Общероссийский математический портал

А. Н. Зарубин, Краевая задача для смешанно-составного функционально-дифференциального опережающе-запаздывающего уравнения с дробной производной, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 4, 52–65

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-4-52-65>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:41:15

А.Н. ЗАРУБИН

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ
ПРОИЗВОДНОЙ**

Аннотация. Исследуется задача для смешанно-составного уравнения с дробной производной и сосредоточенным отклонением по времени, функциональным запаздыванием и опережением по пространственной переменной. Задача однозначно разрешима.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, интегральное уравнение, разностное уравнение, функциональное запаздывание и опережение, дробная производная.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-4-52-65

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения смешанно-составного типа используются в качестве математических моделей различных классов физических задач (внутренние волны, волны в магнитоактивной плазме, спиновые волны, нелинейная оптика, диссипативные процессы в проводящих средах) ([1], [2], [3], с. 115; [4], с. 8–15).

Данная работа посвящена исследованию смешанно-составного уравнения, содержащего кратные функциональные запаздывания и опережения

$$\mathcal{L}V(x, y) \equiv \mathcal{L} \left(A(x)U(x, y) + \sum_{k=1}^n B_k(x)U(\alpha_1^k(x), y) + \sum_{k=1}^m C_k(x)U(\alpha_2^k(x), y) \right) = 0, \quad (1)$$

где

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + H(-y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - H(y) \mathcal{D}_{0y}^\alpha - \\ - H(y - \tau) \mathcal{P}_y^\tau \left(\beta + \gamma \mathcal{P}_x^{x - \alpha_1^2(x)} H(x) + \delta \mathcal{P}_x^{x - \alpha_2(x)} H(x_3 - x) \right) \quad (2)$$

— функционально-дифференциальный оператор, в котором $\mathcal{D}_{0y}^\alpha$ — оператор ([5], с. 43) дробного (в смысле Римана–Луивилля) интегродифференцирования порядка α , $0 < \alpha < 1$, действующий на функцию $V(x, y)$ по переменной y , определяемый соотношением

$$\mathcal{D}_{0y}^\alpha V(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1} V(x, \xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-\xi)^{-\alpha} V(x, \xi) d\xi; \quad (3)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция ([6], с. 947); $\mathcal{P}_y^\tau (\mathcal{P}_x^{x-a_j^{3-j}(x)})$ ($j = 1, 2$) — оператор сдвига по y (по x): $\mathcal{P}_y^\tau V(x, y) = V(x, y - \tau)$ $\left(\mathcal{P}_x^{x-a_j^{3-j}(x)} V(x, y) = V(a_j^{3-j}(x), y) \right)$ ($0 < \tau \equiv \text{const}$), $H(\xi)$ — функция Хевисайда; $A(x)$, $B_k(x)$, $C_k(x)$ — непрерывные достаточно гладкие функции; $n, m \in \mathbb{N}$; $\beta, \gamma, \delta \equiv \text{const}$; $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ — сохраняющие ориентацию взаимно обратные диффеоморфизмы класса $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющие условиям $\alpha_1'(x) > 1$ ($\alpha_1'(x) < 1$), $\alpha_1(x) < x$ и $\alpha_2'(x) < 1$ ($\alpha_2'(x) > 1$), $\alpha_2(x) > x$, т. е. представляющие собой соответственно растягивающе(сжимающе)-запаздывающее и сжимающе(растягивающе)-опережающее отображения, причем

$$\alpha_1(\alpha_2(x)) = x, \quad \alpha_2(\alpha_1(x)) = x, \quad (4)$$

$$\alpha_j^0(x) = x, \quad \alpha_j^k(x) = \alpha_j(\alpha_j^{k-1}(x)) \quad (j = 1, 2; k = 1, 2, \dots).$$

При этом отображение $\alpha_2(x)$ определено в нуле, а отображение $\alpha_1(x)$ либо определено в нуле, либо $\alpha_1(0) = -\infty$; $x_0 = 0$, а x_n определены корректно согласно (4) любым из следующих равносильных рекуррентных равенств: $x_n = \alpha_1(x_{n+1})$, $x_{n+1} = \alpha_2(x_n)$. Например, если $n = \overline{-2, 4}$, то

$$\begin{aligned} x_{-2} = \alpha_1^2(x_0) < x_{-1} = \alpha_1(x_0) < x_0 = 0 < x_1 = \alpha_2(x_0) < \\ < x_2 = \alpha_2^2(x_0) < x_3 = \alpha_2^3(x_0) < x_4 = \alpha_2^4(x_0). \end{aligned}$$

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Без ограничения общности и для наглядности рассмотрим уравнение (1) в смешанной области $D = D^+ \cup D^- \cup I$ при $n = 2$, $m = 1$, $B_1(x) = 0$, $B_2(x) = -B(x)$, $C_1(x) = C(x)$, т. е. уравнение

$$\mathcal{L}V(x, y) \equiv \mathcal{L}\left(A(x)U(x, y) - B(x)U(\alpha_1^2(x), y) + C(x)U(\alpha_2(x), y)\right) = 0, \quad (5)$$

где $\mathcal{L}$ — оператор смешанного типа (2) в области D с линией изменения типа $I = \{(x, y) : x_0 < x < x_3, y = 0\}$; $D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup \mathcal{J}^+ = \{(x, y) : x_0 < x < x_3, y > 0\}$ и $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^- \cup \mathcal{J}^- = \{(x, y) : x_0 < x < x_3, -\tau < y < 0\}$ — соответственно “параболическая” и эллиптическая части области D , причем

$$\begin{aligned} D_k^+ &= \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, y > 0\} \quad (k = \overline{-2, 3}), \\ D_k^- &= \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, -\tau < y < 0\} \quad (k = \overline{-2, 3}), \\ J^\pm &= J_1^\pm \cup J_2^\pm, \end{aligned}$$

$$\text{где } J_k^+ = \{(x, y) : x = x_k, y > 0\}, \quad J_k^- = \{(x, y) : -\tau < y < 0\} \quad (k = 1, 2).$$

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$, где $I_k = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, y = 0\}$ ($k = \overline{-2, 3}$), т. е. $D = D^+ \cup D^- \cup I = \bigcup_{k=0}^2 (D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k) \cup \mathcal{J} = \bigcup_{k=0}^2 D_k \cup \mathcal{J}$, а $\mathcal{J} = \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$.

Тип функциональных отклонений очевиден из представлений

$$\begin{aligned} U(\alpha_1^2(x), y) &= U(x - (x - \alpha_1^2(x)), y) = U(x - \tau_1(x), y), \\ U(\alpha_2(x), y) &= U(x + (\alpha_2(x) - x), y) = U(x + \tau_2(x), y), \end{aligned}$$

где $\tau_1(x) = x - \alpha_1^2(x) > 0$, $\tau_2(x) = \alpha_2(x) - x > 0$.

Решение $U(x, y)$ уравнения (5) будем называть регулярным в области D , если

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1}U(x, \xi) \in \mathbb{C}(\overline{D}^+), \quad U(x, y) \in \mathbb{C}(\overline{D}^-), \quad y^{1-\alpha}\mathcal{D}_{0y}^\alpha U(x, \xi) \in \mathbb{C}(D^+ \cup I), \\ U_{xx}(x, y) \in \mathbb{C}(D \setminus (I \cup \mathcal{J})), \quad U_{yy}(x, y) \in \mathbb{C}(D^-). \end{aligned}$$

Задача Т. Найти в области D регулярное решение $U(x, y)$ уравнения (5), удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x_0, y) = U(x_3, y) = 0, \quad -\tau < y < +\infty, \quad (6)$$

$$U(x, -\tau) = \varphi(x), \quad x_0 \leq x \leq x_3, \quad (7)$$

$$U(x, y) = r(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D_{-2}} \cup \overline{D_{-1}}, \quad (8)$$

$$U(x, y) = q(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D_3}, \quad (9)$$

условиям сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0-} U(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} \mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1}U(x, \xi) = \omega(x), \quad x_0 \leq x \leq x_3, \quad (10)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0-} U_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha}\mathcal{D}_{0y}^\alpha U(x, \xi) = \nu(x), \quad x_0 < x < x_3, \quad x \neq x_1, x_2; \quad (11)$$

условиям согласования

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) = \varphi(x_3) = 0, \quad B(x_3) = C(x_0) = 0, \\ r(x_k, y) = 0 \quad (k = 0, -1, -2), \quad q(x_j, y) = 0 \quad (j = 3, 4), \end{aligned} \quad (12)$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $\varphi(x)$, $r(x, y)$, $q(x, y)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ — заданные непрерывные достаточно гладкие функции.

Положив

$$V(x, y) = A(x)U(x, y) - B(x)U(\alpha_1^2(x), y) + C(x)U(\alpha_2(x), y), \quad (13)$$

приведем уравнение (5) с учетом (2) к системе

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, y) \equiv V_{xx}(x, y) + H(-y)V_{yy}(x, y) - H(y)\mathcal{D}_{0y}^\alpha V(x, \xi) - \\ - H(y - \tau) \left[\beta V(x, y - \tau) + \gamma H(\alpha_1^2(x)) V(\alpha_1^2(x), y - \tau) + \right. \\ \left. + \delta H(x_3 - \alpha_2(x)) V(\alpha_2(x), y - \tau) \right] = 0, \quad (x, y) \in D, \end{aligned} \quad (14)$$

$$A(x)U(x, y) - B(x)U(\alpha_1^2(x), y) + C(x)U(\alpha_2(x), y) = V(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (15)$$

которую в терминах функций

$$V_k^\pm(x, y) = V(x, y), \quad (x, y) \in D_k^\pm \quad (k = 0, 1, 2), \quad (16)$$

$$U_k^\pm(x, y) = U(x, y), \quad (x, y) \in D_k^\pm \quad (k = 0, 1, 2), \quad (17)$$

с учетом (8), (9), (14), (15) можно записать в форме матричной системы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\overline{V}(x, y) \equiv \overline{V}_{xx}(x, y) + H(-y)\overline{V}_{yy}(x, y) - H(y)\mathcal{D}_{0y}^\alpha \overline{V}(x, \xi) - \\ - H(y - \tau)\mathcal{Q}\overline{V}(x, y - \tau) = 0, \quad (x, y) \in D_0^\pm, \end{aligned} \quad (18)$$

$$R(x)\overline{U}^\pm(x, y) - \overline{\Phi}(x, y) = \overline{V}(x, y), \quad (x, y) \in D_0^\pm, \quad (19)$$

где

$$\bar{V}(x, y) = \left(V_0^\pm(x, y), V_1^\pm(\alpha_2(x), y), V_2^\pm(\alpha_2^2(x), y) \right)^T, \quad (20)$$

$$\bar{U}^\pm(x, y) = \left(U_0^\pm(x, y), U_1^\pm(\alpha_2(x), y), U_2^\pm(\alpha_2^2(x), y) \right)^T, \quad (21)$$

$$R(x) = (\bar{R}_0(x), \bar{R}_1(x), \bar{R}_2(x))^T, \quad \bar{\Phi}(x, y) = (\Phi_0(x, y), \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y))^T, \quad (22)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \beta & \delta & 0 \\ 0 & \beta & \delta \\ \gamma & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (23)$$

причем компоненты матрицы $R(x)$ и вектора $\bar{\Phi}(x, y)$ из (22) имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{R}_0(x) &= (A(x), C(x), 0), & \Phi_0(x, y) &= B(x) r(\alpha_1^2(x), y); \\ \bar{R}_1(x) &= (0, A(\alpha_2(x)), C(\alpha_2(x))), & \Phi_1(x, y) &= B(\alpha_2(x)) r(\alpha_1(x), y); \\ \bar{R}_2(x) &= (-B(\alpha_2^2(x)), 0, A(\alpha_2^2(x))), & \Phi_2(x, y) &= -C(\alpha_2^2(x)) q(\alpha_2^3(x), y). \end{aligned}$$

Если определитель $|R(x)| \neq 0$, $x_0 \leq x \leq x_3$, то единственное решение задачи T в области D в терминах функций (16), (17), (20), (21) может быть получено из (19) в форме

$$\bar{U}^\pm(x, y) = R^{-1}(x) (\bar{\Phi}(x, y) + \bar{V}(x, y)), \quad (x, y) \in D_0^\pm, \quad (24)$$

где обратная матрица

$$R^{-1}(x) = \left(\bar{R}_0^{-1}(x), \bar{R}_1^{-1}(x), \bar{R}_2^{-1}(x) \right)^T, \quad (25)$$

имеет компоненты

$$\begin{aligned} \bar{R}_0^{-1}(x) |R(x)| &= \left(A(\alpha_2(x)) A(\alpha_2^2(x)), -C(x) A(\alpha_2^2(x)), C(x) C(\alpha_2(x)) \right), \\ \bar{R}_1^{-1}(x) |R(x)| &= \left(-B(\alpha_2^2(x)) C(\alpha_2(x)), A(x) A(\alpha_2^2(x)), -A(x) C(\alpha_2(x)) \right), \\ \bar{R}_2^{-1}(x) |R(x)| &= \left(B(\alpha_2^2(x)) A(\alpha_2(x)), -B(\alpha_2^2(x)) C(x), A(x) A(\alpha_2(x)) \right), \end{aligned}$$

причем

$$|R(x)| = A(x) A(\alpha_2(x)) A(\alpha_2^2(x)) - C(x) C(\alpha_2(x)) B(\alpha_2^2(x)),$$

а для $\bar{V}(x, y)$ согласно (6)–(12) и равенству (13) должна быть решена

Задача $T_{\bar{V}}$. Найти в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$ регулярное решение $\bar{V}(x, y)$ уравнения (18), удовлетворяющее краевым условиям

$$\bar{V}(x_0, y) = \bar{V}(x_1, y) = 0, \quad -\tau \leq y < +\infty, \quad (26)$$

$$\bar{V}(x, -\tau) = R(x) \bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\tau), \quad x_0 \leq x \leq x_1, \quad (27)$$

условиям сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0-} \bar{V}(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} \mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1} \bar{V}(x, \xi) = R(x) \bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0), \quad (28)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0-} \bar{V}_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} \mathcal{D}_{0y}^\alpha \bar{V}(x, \xi) = R(x) \bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0), \quad (29)$$

где

$$\bar{\varphi}(x) = \left(\varphi(x), \varphi(\alpha_2(x)), \varphi(\alpha_2^2(x)) \right)^T \quad (30)$$

— заданная непрерывная достаточно гладкая вектор-функция, а

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(x) &= \left(\omega(x), \omega(\alpha_2(x)), \omega(\alpha_2^2(x)) \right)^T, \\ \bar{\nu}(x) &= \left(\nu(x), \nu(\alpha_2(x)), \nu(\alpha_2^2(x)) \right)^T\end{aligned}\tag{31}$$

— вектор-функции, подлежащие определению.

2. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ T

Теорема. Если $A(x), B(x), C(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x), \varphi(x) \in \mathbb{C}[x_0, x_3] \cap \mathbb{C}^2(x_0, x_3)$; $r(x, y) \in \mathbb{C}(\overline{D_{-2} \cup D_{-1}}) \cap \mathbb{C}^2(D_{-2} \cup D_{-1})$; $q(x, y) \in \mathbb{C}(\overline{D_3}) \cap \mathbb{C}^2(D_3)$ абсолютно интегрируемы на своих промежутках; $B(x_3) = C(x_0) = 0$, $\varphi(x_0) = \varphi(x_3) = 0$, $r(x_k, y) = 0$ ($k = -2, -1, 0$), $q(x_n, y) = 0$ ($n = 3, 4$), то существует единственное решение задачи T .

Доказательство. 1. *Единственность решения задачи T* для уравнения (5) в области D следует из того, что однородная задача T имеет тривиальное решение $\bar{U}^\pm(x, y) \equiv 0$ в $\overline{D_0^\pm}$ при условии, что однородная задача $T_{\bar{V}}$ имеет в области $\overline{D_0^\pm}$ тривиальное решение $\bar{V}(x, y) \equiv 0$. Доказательство этого факта основано на установлении знакоопределенности интеграла

$$\bar{\beta} = \int_{x_0}^{x_1} [R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)] \cdot [R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0)] dx.$$

Лемма 1. Если $\bar{V}(x, y)$ — регулярное решение уравнения (18) в области D_0^- из класса $\mathbb{C}(\overline{D_0^-}) \cap \mathbb{C}^2(D_0^-)$, обращающееся в нуль на $x = x_0, x_1$, $-\tau \leq y \leq 0$; $y = -\tau$, $x_0 \leq x \leq x_1$, то

$$\bar{\beta} \geq 0\tag{32}$$

и

$$\bar{\beta} = \iint_{D_0^-} \left[\left(\bar{V}_x^-(x, y) \right)^2 + \left(\bar{V}_y^-(x, y) \right)^2 \right] dx dy.\tag{33}$$

Доказательство леммы для уравнения

$$\mathcal{L}\bar{V}(x, y) \equiv \bar{V}_{xx}^-(x, y) + \bar{V}_{yy}^-(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D_0^-, \tag{181}$$

следует из тождества

$$\begin{aligned}\bar{V}^-(x, y)\mathcal{L}\bar{V}(x, y) &\equiv \left(\bar{V}^-(x, y)\bar{V}_x^-(x, y) \right)_x + \left(\bar{V}^-(x, y)\bar{V}_y^-(x, y) \right)_y - \\ &\quad - \left(\bar{V}_x^-(x, y) \right)^2 - \left(\bar{V}_y^-(x, y) \right)^2 = 0, \quad (x, y) \in D_0^-, \end{aligned}$$

интегрируя которое по области $D_{0\varepsilon}^- = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, -\tau < y < -\varepsilon\}$ ($0 < \varepsilon \equiv \text{const}$), применяя формулу Грина ([7], с. 541–544), в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ на основании (28), (29) и регулярности решения $\bar{V}^-(x, y)$ получим (32), (33). $\square$

Лемма 2. Если $\bar{V}(x, y)$ — регулярное решение уравнения

$$\mathcal{L}\bar{V}(x, y) \equiv \bar{V}_{xx}^+(x, y) - \mathcal{D}_{0y}^\alpha \bar{V}^+(x, \xi) - H(y - \tau)\mathcal{Q}\bar{V}^+(x, y - \tau) = 0, \quad (x, y) \in D_0^+, \tag{182}$$

в области D_0^+ , обращающееся в нуль при $x = x_k$ ($k = 0, 1$), $y \geq 0$, то

$$\bar{\beta} \leq 0 \quad \text{и} \quad \bar{\beta} = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{d}{dx} \left(R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0) \right) \right]^2 dx.\tag{34}$$

Доказательство. В области D_0^+ из уравнения (18₂) в силу регулярности решения $\bar{V}^+(x, y)$ и условий (28)–(31) при $y \rightarrow 0+$ найдем выражение

$$\Gamma(\alpha) [R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0)] = \frac{d^2}{dx^2} [R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)], \quad x_0 < x < x_1, \quad (35)$$

являющееся *функциональным соотношением* между $\bar{\omega}(x)$ и $\bar{\nu}(x)$, привнесенным из D_0^+ на линию изменения типа $I_0 = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y = 0\}$.

Тогда с учетом (35) и (12)

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \int_{x_0}^{x_1} [R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)] \cdot [R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0)] dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} [R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)] \cdot \frac{d^2}{dx^2} [R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)] dx = \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{d}{dx} (R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)) \right]^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

□

Замечание 1. Функциональное соотношение (35) представимо в форме

$$\frac{d}{dx} [R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)] = \int_{x_0}^{x_1} M(\xi) [R(\xi)\bar{\nu}(\xi) - \bar{\Phi}_y(\xi, 0)] d\xi, \quad (35')$$

где

$$M(\xi) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x_1} \begin{cases} \xi, & x \geq \xi; \\ \xi - x_1, & \xi \geq x. \end{cases}$$

Из леммы 1 и леммы 2 в силу (32), (34) имеем $\bar{\beta} = 0$.

Поэтому на основании регулярности решения из положительно определенного интеграла (33) следует

$$\bar{V}^-(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \bar{D}_0^-. \quad (36)$$

Кроме того, в силу $\bar{\beta} = 0$ и положительной определенности интеграла в (34) имеем $\frac{d}{dx} [R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)] \equiv 0$, $x_0 \leq x \leq x_1$. Значит, $R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0) \equiv \text{const}$, $x_0 \leq x \leq x_1$, и на основании (28) $\lim_{y \rightarrow 0+} \mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \equiv \text{const}$, $x_0 \leq x \leq x_1$.

Регулярность решения $\bar{V}^+(x, y)$ и однородность условий приводит к утверждению

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) = 0, \quad R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0) = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1. \quad (37)$$

Следовательно, в силу (35) и (29) получаем

$$R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} \mathcal{D}_{0y}^{\alpha} \bar{V}^+(x, \xi) = 0, \quad x_0 < x < x_1. \quad (38)$$

Лемма 3. Однородная смешанная задача (18₂), (26), (37) в области D_0^+ имеет тривиальное решение, т. е.

$$\bar{V}^+(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \bar{D}_0^+. \quad (39)$$

Доказательство. Пусть $D_0^+ = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y > 0\} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_{k0}^+$, где $D_{k0}^+ = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, k\tau < y < (k+1)\tau\}$.

Уравнение (18₂) в области D_{k0}^+ запишем в форме

$$\mathcal{L}\bar{V}(x, y) \equiv \bar{V}_{xx}^+(x, y) - \mathcal{D}_{k\tau, y}^\alpha \bar{V}^+(x, \xi) - \mathcal{D}_{0, k\tau}^\alpha \bar{V}^+(x, \xi) - H(y - \tau) \mathcal{Q}\bar{V}^+(x, y - \tau) = 0, \\ (x, y) \in D_{k0}^+,$$

и проинтегрируем по области

$$D_{k0\varepsilon}^+ = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, k\tau + \varepsilon < y < (k+1)\tau - \varepsilon\} \quad (0 < \varepsilon \equiv \text{const})$$

тождество

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \right) \mathcal{L}\bar{V}(x, y) &\equiv \left(\bar{V}_x^+(x, y) \mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \right)_x - \frac{1}{2} \left(\left(\mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \right)^2 \right)_y - \\ &- \bar{V}_x^+(x, y) \mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}_x^+(x, \xi) - H(y - \tau) \mathcal{Q}\bar{V}^+(x, y - \tau) \mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) - \\ &- \left(\mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \right) \mathcal{D}_{0, k\tau}^\alpha \bar{V}^+(x, \xi) = 0. \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина ([7], с. 541–544), однородность граничных условий (26) и регулярность решения задачи $T_{\bar{V}}$, в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \right)^2 \Big|_{y=k\tau} dx - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \right)^2 \Big|_{y=(k+1)\tau} dx - \\ - \iint_{D_{k0}^+} \left[\bar{V}_x^+(x, y) \mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}_x^+(x, \xi) + \left(\mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \right) \mathcal{D}_{0, k\tau}^\alpha \bar{V}^+(x, \xi) + \right. \\ \left. + H(y - \tau) \mathcal{Q}\bar{V}^+(x, y - \tau) \mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \right] dx dy = 0, \quad (x, y) \in D_{k0}^+. \quad (40) \end{aligned}$$

Первый двойной интеграл в (40) положительно определен, поскольку аналогично ([8], с. 43) с учетом (3) можно показать

$$\begin{aligned} \iint_{D_{k0}^+} \bar{V}_x^+(x, y) \mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}_x^+(x, \xi) dx dy = \\ = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} \left[\left(\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \bar{V}_x^+(x, y) \cos sy dy \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \bar{V}_x^+(x, y) \sin sy dy \right)^2 \right] ds \geq 0. \quad (41) \end{aligned}$$

Следовательно, при $k = 0$, т. е. в области $D_{00}^+ = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, 0 < y < \tau\}$, из (40) и (38), (41) приходим к положительно определенной форме

$$\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \right)^2 \Big|_{y=\tau} dx + \iint_{D_{00}^+} \bar{V}_x^+(x, y) \mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1} \bar{V}_x^+(x, \xi) dx dy = 0,$$

которая позволяет утверждать

$$\lim_{y \rightarrow \tau} \mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) = 0, \quad (42)$$

и в силу регулярности решения

$$\bar{V}^+(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \bar{D}_{00}^+. \quad (43)$$

Аналогично при $k = 1$, т.е. в области $D_{10}^+ = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, \tau < y < 2\tau\}$, из (40) и (42), (43) приходим к положительно определенной форме

$$\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left(\mathcal{D}_{\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) \right)^2 \Big|_{y=2\tau} dx + \iint_{D_{10}^+} \bar{V}_x(x, y) \mathcal{D}_{\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}_x^+(x, \xi) dx dy = 0,$$

которая позволяет утверждать $\lim_{y \rightarrow 2\tau} \mathcal{D}_{\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) = 0$, и в силу регулярности решения $\bar{V}^+(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{D}_{10}^+$. Продолжая этот процесс, на k -м ($k = 2, 3, \dots$) шаге, т.е. в области $D_{k0}^+ = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, k\tau < y < (k+1)\tau\}$, придем к утверждениям

$$\lim_{y \rightarrow (k+1)\tau} \mathcal{D}_{k\tau, y}^{\alpha-1} \bar{V}^+(x, \xi) = 0; \quad \bar{V}^+(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \bar{D}_{k0}^+ \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Таким образом, $\bar{V}^+(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{D}_0^+$. □

Равенства (36), (39) приводят к выводу: $\bar{V}(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{D}_0$.

Единственность решения задачи $T_{\bar{V}}$ доказана.

Из (24) в силу $\bar{V}(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \bar{D}_0$, следует тривиальность решения однородной задачи в области $\bar{D}_0$, т.е. *единственность решения задачи T .*

2. Найдём решение $\bar{V}^-(x, y)$ задачи $T_{\bar{V}}$ в области D_0^- .

Лемма 4. Если $\bar{\omega}(x), \bar{\varphi}(x) \in \mathbb{C}[x_0, x_1] \cap \mathbb{C}^2(x_0, x_1)$, $\bar{\omega}(x_0) = \bar{\omega}(x_1) = \bar{\varphi}(x_0) = \bar{\varphi}(x_1) = 0$, то существует единственное решение $\bar{V}^-(x, y) \in \mathbb{C}(\bar{D}_0^-) \cap \mathbb{C}^2(D_0^-)$ задачи Дирихле (18₁), (26)–(28) вида

$$\begin{aligned} \bar{V}^-(x, y) = & \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ \mathcal{P}_x^i[\tau(2k+1)-(y+\tau)] - \mathcal{P}_x^i[\tau(2k+1)+(y+\tau)] \right\} (R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)) + \\ & + \sum_{k=0}^{+\infty} \left\{ \mathcal{P}_x^i[\tau(2k+1)+y] - \mathcal{P}_x^i[\tau(2k+1)-y] \right\} (R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\tau)), \quad (x, y) \in D_0^-, \end{aligned} \quad (44)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{V}^-(x, y) = & \frac{i}{2\pi} \int_{x_0}^{x_1} (R(\xi)\bar{\omega}(\xi) - \bar{\Phi}(\xi, 0)) N(x, y + \tau, \xi) d\xi - \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{x_0}^{x_1} (R(\xi)\bar{\varphi}(\xi) - \bar{\Phi}(\xi, -\tau)) N(x, y, \xi) d\xi, \quad (x, y) \in D_0^-, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$N(x, y, \xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \frac{\gamma_{1k}^+(x, y, \xi) \gamma_{2k}^+(x, y, \xi)}{\gamma_{1k}^-(x, y, \xi) \gamma_{2k}^-(x, y, \xi)}, \quad (46)$$

а

$$\gamma_{jk}^\pm(x, y, \xi) = \cos[\pi(\xi + (-1)^j(x \pm iy))/x_1] - \operatorname{ch}[\pi\tau(2k+1)/x_1], \quad j = 1, 2; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Доказательство. Решение задачи Дирихле для уравнения (18₁) в области D_0^- будем искать с помощью непосредственно проверяемого общего решения

$$\bar{V}^-(x, y) = \bar{C}_1(x + iy) + \bar{C}_2(x - iy), \quad (47)$$

где $\bar{C}_1(t), \bar{C}_2(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые произвольные вектор-функции.

Используя условия (27), (28) в (47), аналогично [9] найдем вектор-функции

$$\begin{aligned}\bar{C}_1(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}_x^{2ik\tau} (R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}_x^{i\tau(2k+1)} (R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\tau)), \\ \bar{C}_2(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}_x^{i\tau(2k+1)} (R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\tau)) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}_x^{2i\tau(k+1)} (R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)),\end{aligned}$$

которые после подстановки в (47) приведут к решению (44) задачи Дирихле (18₁), (26)–(28).

Любая ([10], с. 7) финитная на промежутке $[x_0, x_1] = [0, x_1]$ непрерывная функция

$$f(x) = (f(\xi), \delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)) = \int_{x_0}^{x_1} f(\xi) [\delta(\xi - x) - \delta(\xi + x)] d\xi, \quad (48)$$

где дельта-функция ([7], с. 711–714) Дирака

$$\delta(z) = \frac{1}{2x_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda_m z), \quad \lambda_m = m\pi/x_1. \quad (49)$$

Поэтому, применяя к (44) выражения (48)–(49), учитывая формулу 5.4.12.1 из ([11], с. 739), аналогично [12] получим интегральное представление решения задачи Дирихле (18₁), (26)–(28) в форме (45), (46), причем

$$N(x, y, \xi) \in \mathbb{C}(\bar{D}_0^-) \cap \mathbb{C}^2(D_0^-). \quad \square$$

Найдем *функциональное соотношение* между $\bar{\omega}(x)$ и $\bar{\nu}(x)$, привнесенное из D_0^- на линию изменения типа $I_0 = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y = 0\}$.

Условие (29) и решение (44) позволяют записать

$$\begin{aligned}R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0) &= -i \frac{d}{dx} (R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)) + 2i \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}_x^{2i\tau k} \frac{d}{dx} (R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)) - \\ &\quad - 2i \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}_x^{i\tau(2k+1)} \frac{d}{dx} (R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\tau)), \quad x_0 < x < x_1,\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}(1 - \mathcal{P}_x^{2i\tau}) (R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0)) &= i (1 + \mathcal{P}_x^{2i\tau}) \left(\frac{d}{dx} (R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)) \right) - \\ &\quad - 2i \mathcal{P}_x^{i\tau} \left(\frac{d}{dx} (R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\tau)) \right), \quad x_0 < x < x_1. \quad (50)\end{aligned}$$

Полученное выражение является искомым функциональным соотношением.

3. Найдем решение $\bar{V}^+(x, y)$ задачи $T_{\bar{V}}$ в области D_0^+ .

Лемма 5. Если $\bar{\omega}(x) \in \mathbb{C}[x_0, x_1] \cap \mathbb{C}^2(x_0, x_1)$, $\bar{\omega}(x_0) = \bar{\omega}(x_1) = 0$, то существует единственное регулярное решение $\bar{V}^+(x, y)$ смешанной задачи (18₂), (26), (28) в области D_0^+ вида

$$\bar{V}^+(x, y) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, \xi) [R(\xi)\bar{\omega}(\xi) - \bar{\Phi}(\xi, 0)] d\xi, \quad (51)$$

где

$$G(x, y, \xi) = \frac{2}{x_1} \sum_{n=1}^{+\infty} S_n(y) \sin \lambda_n x \sin \lambda_n \xi \quad (52)$$

— фундаментальное решение задачи (18₂), (26), (28), $\lambda_n = n\pi/x_1$, а

$$S_n(y) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \mathcal{Q}^m H(y - m\tau)(y - m\tau)^{\alpha(m+1)-1} \mathcal{E}_{\alpha, \alpha(m+1)}^{m+1} (-\lambda_n^2(y - m\tau)^\alpha), \quad (53)$$

причем $\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^\rho(t)$ — обобщенная функция типа Миттаг-Леффлера ([13], сс. 45, 67) определяемая рядом

$$\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^\rho(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\rho)_k t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} = \frac{1}{\Gamma(\rho)} \mathcal{H}_{12}^{11} \left[-t \left| \begin{matrix} (1 - \rho, 1) \\ (0, 1), (1 - \beta, \alpha) \end{matrix} \right. \right], \quad (54)$$

$(\rho)_k$ — символ Похгаммера ([13], с. 24), а $\mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right]$ — функция Фокса ([13], с. 58).

Доказательство. Решение задачи (18₂), (26), (28) будем искать в виде ряда Фурье

$$\bar{V}^+(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n(y) \sin \lambda_n x, \quad (x, y) \in \bar{D}_0^+, \quad (55)$$

где $r_n(y)$ — функция, подлежащая определению.

Разложимость начальной функции $\bar{\omega}(x)$ в ряд Фурье по синусам является необходимым условием разрешимости задачи (18₂), (26), (28) в классе функций, определяемых рядом (55). Такое представление имеет место тогда и только тогда, когда функция $\bar{\omega}(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывные производные второго порядка и $\bar{\omega}(x_0) = \bar{\omega}(x_1) = 0$.

Считая, что ряд (55) равномерно сходится в $\bar{D}_0^+$; равномерно сходятся ряды, полученные двукратным дифференцированием по x и взятием дробной производной по y порядка $0 < \alpha < 1$ в D_0^+ , подставляя (55) в (18₂), (26), (28), для определения $r_n(y)$ придем к задаче

$$\mathcal{D}_{0y}^\alpha r_n(\xi) + \lambda_n^2 r_n(y) + H(y - \tau) \mathcal{Q} r_n(y - \tau) = 0, \quad y \geq 0, \quad (56)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1} r_n(\xi) = \gamma_n, \quad (57)$$

где $\gamma_n = \frac{2}{x_1} \int_{x_0}^{x_1} [R(x) \bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)] \sin \lambda_n x dx$.

Будем искать решение $r_n(y)$ задачи (56), (57) с помощью интегрального преобразования Лапласа ([14], с. 30). Пусть $r_n(y) \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-py} r_n(y) dy = \bar{r}_n(p)$ — изображение по Лапласу функции $r_n(y)$, причем $H(y - \tau) r_n(y - \tau) \rightarrow e^{-p\tau} \bar{r}_n(p)$, а ([13], с. 84) $\mathcal{D}_{0y}^\alpha r_n(\xi) \rightarrow p^\alpha \bar{r}_n(p) - \lim_{y \rightarrow 0+} \mathcal{D}_{0y}^{\alpha-1} r_n(\xi) = p^\alpha \bar{r}_n(p) - \gamma_n$. Применяя к (56), (57) преобразование Лапласа, получим операторное уравнение

$$(p^\alpha + \lambda_n^2 + \mathcal{Q} e^{-p\tau}) \bar{r}_n(p) = \gamma_n,$$

которое дает операторное решение

$$\bar{r}_n(p) = \frac{\gamma_n}{p^\alpha + \lambda_n^2 + \mathcal{Q} e^{-p\tau}} = \gamma_n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m e^{-mp\tau} \mathcal{Q}^m}{(p^\alpha + \lambda_n^2)^{m+1}}, \quad (58)$$

так как $|e^{-p\tau} \mathcal{Q} / (p^\alpha + \lambda_n^2)| < 1$ при достаточно больших p . Учитывая, что ([13], с. 47)

$$\frac{1}{(p^\alpha + \lambda_n^2)^{m+1}} \leftarrow y^{\alpha(m+1)-1} \mathcal{E}_{\alpha, \alpha(m+1)}^{m+1} (-\lambda_n^2 y^\alpha), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

по теореме о запаздывании оригинала найдем

$$\frac{e^{-m\tau}}{(p^\alpha + \lambda_n^2)^{m+1}} \leftarrow (y - m\tau)^{\alpha(m+1)-1} \mathcal{E}_{\alpha, \alpha(m+1)}^{m+1} (-\lambda_n^2 (y - m\tau)^\alpha) H(y - m\tau), \quad (59)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, для изображения $\bar{r}_n(p)$ операторного решения (58) уравнения (56) имеем на основании (58), (59) оригинал $r_n(y) = \gamma_n S_n(y)$, $y \geq 0$, где $S_n(y)$ определяется равенством (53).

В частности, если, например, собственные значения q_1, q_2, q_3 матрицы $\mathcal{Q}$ из (23) различны, то существует ([15], с.218) невырожденная матрица T , приводящая матрицу $\mathcal{Q}$ к диагональному виду, т.е.

$$T^{-1} \mathcal{Q} T = \Lambda = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\mathcal{Q}^m = T \Lambda^m T^{-1}$ и, значит, (53) будет иметь представление

$$S_n(y) = T \begin{pmatrix} S_{n_1}(y) & 0 & 0 \\ 0 & S_{n_2}(y) & 0 \\ 0 & 0 & S_{n_3}(y) \end{pmatrix} T^{-1},$$

где

$$S_{n_k}(y) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m q_k^m H(y - m\tau) (y - m\tau)^{\alpha(m+1)-1} \mathcal{E}_{\alpha, \alpha(m+1)}^{m+1} (-\lambda_k^2 (y - m\tau)^\alpha), \quad k = 1, 2, 3. \quad (60)$$

Воспользовавшись для (54) асимптотикой $\mathcal{H}$ -функции Фокса ([13], с.62) при больших значениях аргумента

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right. \right] = O(z^\delta), \quad \delta = \min_{1 \leq j \leq n} \left[\frac{a_j - 1}{A_j} \right],$$

получим для ряда $S_{n_k}(y)$ из (60) абсолютно и равномерно сходящийся при всех y мажорирующий ряд

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{q_k^m H(y - m\tau)}{\lambda_n^{2(m+1)} \Gamma(m+1) (y - m\tau)} \quad (k = 1, 2, 3),$$

что позволяет доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда (52) в $\bar{D}_0^+$ и, значит, $\bar{V}^+(x, y) \in \mathbb{C}(\bar{D}_0^+)$.

Аналогично можно показать, что ряды, полученные из (52) двукратным почленным дифференцированием по x и взятием почленно дробной производной по y порядка α , сходятся абсолютно и равномерно в D_0^+ , т.е. $\bar{V}^+(x, y)$ удовлетворяет уравнению (18₂), начальным, граничным условиям (26), (28) и является единственным регулярным решением задачи $T_{\bar{V}}$ в D_0^+ . $\square$

Замечание 2. Функциональное соотношение (35) между $\bar{\omega}(x)$ и $\bar{\nu}(x)$, привнесенное из D_0^+ на линию изменения типа $I_0 = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y = 0\}$, можно также найти из (51), учитывая там условие (29).

4. *Вопрос существования решения задачи $T_{\bar{V}}$ в области D_0 в силу условий сопряжения (28), (29) сводится к разрешимости системы функциональных соотношений (35'), (50), т.е.*

к разностному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} (1 - \mathcal{P}_x^{2i\tau}) (R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)) = \\ = i (1 + \mathcal{P}_x^{2i\tau}) \int_{x_0}^{x_1} M(\xi) [R(\xi)\bar{\nu}(\xi) - \bar{\Phi}_y(\xi, 0)] d\xi - \\ - 2i\mathcal{P}_x^{i\tau} \left(\frac{d}{dx} (R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\tau)) \right), \quad x_0 < x < x_1, \end{aligned}$$

которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0) = \\ = -i (\mathcal{P}_x^{-i\tau} + \mathcal{P}_x^{i\tau}) \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}_x^{i\tau(2k+1)} \int_{x_0}^{x_1} M(\xi) [R(\xi)\bar{\nu}(\xi) - \bar{\Phi}_y(\xi, 0)] d\xi - \\ - 2i \sum_{k=0}^{+\infty} \mathcal{P}_x^{i\tau(2k+1)} \left(\frac{d}{dx} (R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\tau)) \right), \quad x_0 < x < x_1. \quad (61) \end{aligned}$$

Применение выражений (48)–(49) и формулы 5.4.12.1 из ([11], с. 739) аналогично [9][12] приводит уравнение (61) к уравнению Фредгольма ([16], с. 98):

$$\begin{aligned} R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0) + \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_1} [R(t)\bar{\nu}(t) - \bar{\Phi}_y(t, 0)] W(x, t) dt = \\ = \mu(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_1} F(x, \xi) \frac{d}{d\xi} (R(\xi)\bar{\varphi}(\xi) - \bar{\Phi}(\xi, -\tau)) d\xi, \quad x_0 < x < x_1, \quad (62) \end{aligned}$$

где

$$W(x, t) = M(t) \int_{x_0}^{x_1} (\mathcal{P}_x^{-i\tau} + \mathcal{P}_x^{i\tau}) F(x, \xi) d\xi, \quad (63)$$

$$F(x, \xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \gamma_k^+(x, \xi) \gamma_k^-(x, \xi), \quad (64)$$

$$\gamma_k^\pm(x, \xi) = \cos[\pi(\xi \pm x)/x_1] - \operatorname{ch}[\pi\tau(2k+1)/x_1],$$

причем

$$W(x, t) \in \mathbb{C}^1(x_0 \leq x, t \leq x_1) \cap \mathbb{C}^2(x_0 < x, t < x_1), \quad (65)$$

а $\mu(x) \in \mathbb{C}^1(x_0 \leq x \leq x_1) \cap \mathbb{C}^2(x_0 < x < x_1)$.

Выполнимость включений (65) следует, например, из того, что ряд (64) абсолютно и равномерно сходится в области $x_0 \leq x, \xi \leq x_1$, поскольку входящие в него ряды

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \gamma_k^\pm(x, \xi) = -\frac{\pi}{x_1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[\pi(\xi \pm x)/x_1]}{\cos[\pi(\xi \pm x)/x_1] - \operatorname{ch}[\pi\tau(2k+1)/x_1]}$$

в силу того, что $|\sin[\pi(\xi \pm x)/x_1]| \leq 1$, $|\cos[\pi(\xi \pm x)/x_1]| \leq 1$ и

$$\begin{aligned} |\operatorname{ch}[\pi\tau(2k+1)/x_1] - \cos[\pi(\xi \pm x)/x_1]| &\geq \operatorname{ch}[\pi\tau(2k+1)/x_1] - 1 = \\ &= 2\operatorname{sh}^2[\pi\tau(2k+1)/2x_1] \geq 2[\pi\tau(2k+1)/2x_1]^2 \end{aligned}$$

мажорируются сходящимся числовым рядом

$$\frac{2x_1}{\pi\tau^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi x_1}{4\tau^2}$$

согласно ([11], с. 653), и потому из (62)–(64) имеем

$$\begin{aligned} F(x, \xi) &\in \mathbb{C}(x_0 \leq x, \xi \leq x_1), \\ W(x, t) &\in \mathbb{C}(x_0 \leq x, t \leq x_1), \\ \mu(x) &\in \mathbb{C}(x_0 \leq x \leq x_1). \end{aligned}$$

Безусловная разрешимость уравнения Фредгольма (62) следует из единственности решения задачи $T_{\bar{V}}$, причем

$$R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0) \in \mathbb{C}^1(x_0, x_1),$$

а на основании (50) $R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0) \in \mathbb{C}[x_0, x_1] \cap \mathbb{C}^2(x_0, x_1)$.

Подставляя найденные значения $R(x)\bar{\nu}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0)$, $R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)$ в (44) (или (45)), (51), получим окончательный вид решений $\bar{V}^-(x, y)$ и $\bar{V}^+(x, y)$ задачи $T_{\bar{V}}$ в областях D_0^- и D_0^+ , т. е. искомую функцию $\bar{V}(x, y)$ задачи $T_{\bar{V}}$ в области $D_0 = D_0^- \cup D_0^+ \cup I_0$.

Единственное решение $U(x, y)$ задачи T в области D_0 , представимое формулой (24), можно записать согласно (17), (21), (25) в покомпонентной форме

$$U_k^\pm(\alpha_2^k(x), y) = \bar{R}_k^{-1}(\bar{\Phi}(x, y) + \bar{V}(x, y)), \quad (x, y) \in D_0^\pm \quad (k = 0, 1, 2),$$

или

$$U(x, y) = U_k^\pm(x, y) = \bar{R}_k^{-1}(\alpha_1^k(x)) \left(\bar{\Phi}(\alpha_1^k(x), y) + \bar{V}(\alpha_1^k(x), y) \right), \quad (x, y) \in D_k^\pm \quad (k = 0, 1, 2).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. *О существовании режима установившихся колебаний в задаче Коши для уравнения составного типа*, Журн. выч. матем. и матем. физики **41** (4), 641–647 (2001).
- [2] Муравник А.Б. *О задаче Коши для некоторых дифференциально-разностных уравнений параболического типа*, ДАН **385** (5), 604–607 (2002).
- [3] Зарубин А.Н. *Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом* (Изд-во Орловск. гос. ун-та, Орел, 1999).
- [4] Разгулин А.В. *Задача управления преобразованием аргументов в функционально-дифференциальных уравнениях математической физики* (МАКС Пресс, М., 2006).
- [5] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Наука и техника, Минск, 1987).
- [6] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, М., 1971).
- [7] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. *Курс математического анализа* (Наука, М., 1988).
- [8] Нахушев А.М. *Элементы дробного исчисления и их применение* (Изд-во КБНЦ РАН, Нальчик, 2000).
- [9] Зарубин А.Н. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с опережающе-запаздывающим аргументом*, Дифференц. уравнения **48** (10), 1404–1411 (2012).
- [10] Агранович М.С. *Обобщенные функции* (МЦНМО, М., 2008).
- [11] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции* (Наука, М., 1981).
- [12] Зарубин А.Н. *Задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа с переменным отклонением аргумента*, Дифференц. уравнения **51** (10), 1315–1327 (2015).
- [13] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations* (Elsevier, Amsterdam–Tokyo, 2005).

- [14] Диткин В.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление* (Наука, М., 1974).
- [15] Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры* (Наука, М., 1974).
- [16] Краснов М.Л. *Интегральные уравнения* (Наука, М., 1975).

Александр Николаевич Зарубин

Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева,

ул. Комсомольская, д. 95, г. Орел, 302026, Россия,

e-mail: aleks_zarubin@mail.ru

A.N. Zarubin

Boundary-value problem for a mixed composite functionally differential advancing-lagging equation with fractional derivative

Abstract. We examines a problem for mixed equation with composite fractional derivative and concentrated time deviation, functional delay and advance with respect to spatial variable. The problem is uniquely solvable.

Keywords: mixed-type equation, integral equations, difference equation, functional delay and advance, the fractional derivative.

Aleksandr Nikolaevich Zarubin

Orel State University,

95 Komsomol'skaya str., Orel, 302026 Russia,

e-mail: aleks_zarubin@mail.ru