторых важных частных случаях (например, для разрешимых групп Ли G и для полупростых групп Ли G) имеются достаточно точные (однако далеко не окончательные) классификационные результаты, сведения о которых можно получить в [14].

Компактное однородное многообразие коразмерности 0 и размерности 2 — это тор T^2 , а при размерности 3 — это многообразия вида R/Γ , где R — трехмерная разрешимая группа Ли (все их можно указать явно), $SU(2)/D$, где D — конечная подгруппа в $SU(2)$, все такие подгруппы хорошо известны, $\mathcal{A}/\Gamma$, где Γ — решетка в группе Ли $\mathcal{A}$ — универсальной накрывающей для группы Ли $SL_2(\mathbf{R})$.

Случаи коразмерностей 1 и 2 рассмотрим одновременно. Через R_2 далее будем обозначать группу Ли аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию. Соответствующая ей алгебра Ли — единственная вещественная неабелева двумерная алгебра Ли. Группа Ли R_2 двумерна, разрешима и ее центр тривиален (а потому любая связная группа Ли, ей локально изоморфная, будет обязательно ей изоморфна). Она изоморфна максимальной треугольной связной подгруппе Ли в группе $SL_2(\mathbf{R})$ и потому может быть реализована как

стационарная подгруппа компактного однородного пространства $SL_2(\mathbf{R})/R_2$, диффеоморфного окружности S^1 (а также как H_0 для более общих компактных однородных пространств вида $S^1 \times G_1/\Gamma$, где G_1 — группа Ли, а Γ — решетка в ней).

Теорема 4. Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство коразмерности 1 или 2. Тогда связная компонента единицы стационарной подгруппы H абелева или изоморфна односвязной разрешимой двумерной группе Ли R_2 . Если группа Ли G не имеет компактных полупростых факторов, то подгруппа H_0 односвязна и изоморфна $\mathbf{R}^k$, где $k = 1, 2$, или же изоморфна R_2 .

Доказательство. Если стационарная подгруппа одномерна, то подгруппа H_0 может быть изоморфна только $\mathbf{R}$, $SO(2)$. Если $s_c = \{0\}$ (т.е. группа Ли G не имеет компактных полупростых факторов), то случай $H_0 = SO(2)$ невозможен в силу теоремы 3.

Если H_0 двумерна, то она абелева или изоморфна R_2 (эта группа Ли не имеет локально изоморфных ей неодносвязных групп Ли). Абелева двумерная группа Ли в силу теоремы 3 должна быть односвязной и потому изоморфна $\mathbf{R}^2$. $\square$

Отметим, что имеется много компактных однородных пространств, для которых $H_0 = SO(2)$. А именно, таковыми будут, например, однородные пространства вида K/T , где T — одномерный тор в компактной группе Ли K . То же касается и случаев, когда группа Ли H_0 — двумерный тор или изоморфна $SO(2) \times \mathbf{R}$. Поэтому условие $s_c = \{0\}$ в теореме 4 существенно.

Теорема 5. Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство коразмерности 3 или 4. Тогда H_0 разрешима или же локально изоморфна $SU(2)$ или $SU(2) \times \mathbf{R}$. Если же группа Ли G не имеет компактных полупростых факторов, то подгруппа H_0 разрешима и, если она абелева, то односвязна.

Доказательство. Размерность группы Ли H_0 равна 3 или 4. Однако нетрудно проверить, что алгебра Ли размерности 3 или 4 разрешима или редуктивна. Это следует из такого простого факта — полупростая алгебра Ли размерности ≤ 4 обязательно трехмерна. Существуют только две односвязные полупростые группы Ли размерности 3 — это $SU(2)$ и $\mathcal{A}$ (универсальная накрывающая группы Ли $SL_2(\mathbf{R})$). Случай группы Ли $\mathcal{A}$ для нас невозможен, так как полупростая часть группы Ли H_0 в нашем случае должна быть компактна (теорема 2). Поэтому группа Ли H_0 локально изоморфна $SU(2)$ или $SU(2) \times \mathbf{R}$.

Если $s_c = \{0\}$, то H_0 разрешима. Если она абелева, то применяем теорему 3. $\square$

В отличие от случаев коразмерностей 1 и 2, для случая коразмерности 3 группа Ли H_0 не обязательно односвязна. Например, она может быть изоморфной $E(2)$ — группе Ли движений евклидовой плоскости.

Отметим, что для компактного однородного пространства G/H коразмерности 5 может оказаться, что стационарная подалгебра $\mathfrak{h}$ не является редуктивной (или вообще не разлагается в прямую сумму двух нетривиальных подалгебр Ли). Например, в группе Ли $SL_2(\mathbf{C})$ имеется равномерная подгруппа Ли, изоморфная $SL_2(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}^2$. Это не позволяет применять общие результаты о стационарных подалгебрах, полученные выше, для случаев компактных однородных пространств коразмерности ≥ 5 .

3. ОБ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ РАЗМЕРНОСТЕЙ 2 И 3

Рассмотрим теперь подробнее один частный случай — однородные пространства размерностей 2 и 3 (включая и некомпактные).

Однородные пространства размерности 2 и все транзитивные на них группы Ли были перечислены в [11]. Всего имеется семь однородных поверхностей — это компактные поверхности S^2 , $\mathbf{R}P^2$, тор T^2 и бутылка Клейна K^2 , а также некомпактные поверхности — $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R} \times S^1$ и лист Мебиуса Mb . Однако следует отметить, что из указанной выше статьи не так просто явно выделить все те группы Ли, которые транзитивны на каждой из семи однородных поверхностей. Несколько более упорядоченное описание однородных поверхностей дано в [15].

Алгебры Ли групп Ли, транзитивных (точнее, локально транзитивных) на поверхностях, были перечислены еще самим Софусом Ли. Однако форма этого перечисления оставляла желать лучшего. Были просто указаны векторные поля — базисы соответствующих алгебр Ли. При этом структура самих алгебр Ли (даже их разложение Леви, которое, правда, в то время еще не было известно) выявлена не была, также не были до конца выделены неизоморфные среди этих алгебр Ли. Не были явно указаны и описаны стационарные подалгебры. Тем самым классификация была далека от своего завершения, и положение не изменилось существенно до недавнего времени. Автор опубликовал две статьи [16], [17], в которых был полностью рассмотрен случай алгебр Ли аналитических векторных полей на комплексной плоскости. Ниже без доказательства сформулировано аналогичное описание алгебр Ли для групп Ли, локально транзитивных на вещественных поверхностях (в нем сохранена связь с нумерацией из [16]).

Нами будет использована уточненная (с исключением изоморфных алгебр Ли и с описанием их алгебраической структуры) классификация С. Ли транзитивных алгебр Ли аналитических векторных полей на плоскости $\mathbf{R}^2$. Эта классификация с уточнениями получена теми же методами, что и в комплексном случае в [16]. Новые факты в вещественном случае можно разбить на две части.

1. Добавляются пять примитивных алгебр Ли. Для сохранения нумерации других алгебр Ли, которые буквально переносятся (с заменой поля $\mathbf{C}$ на $\mathbf{R}$) из комплексной классификации, эти новые примитивные алгебры Ли векторных полей получили нумерацию N18'-N22' в конце списка (чтобы не разрушать заимствованную из [16] нумерацию).

N18' ($\dim h = 4$):

$$p, q, xp - yq, xp + yq, (x^2 - y^2)p + 2xyq, 2xyp + (y^2 - x^2)q,$$

$$g = sl_2(\mathbf{C}),$$

$h = b$ — комплексная подалгебра Бореля.

N19' ($\dim h = 4$):

$$p, q, xq - yp, xp + yq,$$

g — разрешимая алгебра Ли вида $A + B$, где $A, B \simeq \mathbf{R}^2$; действие подалгебры Ли A на идеале B является композицией гомотетий и вращений,

h — двумерная абелева подалгебра Ли, не равная B .

N20' ($\dim h = 1$):

$$p, q, xq - yp + c(xp + yq),$$

$$g = \mathbf{R} + \mathbf{R}^2,$$

h — некоторая одномерная подалгебра Ли.

N21' ($\dim h = 1$):

$$p + (x^2 - y^2)p + 2xyq, q + 2xyp + (y^2 - x^2)q, \quad yp - xq,$$

$$g = so_3,$$

h — некоторая одномерная подалгебра Ли (все такие подалгебры Ли между собой сопряжены).

N22' ($\dim h = 1$):

$$p + (x^2 - y^2)p - 2xyq, q - 2xyp - (y^2 - x^2)q, yp - xq,$$

$$g = sl_2(\mathbf{R}),$$

$h = so(2)$ — одномерная подалгебра Ли.

2. Две серии комплексных алгебр Ли (в которые входят экспоненты) в вещественной ситуации видоизменяются, в них добавляются множители в виде синусов и косинусов. Точнее, N11 заменяется на N11', а N14 — на N14'.

N11' ($\dim h = N$):

$$q, xq, \dots, x^m q, e^{a_k x} \cos(b_k x)q, x e^{a_k x} \cos(b_k x)q, \dots, x^{m_k} e^{a_k x} \cos(b_k x)q,$$

$$e^{a_k x} \sin(b_k x)q, x e^{a_k x} \sin(b_k x)q, \dots, x^{m_k} e^{a_k x} \sin(b_k x)q, yq, p,$$

где $k = 1, 2, \dots, l$, $l \geq 0$, $l + m + m_1 + \dots + m_l > 0$, $a_1 = 1$,

$$g = \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^N,$$

$$h = \mathbf{R} + \mathbf{R}^{N-1}.$$

N14' ($\dim h = N - 2$, где $N = 1 + 2(m_1 + \dots + m_l)$),

$$e^{a_k x} \cos(b_k x)q, x e^{a_k x} \cos(b_k x)q, \dots, x^{m_k} e^{a_k x} \cos(b_k x)q,$$

$$e^{a_k x} \sin(b_k x)q, x e^{a_k x} \sin(b_k x)q, \dots, x^{m_k} e^{a_k x} \sin(b_k x)q, yq, p,$$

$k = 1, 2, \dots, l$, $l \geq 0$, $l + m_1 + \dots + m_l > 0$, $a_1 = 0$ или 1 ,

$$g = \mathbf{R} + \mathbf{R}^N,$$

$$h = \mathbf{R}^{N-1}.$$

Так как никаких принципиальных сложностей по сравнению с [16] в вещественном случае не возникает, то доказательство сформулированного описания не приводится.

В приведенных выше описаниях алгебр Ли часто используется запись вида $A + B$ — это полупрямые суммы идеала B и подалгебры Ли A (записанных в сумме именно в таком порядке). Явное описание действия подалгебры A на идеале B не дается. Оно либо очевидно, либо может быть найдено в [16]. Прямые же суммы обозначаются $\oplus$. После указания номера алгебры Ли в скобках указывается размерность $\dim$ соответствующей стационарной подалгебры Ли.

В [11] показано, что любая локально транзитивная алгебра Ли векторных полей на плоскости может быть продолжена (глобализована) до алгебры Ли векторных полей некоторой транзитивной группы Ли (на соответствующей поверхности).

В качестве некоторого итога отметим, что за исключением бесконечных серий алгебр Ли (где размерность стационарной подалгебры Ли принимает произвольные значения, начиная с 0, 1 или 2), коразмерности подгрупп однородных поверхностей (т.е. размерности стационарных подалгебр Ли) оказываются равными только числам 0, 1, 2, 3, 4, 6.

Из сформулированных выше классификационных результатов получаем

Следствие 3. Стационарные подалгебры Ли для двумерных однородных пространств сохраняются (с точностью до изоморфизма) в следующем списке:

$\mathbf{R}^k$ (при некотором $k \geq 0$), r_2 (двумерная разрешимая алгебра Ли), $r_2 \oplus r_2$, $r_2 \oplus \mathbf{R}$, $\mathbf{R} + \mathbf{R}^r$ (полупрямые суммы некоторого специального вида), $\bar{b} + \mathbf{R}^r$ (полупрямая сумма, где $\bar{b}$ — борелевская подалгебра в $gl_2(\mathbf{R})$), $b_1 + \mathbf{R}^r$ (полупрямая сумма, где b_1 — двумерная подалгебра Ли в трехмерной борелевской подалгебре $\bar{b}$), $gl_2(\mathbf{R}) + \mathbf{R}^2$ (полупрямая сумма), $gl_2(\mathbf{R})$, $sl_2(\mathbf{R})$.

Рассмотрим теперь случай, когда на поверхностях группы Ли действуют транзитивно и несократимо. По определению транзитивная группа Ли G действует на однородном пространстве $M = G/H$ несократимо, если это действие локально-эффективно и в G нет собственных подгрупп Ли (меньшей размерности), естественное действие которых на M

транзитивно. Например, группа Ли $SL_2(\mathbf{C})$ транзитивна на сфере $S^3 \subset \mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^4$, это действие эффективно, но сократимо, так как на S^3 действует и подгруппа $SU(2) \subset SL_2(\mathbf{C})$. Действие же группы $SU(2)$ на сфере S^3 уже несократимо.

Теорема 6. *Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство размерности 2. Если группа Ли G действует на M несократимо, то стационарная подалгебра Ли абелева.*

Доказательство. Компактная однородная поверхность M^2 будет, как уже было сказано выше, диффеоморфна S^2 , $\mathbf{R}P^2$, T^2 или K^2 . В принципе для нашего доказательства здесь можно было бы использовать классификацию всех групп Ли, транзитивных на поверхностях: выделить из них несократимые и таким путем получить доказательство теоремы 6. Однако выше уже было отмечено, что перечисление групп Ли, транзитивных на отдельных поверхностях, весьма громоздко. Поэтому предпочтительно использовать прямое доказательство, не основанное на классификации С. Ли.

На S^2 , $\mathbf{R}P^2$ всегда будет транзитивна компактная подгруппа Ли, изоморфная $SU(2)$ (это вытекает из классификации транзитивных действий групп Ли на поверхностях и теоремы Монтомгери (например, [1])). Стационарная подалгебра здесь абелева одномерная $so(2)$.

Пусть M^2 — это T^2 или бутылка Клейна K^2 (двустивно накрываемая тором). Рассмотрим разложение Леви $G = S \cdot R$ транзитивной группы Ли G , которую можем предполагать односвязной. Как известно, группа Ли G в данном случае будет асферичной и S есть прямое произведение нескольких экземпляров группы Ли $\mathcal{A}$ ([1]). Действительно, группа Ли S в нашем случае тривиальна или же $G = \mathcal{A}$. Это вытекает из несократимости действия группы Ли G . Если $G = \mathcal{A}$, то стационарная подгруппа одномерна и потому абелева. Остается рассмотреть случай, когда $G = R$ разрешима.

Пусть N — нильрадикал группы Ли R . Тогда $H_0 \subset N$. Если $H_0 = N$, то в силу локальной эффективности действия группы Ли нильрадикал N тривиален, а потому группа Ли G абелева и изоморфна $\mathbf{R}^2$. В этом случае стационарная подалгебра Ли h тривиальна.

Если $H_0 \neq N$, то $\text{codim}_N(H_0)$ равна 1 или 2 (здесь коразмерность понимается в обычном топологическом смысле). При $\text{codim}_N(H_0) = 2$ имеем $G = N$, эта группа Ли нильпотентна. Но тогда в силу теоремы 1 подалгебра h будет тривиальна, а сама группа Ли G абелева. Остается рассмотреть случай, когда H_0 — подгруппа коразмерности 1 в N . Тогда нильрадикал N имеет коразмерность 1 в G и потому имеем разложение $G = \mathbf{R} \cdot N$ в полупрямое произведение. Так как h — подалгебра Ли коразмерности 1 в нильпотентной алгебре Ли n , то на самом деле она является идеалом в g (любая подалгебра коразмерности 1 в нильпотентной алгебре Ли — идеал, как легко выводится из теоремы Энгеля). Но тогда $h \supset [n, n]$. Ясно, что $[n, n]$ — идеал в g . В силу локальной эффективности действия группы Ли R должно быть $[n, n] = \{0\}$, т. е. нильрадикал n абелев. Но тогда абелевой будет и содержащаяся в n стационарная подалгебра Ли h . $\square$

Переходим к рассмотрению трехмерных однородных пространств. Следующее утверждение — прямой аналог теоремы 6. Однако в данном случае придется воспользоваться классификацией [12], так как прямое доказательство представляется весьма громоздким.

Теорема 7. *Пусть $M = G/H$ — компактное однородное пространство размерности 3. Если группа Ли G действует на M несократимо, то стационарная подалгебра Ли всегда абелева.*

Доказательство в значительной мере основано на классификации трехмерных однородных многообразий и групп Ли, несократимо транзитивных на них [12]. В указанной статье рассмотрены все трехмерные однородные многообразия. Нужна однако только информация о компактных трехмерных однородных пространствах. Рассуждения, приведенные

при доказательстве теоремы 6, примерно такие же, какие были использованы в [12] для трехмерного случая. Потребуется дополнительное рассуждение, относящееся к солвмно-гообразиям (однородным пространствам разрешимых групп Ли). В [12] трехмерные солвмно-гообразия описаны с точностью до диффеоморфизма, а разрешимые группы Ли, на них транзитивные, не конкретизированы. Это связано с тем, что даже в трехмерном случае описание всех транзитивных разрешимых групп Ли представляет собой “дикую” задачу. Однако потребуется только информация о стационарных подалгебрах.

Теорема 8 ([12], 3.2). *Нижеследующим списком исчерпываются все трехмерные компактные однородные многообразия M и односвязные группы Ли G , транзитивно и несократимо действующие на них:*

- 1) M — солвмнообразие, $M \neq T^3$, G разрешима,
- 2) $M = T^3$, G либо разрешима, либо изоморфна $A \times \mathbf{R}$,
- 3) $M = A/\Gamma$ (где Γ — решетка в A), $G = A$,
- 4) $M = S^2 \times S^1$, $G = SU(2) \times_{\phi} \mathbf{R}^{2n+1}$,
- 5) $M = \mathbf{R}P^2 \times S^1$, $G = SU(2) \times_{\phi} \mathbf{R}^{4n+1}$,
- 6) $M = \mathbf{R}P^2 \sharp \mathbf{R}P^2$ (связная сумма), $G = SU(2) \times_{\phi} \mathbf{R}^{4n+3}$,
- 7) $M = SU(2)/D$ (где D — конечная подгруппа в $SU(2)$), $G = SU(2)$.

В пп. 4), 5), 6) через ϕ обозначено неприводимое представление (соответствующей размерности) группы $SU(2)$.

Используем эту классификацию для доказательства теоремы 7.

Лемма 2. *Пусть R — разрешимая группа Ли, несократимо транзитивная на некотором компактном трехмерном многообразии M^3 , а N — нильрадикал в R . Тогда нильрадикал N абелев. Абелевой будет и стационарная подалгебра Ли $\mathfrak{h}$.*

Доказательство. Пусть $M^3 = R/H$, где H — стационарная подгруппа Ли в R . Тогда $H_0 \subset N$. В силу теоремы 1 подгруппа Ли H_0 нормальна в N .

Предположим, что группа Ли R нильпотентна, т.е. $R = N$. Тогда H_0 нормальна в R и потому в силу локальной эффективности действия группы Ли R на M группа Ли H_0 должна быть тривиальной. Тем самым и стационарная подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ тривиальна.

Пусть теперь $R \neq N$. Рассмотрим подгруппу Ли $H_0 \subset N$. Так как $N \neq R$, то

$$\text{codim}_N(H_0) \leq 2.$$

Подгруппа Ли H_0 нормальна в N , а фактор-группа N/H_0 нильпотентна и двумерна, поэтому абелева. Следовательно, H_0 содержит коммутант $[N, N]$. Ясно, что этот коммутант нормален в группе Ли R (так как является характеристической подгруппой нильрадикала N , нормального в R). В силу предположенной локальной эффективности действия группы Ли R на M^3 должно быть $[N, N] = \{e\}$, т.е. нильрадикал N абелев. Тогда абелева и содержащаяся в нем подгруппа Ли H_0 . Потому стационарная подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ абелева. $\square$

Лемма 2 исчерпывает ту часть доказываемой теоремы 8, которая относится к солвмно-гообразиям. Что же касается теоремы 8 во всех других случаях, то утверждения о стационарных подалгебрах Ли вытекают из следствия 3.

Разрешимые группы Ли, транзитивные на компактных многообразиях, могут быть явно описаны. Для случая $M = T^n$ это описание несложно [19] и там видно, как именно абелевы стационарные подалгебры Ли могут при этом фигурировать.

Рассмотрим теперь одно утверждение, касающееся стационарных подгрупп для трехмерных однородных пространств, причем не обязательно компактных. Отметим, что классификации даже только локальных транзитивных действий групп Ли на трехмерных многообразиях в вещественном случае не существует. Некоторые частичные результаты для алгебр Ли на $\mathbf{C}^3$ получены еще С. Ли и недавно были дополнены в [18] (где классифицированы неразрешимые алгебры Ли векторных полей на $\mathbf{C}^3$). Нас интересует как раз разрешимый случай.

Теорема 9. *Пусть R — разрешимая группа Ли, несократимо транзитивная на некотором трехмерном многообразии M^3 , а N — нильрадикал в R . Тогда коммутант $[N, N]$ нильрадикала абелев. Абелевым будет и коммутант $[h, h]$ стационарной подалгебры Ли h .*

Доказательство. Предположим сначала, что группа Ли R нильпотентна, т. е. $R = N$. Тогда, как известно (например, [2]), $\dim R/[R, R] \geq 2$. Рассмотрим естественный эпиморфизм $p : R \rightarrow A = R/[R, R]$ и подгруппу Ли $p(H_0)$ в абелевой группе Ли A . Если $p(H_0) = A$, то в силу нильпотентности группы Ли $R = N$ и должно быть $H_0 = R$ (так как дополнительное к $[n, n]$ подпространство в n порождает нильпотентную алгебру Ли n), что невозможно. Поэтому $p(H_0)$ — собственная связная замкнутая подгруппа Ли в A . Эта подгруппа в A должна быть тривиальной, так как иначе можем дополнить ее собственной абелевой подгруппой Ли до A и прообраз полученного дополнения будет собственной подгруппой Ли в R , транзитивной на M (что противоречит предположению о несократимости действия R). Из $\dim A \geq 2$ (см. выше) и $\dim M = 3$ следует, что $\dim H_0 \cap [R, R] \leq 1$. Тогда $H_0 \supset [R, R]$ или же $H_0 \cap [R, R]$ — подгруппа Ли коразмерности 1 в $[R, R]$. В первом случае в силу локальной эффективности действия группы Ли R на M коммутант $[R, R]$ будет тривиален, а R абелева и изоморфна $\mathbf{R}^2$. В этом случае подгруппа H_0 тривиальна. Во втором случае, так как $[R, R]$ нильпотентна, то нормализатор в N подгруппы Ли $H_0 \cap [R, R]$ имеет коразмерность < 1 , а потому нормален в $[R, R]$. Отсюда в силу локальной эффективности действия группы Ли R на M вытекает, что подгруппа $[R, R]$ должна быть абелевой (так как ее коммутант в силу сказанного выше должен лежать в ядре неэффективности).

Пусть теперь разрешимая группа Ли R не нильпотентна, т. е. $R \neq N$. Через $q : R \rightarrow B = R/N$ обозначим естественный эпиморфизм на абелеву группу Ли B с ядром N . Имеем $\dim B > 0$. Рассмотрим $q(H_0)$, эта подгруппа в A должна быть тривиальной, так как иначе можем дополнить ее собственной абелевой подгруппой Ли до B и прообраз полученного дополнения будет собственной подгруппой Ли в R , транзитивной на M (что противоречит предположению о несократимости действия R). Из $\dim B > 0$ и $\dim M = 3$ следует $\text{codim}_N(H_0 \cap N) \leq 2$. Так как N нильпотентна, то нормализатор в N подгруппы Ли $H_0 \cap N$ имеет коразмерность ≤ 1 , а потому нормален в N . Отсюда в силу локальной эффективности действия группы Ли R на M вытекает, что коммутант подгруппы $[N, N]$ должен быть тривиален (так как в силу сказанного выше он должен лежать в ядре неэффективности). Поэтому коммутант $[N, N]$ абелев. Из $H_0 \subset N$ вытекает, что и коммутант $[h, h]$ абелев. $\square$

Теперь вкратце рассмотрим случай трехмерных однородных пространств малой координатности, для которых транзитивное действие группы Ли несократимо.

Пусть $M = G/H$ — трехмерное компактное однородное пространство коразмерности ≤ 4 .

Если коразмерность этого однородного пространства $M = G/H$ равна 1 или 2, то из теоремы 4 вытекает, что стационарная алгебра Ли h абелева. При коразмерности 3 или 4 может оказаться, что стационарная подалгебра Ли h разрешима. А при коразмерности 5 возможен случай, когда h изоморфна алгебре Ли $so(2) + \mathbf{R}^3$ (нетривиальная полупрямая сумма).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горбачевич В.В., Онищик А.Л. *Группы Ли преобразований. Группы Ли и алгебры Ли - 1*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления, 20, ВИНТИ, М., 1988, 103-240.
- [2] Винберг Э.Б., Горбачевич В.В., Онищик А.Л. *Строение групп и алгебр Ли. Группы Ли и алгебры Ли - 3*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления, 41, ВИНТИ, М., 1990, 5-253.
- [3] Горбачевич В.В. *Компактные однородные пространства и их обобщения*, Геометрия. СМФН. 22. РУДН, М., 2007, 38-72.
- [4] Онищик А.Л. *О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях*, Матем. сб., **74** (1967), 398-416.
- [5] Tits J. *Espaces homogenes complexes compacts*, Comm. Math. Helv. **37** (1962), 111-120.
- [6] Mostow G.D. *Factor spaces of solvable groups*, Ann. of Math. **60** (1954), 1-27.
- [7] Вишик Е.Я. *Компактные однородные пространства и инвариантные аффинные связности на них*, Изв. вузов. Матем, 1975, №10, 82-85.
- [8] Горбачевич В.В. *Компактные и близкие к ним однородные пространства редуктивных групп Ли*, Матем. сб., **207** (2016), 31-46.
- [9] Togo S. *On the derivation algebras of Lie algebras*, Canad. J. Math. **13** (1961), 201-216.
- [10] Richardson R., Rohrle G., Steinberg R. *Parabolic subgroups with abelian unipotent radical*, Invent. Math., **110** (1992), 649-671.
- [11] Mostow G.D. *The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces*, Ann. Math. **52** (1950), 606-636.
- [12] Горбачевич В.В. *О трехмерных однородных пространствах*, Сиб. матем. журн., **18** (1977), 280-293.
- [13] Winkelmann J. *The classification of three-dimensional homogeneous complex manifolds*, Lect. Notes in Math., Springer, №1602, 1995.
- [14] Рагунатан М. *Дискретные подгруппы групп Ли*, М. Мир, 1975.
- [15] Комраков В., Чурумов А., Doubrov В. *Two dimensional homogeneous spaces*, ISLC. Minsk, 1998.
- [16] Горбачевич В.В. *О классификации комплексных односвязных однородных пространств размерностей не более 2*, Изв. вузов. Матем., №3, 2013, 16-32.
- [17] Горбачевич В.В. *Интранзитивные алгебры Ли векторных полей на комплексной плоскости*, Тр. семин. по векторному и тензорному анал. **29** (2013), 27-38.
- [18] Doubrov В. *Three-dimensional homogeneous spaces with non-solvable transformation groups*, <https://arxiv.org/abs/1704.04393>.
- [19] Johnson R.W. *Presentation of solvmanifolds*, Amer. J. Math. **94** (1972), 82-102.

Владимир Витальевич Горбачевич

Москва, Россия,

e-mail: vgorvich@yandex.ru

V.V. Gorbatsevich

On stationary subgroups of compact homogeneous spaces

Abstract. In this article we study some special properties of stationary subgroups and their Lie algebras for compact homogeneous spaces. We consider the cases of decomposable stationary Lie subalgebras and stationary subalgebras of small dimension. The case of nonreducible transitive actions of Lie groups is considered in detail.

Keywords: Lie group, homogeneous space, stationary subgroup, nonreducible action.

Vladimir Vital'evich Gorbatsevich

Moscow, Russia,

e-mail: vgorvich@yandex.ru