Общероссийский математический портал

А. Р. Сафаров, О задаче сужения преобразования Фурье на гиперповерхности,
Изв. вузов. Матем., 2019, номер 4, 66–72

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-4-66-72>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 09:12:53

А.Р. САФАРОВ

О ЗАДАЧЕ СУЖЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Аннотация. Работа посвящена ограничениям преобразования Фурье на модельных гиперповерхностях. Применение методов разложения Литтлвуда–Пэли позволяет получить точные оценки для показателя суммируемости. Эти оценки улучшают результаты А.Гринлифа для модельных гиперповерхности.

Ключевые слова: преобразование Фурье, суммируемые функции, задача сужения.

УДК: 517.518

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-4-66-72

ВВЕДЕНИЕ

Пусть гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$ с римановой поверхностной мерой dS имеет конечный тип, т. е. каждая касательная гиперплоскость имеет конечный порядок касания с S . Рассмотрим плотность $d\mu := \psi dS$ на S , где $0 \leq \psi \in C_0^\infty(S)$ — пространство бесконечно-гладких функций с компактным носителем.

Основная цель работы — найти максимальное значение p , для которого справедлива оценка

$$\int_S |\widehat{f}(\xi)|^2 \psi(\xi) dS(\xi) \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})}^2 \quad (1)$$

для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, где $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ — пространство бесконечно-гладких финитных, т. е. с компактным носителем, функций. Здесь $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x) dx$ и $0 \leq \psi \in C_0^\infty(S)$ — фиксированная функция.

Эта задача называется проблемой об $L^p \rightarrow L^2$ ограничении преобразования Фурье [1]. Ограничение преобразования Фурье на нуль-мерных множествах имеет давнюю историю, начиная с классических результатов И.М. Стейна и П.А. Томаса (более подробно в [2], а также в [3]). Результаты работы [4] позволяют получить оценку снизу для более общего оператора ограничения.

Равномерные оценки преобразования Фурье мер позволяют получить оценку для p ([1]). В этой работе методом разложения Литтлвуда–Пэли получено решение проблемы об ограничении преобразования Фурье суммируемых функций для некоторых гиперповерхностей. Эти оценки улучшают результаты А.Гринлифа [1] для модельных гиперповерхностей. В работе [5] получены оценки для преобразования Фурье в терминах многогранников Ньютона.

Поступила в редакцию 26.12.2017, после доработки 05.11.2018. Принята к публикации 19.12.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований Республики Узбекистан, грант ОТ-Ф4-69.

Пусть S — гиперповерхность и $f \in \zeta(\mathbb{R}^{n+1})$, где $\zeta(\mathbb{R}^{n+1})$ — пространство Шварца, т. е. пространство бесконечно гладких быстро убывающих со всеми производными функций [6].

Основным результатом работы является

Теорема. Пусть S — гиперповерхность, определенная графиком функции $\xi_{n+1} = \xi_1^{m_1} \cdots \xi_l^{m_l}$ в окрестности нуля, при этом $m_1 + \cdots + m_l \geq 2$. Тогда для любой фиксированной неотрицательной функции $\psi \in C_0^\infty(S)$ при $p' \geq 2(1 + \max_{1 \leq j \leq l} \{m_j\})$ существует C_p такое, что для любой функции $f \in \zeta(\mathbb{R}^{n+1})$ справедлива оценка

$$\left(\int_S |\widehat{f}(\xi)|^2 \psi(\xi) dS(\xi) \right)^{1/2} \leq C_p \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}, \quad (2)$$

где p' — сопряженное к p число, т. е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Замечание 1. Если $l = 1$ и $m = 1$, то соответствующая гиперповерхность является гиперплоскостью и, следовательно, для любого $p > 1$ аналогичное неравенство не имеет места. В этом случае условие $m_1 + \cdots + m_l \geq 2$ теоремы также не выполняется.

В [7] получены точные оценки вида (2) в случае, когда $S \subset \mathbb{R}^4$ — гладкая поверхность коразмерности больше единицы, заданная в виде графика, т. е.

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_3 = \phi_1(x_1, x_2), x_4 = \phi_2(x_1, x_2)\},$$

где ϕ_1, ϕ_2 — однородные полиномы степени m_1 и m_2 , а также $m_1 \geq m_2 \geq 2$. При этом ϕ_1, ϕ_2 удовлетворяют некоторым условиям невырожденности. В нашем случае условия теоремы 1 ([7], с. 106) не выполняются.

В [8] получена связь между равномерными оценками и оценкой ограничения (2) для выпуклых гиперповерхностей конечно-линейного типа: если каждая прямая, лежащая на касательной гиперповерхности, имеет конечный порядок касания с гиперповерхностью. В нашем случае, вообще говоря, гиперповерхности не выпуклы и не удовлетворяют условиям конечности линейного типа.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Приведем утверждения, необходимые для доказательства основной теоремы.

Лемма 1. Пусть $\phi(\xi) = \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \cdots \xi_n^{m_n}$, где $m_j \geq 1$ — натуральные числа, $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \geq 2$. Тогда для любого $\xi^0 \in (\mathbb{R} \setminus 0)^n$ ранг матрицы гессиана $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0) \right)$ равен n .

Доказательство. Если $n = 1$ и, следовательно, $m_1 \geq 2$, то утверждение тривиально. Достаточно рассмотреть гессиан $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ в точке $(1, 1, \dots, 1)$. В противном случае через линейную замену переменных любую точку $\xi^0 \in (\mathbb{R} \setminus 0)^n$ приведем к точке $(1, 1, \dots, 1)$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\det \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(1, 1, \dots, 1) \right) = m_1^2 m_2^2 \cdots m_n^2 \det(D + A),$$

где $n \times n$ -матрицы

$$D := \begin{pmatrix} -\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{m_n} \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\text{rang } D = n$, $\text{rang } A = 1$, то $\dim(\text{Ker } A) = n - 1$. Докажем, что $\det(D + A) \neq 0$.

Запишем $D + A = D(I + D^{-1}A)$, где I — единичная $n \times n$ -матрица. Так как ранг матрицы $D^{-1}A$ равен единице, то $\lambda_1 = 1$ является $(n - 1)$ -кратным собственным значением матрицы $I + D^{-1}A$. С другой стороны, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n - 1 + \lambda_n = \text{tr}(I + D^{-1}A) = n - (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$. Таким образом, $\lambda_n = 1 - (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \neq 0$. Следовательно, $\det(I + D^{-1}A) = 1 - (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \neq 0$. $\square$

Если ϕ имеет вид $\phi(\xi) = \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_l^{m_l}$ (где $2 \leq l \leq n$) и $m_j \geq 1$, а также $m_1 + m_2 + \dots + m_l \geq 2$, то в точке $\xi^0 \in (\mathbb{R} \setminus 0)^n$ матрица $D^2\phi(\xi^0)$ имеет ранг l .

Лемма 2. Пусть ϕ удовлетворяет условиям леммы 1. Для любого элемента η функция $\phi(\xi, \eta) = \phi(\xi) + (\eta, \xi)$ имеет лишь невырожденные критические точки при $1/2 \leq |\xi_j| \leq 2$, где $j = \overline{1, n}$, более того, если $\phi(\xi) = \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_l^{m_l}$, то $\phi(\xi, \eta) = \phi(\xi) + (\eta^0, \xi)$ в точке $\xi^0 \in (\mathbb{R} \setminus 0)^n$ имеет критическую точку ранга l , где $\eta^0 = -\nabla\phi(\xi^0)$.

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай $l = n$. Как отметили выше, применяя линейную замену переменных, можем считать, что $\xi^0 = (1, 1, \dots, 1)$ — критическая точка фазовой функции. Из доказательства леммы 1 получим, что функция $\phi(\xi, \eta^0)$ в точке ξ^0 имеет невырожденную критическую точку, где $\eta^0 = -\nabla\phi(\xi^0)$. $\square$

Лемма 3. Пусть $\#\{m_j, m_j \geq 1\} \geq k$, и $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$, где $\#A$ — мощность конечного множества A . Тогда для любой фиксированной точки $\xi^0 \in K \subset (\mathbb{R} \setminus 0)^n$ (K — некоторое компактное множество) существует окрестность $U(\xi^0)$ этой точки такая, что при любой функции $\psi \in C_0^\infty(U(\xi^0))$ для преобразования Фурье меры $\mu : \hat{\mu}(\eta) = \int_S e^{i(\xi, \eta)} \psi(\xi) dS(\xi)$ справедлива оценка

$$|\hat{\mu}(\eta)| \leq C \|\psi\|_{C^k} (1 + |\eta|)^{-k/2},$$

причем константа C не зависит от $\xi^0 \in K$, где $\|\psi\|_{C^k}$ — норма функции ψ в пространстве $C^k(U(K))$; здесь $U \subset (\mathbb{R} \setminus 0)^n$ — окрестность компакта K .

Лемма 3 вытекает из леммы 2 с применением леммы Морса ([9], с. 66) и доказывается стандартными методами анализа.

Доказательство. Пусть $-\eta = \lambda\omega$, λ — неотрицательное вещественное число и $\omega \in S^n$ ($S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — единичная сфера с центром в начале координат). Фиксируем $\omega = \omega^0 \in S^n$. Если ω^0 неколлинеарна единичной нормали ν_0 к гиперповерхности S в точке $(\xi^0, \phi(\xi^0))$, то для фазовой функции

$$\Phi(\xi, \eta) = \lambda(\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \dots + \omega_n \xi_n + \omega_{n+1} \phi(\xi))$$

точка ξ^0 не является критической точкой. Следовательно, существуют окрестности $U(\xi^0)$ и $V(\omega^0)$ такие, что для произвольных точек $(\xi, \omega) \in U(\xi^0) \times V(\omega^0)$ имеем $\nabla_\xi \Phi(\xi, \eta) \neq 0$. Поэтому для произвольной амплитудной функции $\psi \in C_0^\infty(U(\xi^0))$ с помощью формулы интегрирования по частям имеем оценку

$$|\hat{\mu}(\eta)| \leq C_N \|\psi\|_{C^N} \lambda^N,$$

где N — любое фиксированное натуральное число, C_N — некоторое число, зависящее от N , $\|\psi\|_{C^N}$ — норма функции ψ в пространстве $C^N(U(\xi^0))$.

Пусть теперь ω^0 коллинеарна к ν_0 , т. е. $\omega^0 = \pm \nu_0$. Тогда $\nabla_\xi \Phi(\xi^0, \lambda\omega^0) = 0$. В частности, имеем $\omega_{n+1}^0 \neq 0$. Согласно лемме 2

$$\omega_{n+1}^0 \left(\frac{\omega_1}{\omega_{n+1}^0} \xi_1 + \dots + \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}^0} \xi_n + \Phi(\xi) \right)$$

в точке $\xi = \xi^0$ имеет критическую точку ранга k , т. е. ранг матрицы гессиана функции $\Phi(\xi)$ равен k . Согласно лемме Морса [9] существует семейство диффеоморфных отображений $g(\xi, \omega)$, определенных в достаточно малой окрестности $g : U(\xi^0) \times V(\omega^0) \rightarrow U(0) \times V(0) \subset \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\sigma^n$ такое, что справедливо соотношение

$$\Phi(\xi(g^{-1}(x, \sigma)), \lambda\omega(g^{-1}(x, \sigma))) = \lambda\omega_{n+1}^0(\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_k^2 + \Phi_0(x_{k+1}, \dots, x_n, \sigma)).$$

Таким образом, применяя замену переменных $x = g(\xi, \omega)$, имеем

$$\widehat{\mu}(\lambda\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(g^{-1}(x, \sigma)) |J(x, \sigma)| e^{i\lambda\omega_{n+1}(\pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_k^2 + \Phi_0(x_{k+1}, \dots, x_n, \sigma))} dx,$$

где $J(x, \sigma)$ — якобиан замены переменных.

Наконец, применяя лемму Ван дер Корпута k раз [2], получим

$$|\widehat{\mu}(\lambda\omega)| \leq \frac{C \|\psi\|_{C^k}}{\lambda^{k/2}}.$$

Стандартные рассуждения о конечном покрытии единичной сферы S^n завершают доказательство леммы. $\square$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Так как

$$|\widehat{f}(\xi)|^2 = \int_{\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}} e^{-2\pi i(x-y, \xi)} f(x) \overline{f}(y) dx dy,$$

то интеграл (1) записывается в виде

$$\int_S |\widehat{f}(\xi)|^2 \psi(\xi) dS(\xi) = \int_{\mathbb{R}_y^{n+1}} \overline{f}(y) \int_{\mathbb{R}_x^{n+1}} f(x) \widehat{\mu}(y-x) dx dy,$$

где $\widehat{\mu}(y-x) = \int_S e^{2\pi i(y-x, \xi)} \psi(\xi) dS(\xi)$.

Обозначим через T оператор свертки

$$Tf(y) := \int_{\mathbb{R}_x^{n+1}} f(x) \widehat{\mu}(y-x) dx.$$

Если $T : \mathbb{L}^p \rightarrow \mathbb{L}^{p'}$ — ограниченный оператор, то применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\left| \int_{\mathbb{R}_y^{n+1}} \overline{f}(y) Tf(y) dy \right| \leq \|f\|_{\mathbb{L}^p} \|Tf\|_{\mathbb{L}^{p'}} \leq C \|f\|_{\mathbb{L}^p}^2,$$

где $C = \|T\|_{\mathbb{L}^p \rightarrow \mathbb{L}^{p'}}$.

Далее, применяя методы [3], докажем ограниченность оператора T .

Пусть $y_{n+1} = \phi(y_1, \dots, y_n)$, где $\phi(0) = 0$, $\nabla \phi(0) = 0$. Согласно теореме А.Гринлифа, если выполняется неравенство $|\widehat{\mu}(y)| \leq c/(1+|y|)^r$, то при $p' \geq 2(1/r+1)$ сверточный оператор ограничен как оператор $T : \mathbb{L}^p \rightarrow \mathbb{L}^{p'}$ ([1]). В частности, если гауссова кривизна гиперповерхности S нигде не обращается в нуль, то при $p' \geq 2(2/n+1)$ оператор свертки ограничен. Условие $p' \geq 2(2/n+1)$ эквивалентно условию $p \leq 2(n+2)/(n+4)$. Оператор свертки ограничен для таких гиперповерхностей и, следовательно, имеет место неравенство (1) при таких значениях p . Однако если выполняется неравенство

$$|\widehat{\mu}(y)| \leq C \ln(2+|y|)^k / (1+|y|)^r,$$

где $k \geq 1$, то из результатов А.Гринлифа не следует ограниченность оператора T при $p' = 2(1/r+1)$, хотя следует ограниченность этого сверточного оператора при $p' > 2(1/r+1)$. Покажем, что для некоторых гиперповерхностей соответствующий оператор ограничен

также при $p' = 2(1/r + 1)$. Для этой цели применим методы теории Литтлвуда–Пэли ([10], гл. 3).

Пусть $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — бесконечно-гладкая неотрицательная четная функция, удовлетворяющая условию

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{при } |x| \geq 2, \end{cases} \quad \omega(x) = \chi(x) - \chi(2x).$$

Предположим, что $0 \leq \omega(x) \leq 1$.

Таким образом,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega(2^k x) = 1 \quad \text{при всех } x \neq 0.$$

Более того, последний ряд сходится локально равномерно в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ([10]). Аналогично имеем

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \omega(2^{k_1} x_1) \omega(2^{k_2} x_2) \cdots \omega(2^{k_n} x_n) = 1$$

для любого $x \neq 0$.

Введем обозначения

$$\widehat{\Delta_k f}(\xi) := \omega(2^{k_1} \xi_1) \omega(2^{k_2} \xi_2) \cdots \omega(2^{k_n} \xi_n) \widehat{f}(\xi) \quad \text{и} \quad \overline{\sum}(x) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |\Delta_k f(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Согласно теореме Литтлвуда–Пэли ([10], гл. 3) имеем

$$c_1^p \|f\|_{\mathbb{L}^p} \leq \left\| \overline{\sum} f \right\|_{\mathbb{L}^p} \leq c_2^p \|f\|_{\mathbb{L}^p},$$

где константы c_1^p, c_2^p не зависят от функции $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Пусть

$$J_k(f) := \int_S |\widehat{f}(\xi)|^2 \omega(2^{k_1} \xi_1) \omega(2^{k_2} \xi_2) \cdots \omega(2^{k_n} \xi_n) dS(\xi).$$

Запишем $J_k(f)$ в виде n -кратного интеграла

$$J_k(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi', \phi(\xi'))|^2 \omega(2^{k_1} \xi_1) \omega(2^{k_2} \xi_2) \cdots \omega(2^{k_n} \xi_n) \psi(\xi') \sqrt{1 + |\nabla \phi(\xi')|^2} d\xi',$$

где $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $\phi(\xi') = \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \cdots \xi_l^{m_l}$.

Будем считать, что носитель ψ достаточно мал и, следовательно, $k_j \geq 1$. В интеграле сделаем замену переменных $2^{k_1} \xi_1 = \eta_1, \dots, 2^{k_n} \xi_n = \eta_n$ и получим

$$J_k(f) = 2^{-|k|} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{F}(\eta, \eta_1^{m_1} \cdots \eta_l^{m_l})|^2 \omega(\eta_1) \cdots \omega(\eta_n) \psi(2^{-k} \eta) \sqrt{1 + |\nabla \Phi(2^{-k} \eta)|^2} d\eta,$$

где

$$\widehat{F}(\eta, \eta_1^{m_1} \cdots \eta_l^{m_l}) := \widehat{f}(2^{-k} \eta, 2^{-(k,m)} \eta_1^{m_1} \cdots \eta_l^{m_l}).$$

Для

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{2\pi i(\eta, x)} \widehat{F}(\eta) d\eta = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{2\pi i(\eta, x)} \widehat{f}(2^{-k} \eta, 2^{-(k,m)} \eta_{n+1}) d\eta$$

после замены переменных $2^{-k} \eta = \gamma, 2^{-(k,m)} \eta_{n+1} = \gamma_{n+1}$ имеем

$$F(x) = 2^{|k|+(k,m)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{2\pi i(2^k \gamma, x) + 2^{(k,m)} \gamma_{n+1} x_{n+1}} \widehat{f}(\gamma, \gamma_{n+1}) d\gamma = 2^{|k|+(k,m)} f(2^k x, 2^{(k,m)} x_{n+1}).$$

Итак,

$$F(x) = 2^{|k|+(k,m)} f(2^k x, 2^{(k,m)} x_{n+1}),$$

где $|k| = k_1 + \dots + k_l$ и $(k, m) = k_1 m_1 + \dots + k_l m_l$. Пусть

$$K := \{\eta := (\eta_1, \dots, \eta_n) \in R^n : 1/2 \leq |\eta_j| \leq 2, j = 1, \dots, n\}.$$

Это компактное множество, содержащее носитель функции $\omega(\eta_1) \dots \omega(\eta_n)$. Если $m_1, \dots, m_l \geq 1$, то с учетом справедливости включения $K \subset (R \setminus \{0\})^n$ согласно лемме 3 для $p \leq \frac{2(l+2)}{l+4}$ получим

$$J_k(f) \leq C 2^{-|k|} \|F\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|F\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}^2 &= 2^{2(|k|+(k,m))} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f(2^k x, 2^{(k,m)} x_{n+1})|^p dx \right)^{2/p} = \\ &= 2^{(|k|+(k,m))(2-2/p)} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}^2 = 2^{2 \frac{|k|+(k,m)}{p'}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J_k(f) \leq 2^{-|k|+2 \frac{|k|+(k,m)}{p'}} \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

Заметим справедливость следующих неравенств:

$$\begin{aligned} J_k(f) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi', \phi(\xi'))|^2 \omega^3(2^{k_1} \xi_1) \dots \omega^3(2^{k_n} \xi_n) \omega^3(2^{(k,m)} \phi(\xi')) \psi(\xi') \times \\ &\quad \times \sqrt{1 + |\nabla \phi(\xi')|^2} d\xi' = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{f}(\xi', \phi(\xi')) \omega(2^{k_1} \xi_1) \dots \omega(2^{k_n} \xi_n) \omega(2^{(k,m)} \phi(\xi')) \right|^2 \times \\ &\quad \times \omega(2^{k_1} \xi_1) \dots \omega(2^{k_n} \xi_n) \omega(2^{(k,m)} \phi(\xi')) \psi(\xi') \sqrt{1 + |\nabla \phi(\xi')|^2} d\xi' \leq \\ &\leq C 2^{-|k|+2 \frac{|k|+(k,m)}{p'}} \|\Delta_{k,(k,m)} f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}^2. \end{aligned}$$

Если $-|k| + 2 \frac{|k|+(k,m)}{p'} \leq 0$ или $p' \geq 2 \left(1 + \frac{(k,m)}{|k|}\right)$, то для любого $k \in N^n$ имеем

$$J_k(f) \leq C \|\Delta_{k,(k,m)} f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}^2,$$

$$J_k(f) = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 \psi(\xi) \sqrt{1 + |\nabla \phi(\xi)|^2} d\xi \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^n} J_k(f) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \|\Delta_k f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}^2.$$

Так как $p' > 2$, то $p < 2$. Последняя оценка может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \left(\int_S |\widehat{f}(\xi)|^2 \psi(\xi) dS(\xi) \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^n} \|\Delta_k f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\Delta_k f(x)|^p dx \right)^{2/p} \right)^{\frac{p}{2} \cdot \frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |\Delta_k f(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq c_{p'}^p \|f\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^{n+1})}. \end{aligned}$$

В последней оценке использовали неравенство Минковского, т.е. если $f(x)$ — вектор-функция со значением в нормированном пространстве, то справедливо неравенство

$$\left\| \int_A f(x) d\mu \right\| \leq \int_A \|f(x)\| d\mu.$$

Теорема доказана.

Заметим, что оценка $p' > 2(1 + \max\{m_l\})$ следует из результатов А.Гринлифа [1] с учетом [11] и [12]. Более того, если m_k — различные натуральные числа, то оценка $p' \geq 2(1 + \max\{m_l\})$ также следует из результатов А.Гринлифа [1]. Однако в случае, когда существуют m_{k_1}, m_{k_2} такие, что $k_1 \neq k_2$ и $m_{k_1} = m_{k_2} = \max\{m_j\}$, то результат А.Гринлифа дает лишь строгую оценку снизу. Таким образом, наши результаты позволяют получить оценку на границе $p' = 2(1 + \max\{m_l\})$ во всех случаях, уточняя оценку А.Гринлифа. Точность полученной оценки вытекает из неравенства снизу для соответствующей функции Кнапа [3].

Замечание 2. Аналогичные результаты справедливы для более общих гиперповерхностей вида $\xi_{n+1} = a(\xi)\xi_1^{m_1} \dots \xi_l^{m_l}$, где $a(\xi)$ — гладкая функция с $a(0) \neq 0$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И.А. Икромову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Greenleaf A. *Principal curvature and harmonic analysis*, Indiana Univ. Math. J. **30** (4), 519–537 (1981).
- [2] Stein E.M. *Harmonic analysis*. Princeton Univ. Press 13, Princeton, 1993.
- [3] Ikromov I.A., Müller D. *Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra*, Ann. Math. Stud. **194** (Princeton Univ. Press, Princeton and Oxford, 2016).
- [4] Safarov A.R. *On the L^p -bound for trigonometric integrals*, Anal. Math. J. 45 (1), 153–176 (2019).
- [5] Magyar A. *On Fourier restriction and Newton polygon*, Proc. AMS. **137** (2), 615–625 (2009).
- [6] Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними* (ГИФМЛ, М., 1959).
- [7] Laura De Carli and Alex Iosevich. *Some sharp restriction theorems for homogeneous manifolds*, Journal of Fourier Anal. and Appl. **4** (1), 105–128 (1998).
- [8] Alex Iosevich *Fourier transform, L^2 restriction theorem, and scaling*, Bolletino dell'Unione Math. Italiana ser. 8 **2-B** (2), 383–387 (1999).
- [9] Федорюк М.В. *Метод перевала* (Наука, М., 1977).
- [10] Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах* (Мир, М., 1974).
- [11] Чубариков В.Н. *О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах*, Матем. заметки **20** (1), 61–68 (1976).
- [12] Сафаров А. *Оценки некоторых кратных осцилляторных интегралов с полиномиальной фазой*, Узбекск. матем. журн. **2** 106–116 (2012).

Акбар Рахманович Сафаров

Самаркандский государственный университет,

Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,

e-mail: safarov-akbar@mail.ru

A.R. Safarov

On a problem of restriction of Fourier transform on a hypersurface

Abstract. This paper is devoted to the restriction problem of Fourier transform to model hypersurfaces. We show that the Littlewood–Paley methods allow to obtain sharp convergence estimate for the summability exponent. These estimates improve results by A. Greenleaf for model hypersurfaces.

Keywords: Fourier transform, summation functions, restriction problem.

Akbar Rakhmanovich Safarov

Samarkand State University,

15 Universitetskii blvd., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,

e-mail: safarov-akbar@mail.ru