Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Л. Берберян, Об ограниченности и угловых граничных значениях субгармонических функций классов $\mathfrak{R}^\theta$, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 4, 85–88

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-4-85-88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:52:41

Краткое сообщение, представленное Л.А. Аксентьевым

С.Л. БЕРБЕРЯН

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И УГЛОВЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $\mathfrak{R}^\theta$

Аннотация. Исследуется равномерная ограниченность в гиперциклических областях субгармонических функций классов $\mathfrak{R}^\theta$ и ее связь с существованием угловых пределов в точках единичной окружности.

Ключевые слова: субгармонические функции, угловой предел, классы $\mathfrak{R}^\theta$, гиперцикл, гиперциклическая область.

УДК: 517.538

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-4-85-88

Исследованию граничных свойств мероморфных и голоморфных функций, определенных в единичном круге, посвящены многочисленные статьи. В частности, в работе [1] рассматривался вопрос ограниченности предельных множеств нормальных голоморфных функций в углах с вершиной в точке единичной окружности. Аналогичный вопрос для более широких классов $\mathfrak{R}^\theta$ непрерывных и субгармонических функций рассматривался автором в работах [2] и [3]. В данной работе получена теорема о равномерной ограниченности в гиперциклических областях субгармонических функций классов $\mathfrak{R}^\theta$, которые содержат нормальные субгармонические функции. Кроме того, с использованием полученного результата доказывается теорема о необходимых и достаточных условиях существования угловых граничных значений у субгармонических функций классов $\mathfrak{R}^\theta$ в точках $\xi = e^{i\theta}$ и $-\xi$.

В дальнейшем будем придерживаться общепринятых обозначений. Обозначим через D и Γ соответственно единичный круг $|z| < 1$ и единичную окружность $|z| = 1$. Обозначим через $L(\xi, \varphi)$ гиперцикл, проходящий через точки $\xi = e^{i\theta}$, $-\xi$ и образующий угол φ с диаметром Λ^θ , который соединяет точки ξ и $-\xi$. Пусть $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ — область, ограниченная двумя гиперциклами $L(\xi, \varphi_1)$ и $L(\xi, \varphi_2)$. Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$ в D . Для произвольного подмножества S круга D , для которого точка $\xi \in \Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f, \xi, S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S , т.е. $C(f, \xi, S) = \overline{\cap f(S \cap U(\xi))}$. Пересечение берется по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ , а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\bar{R}$ множества $R = (-\infty, +\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к

Поступила в редакцию 19.10.2018, после доработки 19.10.2018. Принята к публикации 19.12.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке МОН РА в рамках научного проекта № 18Т-1А019 и в рамках финансовой поддержки проекта развития Российско-Армянского университета.

точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесем к множеству $F(f)$, если $C(f, \xi, \Delta(\xi))$ состоит из единственного значения α . В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi \in \Gamma$ угловой предел α . Множество $F(f)$ называется множеством точек Фату для функции $f(z)$. Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции (например, [4] или [5]). В случае единичного круга D группа T состоит из элементов $T = \{S(z); S(z) = e^{i\alpha}(z + a) \cdot (1 + \bar{a}z)^{-1}, a — произвольная точка в D, \alpha — произвольное действительное число\}$. Придерживаясь обозначений из работы [6], скажем, что действительная функция $f(z) \in \mathfrak{R}$, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi : \{f(S(z)); S(z) \in T\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$ семейства Φ , где $S_n(z) \in T$, можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к $-\infty$ или к $+\infty$ на K . В статье [6] В.И. Гавриловым была сформулирована общая задача об изучении граничных свойств мероморфных функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах группы T . Была рассмотрена подгруппа $T^\theta = \{S_a^\theta(z); S_a^\theta(z) = (z + ae^{i\theta}) \cdot (1 + aze^{-i\theta})^{-1}, где a \in (-1, 1) и \theta, 0 \leq \theta < \pi, фиксировано\}$. Действительную функцию $f(z)$ отнесем к классу $\mathfrak{R}^\theta$, где $0 \leq \theta < \pi$ фиксировано, если порождаемое ею семейство функций $\Phi^\theta = \{f(S_a^\theta(z)); S_a^\theta \in T^\theta\}$ нормально в D в смысле Монтеля.

Справедливы следующие утверждения. В классе $\mathfrak{R}^\theta$ θ всегда фиксировано, $0 \leq \theta < \pi$.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция из класса $\mathfrak{R}^\theta$ и предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_1))$ и $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_2))$, где $\xi = e^{i\theta}$ (или $\zeta = -e^{i\theta}$), ограничены сверху числом α . Тогда предельное множество $C(f, \zeta, \overline{H(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)})$ также ограничено сверху числом α .

Теорема 2. Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция из класса $\mathfrak{R}^\theta$. Для того чтобы функция $f(z)$ имела в точке $\xi = e^{i\theta}$ (или $\zeta = -e^{i\theta}$) угловой предел α , необходимо и достаточно существования для любого сколь угодно малого положительного ε таких углов $\varphi_\varepsilon^1, \varphi_\varepsilon^2$, что

- 1) $\pi/2 < \varphi_\varepsilon^1 < -\pi/2 + \varepsilon, \pi/2 - \varepsilon < \varphi_\varepsilon^2 < \pi/2$;
- 2) предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_\varepsilon^1))$, $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_\varepsilon^2))$ ограничены сверху числом α ;
- 3) существует такая кривая L_ξ с концом в точке ξ , целиком лежащая в некоторой гиперциклической области $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$, что $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi, \\ z \in L_\xi}} f(z) = \alpha$.

Для получения утверждений приведенных теорем рассмотрены леммы.

Лемма 1. Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция из класса $\mathfrak{R}^\theta$ и $\xi = e^{i\theta}$ (или $\zeta = -e^{i\theta}$). Если предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_1))$ и $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_2))$ ограничены сверху значением α при фиксированных значениях $\varphi_1, \varphi_2 \in (\pi/2, \pi/2)$, то предельное множество $C(f, \xi, \overline{H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)})$ также ограничено сверху значением α .

Схема доказательства. Доказательство леммы проводится методом от противного и при этом существенно используется свойство неевклидовой геометрии единичного круга об инвариантности гиперциклов $L(\xi, \varphi)$ при отображениях подгруппы $T^\theta = \{S_a^\theta(z); S_a^\theta(z) = (z + ae^{i\theta}) \cdot (1 + aze^{-i\theta})^{-1}, где a \in (-1, 1) и \theta, 0 \leq \theta < \pi, фиксировано\}$. Кроме того, придерживаемся построения компакта K , впервые приведенного в работе [7].

Замечание 1. Анализируя доказательство леммы 1, видим, что утверждение остается справедливым для гармонических функции класса $\mathfrak{R}^\theta$ в случае условия ограниченности снизу.

Следствие 1. Если гармоническая в D функция $f(z)$ из класса $\mathfrak{R}^\theta$ и для $\xi = e^{i\theta}$ (или $\zeta = -e^{i\theta}$) предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_1))$ и $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_2))$ ограничены сверху (или снизу) значением α при фиксированных значениях $\varphi_1, \varphi_2 \in (\pi/2, \pi/2)$, то предельное множество $C(f, \zeta, \overline{H(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)})$ также ограничено сверху (или снизу) значением α .

Лемма 2. Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция класса $\mathfrak{R}^\theta$ и для $\xi = e^{i\theta}$ (или $\zeta = -e^{i\theta}$) существуют такие гиперциклы $L(\xi, \varphi_1)$ и $L(\xi, \varphi_2)$, что предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_1))$ и $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_2))$ ограничены сверху значением α . Если существует кривая L_ξ , целиком лежащая в некоторой гиперциклической области $H(\zeta, \varphi'_1, \varphi'_2) \subset H(\zeta, \varphi_1, \varphi_2)$ с концом в точке ξ такая, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in L_\xi}} f(z) = \alpha, \text{ то } \lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in H(\xi, \varphi'_1, \varphi'_2)}} f(z) = \alpha.$$

Схема доказательства. Из условий леммы 2 и утверждения леммы 1 следует, что предельное множество $C(f, \xi, H(\xi, \varphi_1, \varphi_2))$ ограничено сверху числом α . Придерживаясь того же построения компакта K , что и в лемме 1, и воспользовавшись принципом максимума для субгармонических функций, получим утверждение леммы 2.

Утверждение теоремы 1 непосредственно следует из утверждения леммы 1.

Схема доказательства теоремы 2. Необходимость условий в теореме 2 очевидна. Перейдем к доказательству достаточности условий. Для произвольной последовательности $\{z_n\} \rightarrow \xi$ выберем такую гиперциклическую область $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$, чтобы $z_n \in H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ и эта область содержала также кривую L_ξ , для которой $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in L_\xi}} f(z) = \alpha$.

В силу условий теоремы 2 можно выбрать такие углы $\varphi_\varepsilon^1, \varphi_\varepsilon^2$, что предельные множества $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_\varepsilon^1))$, $C(f, \zeta, L(\zeta, \varphi_\varepsilon^2))$ ограничены сверху числом α и гиперциклическая область $H(\zeta, \varphi_\varepsilon^1, \varphi_\varepsilon^2)$ содержит гиперциклическую область $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$. Тем самым выполнены условия леммы 2 и согласно утверждению этой леммы $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)}} f(z) = \alpha$. В частности,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \alpha$. В силу произвольности взятой последовательности $\{z_n\}$ отсюда следует существование у функции $f(z)$ углового предела, равного α в точке ζ . Утверждение теоремы 2 доказано.

Следствие 2. Пусть $f(z)$ — субгармоническая функция из класса $\mathfrak{R}^\theta$. Для того чтобы функция $f(z)$ имела в точке $\xi = e^{i\theta}$ угловой предел α , необходимо и достаточно существования для любого сколь угодно малого положительного ε таких углов $\varphi_\varepsilon^1, \varphi_\varepsilon^2$, что $\pi/2 < \varphi_\varepsilon^1 < \pi/2 + \varepsilon$, $\pi/2 - \varepsilon < \varphi_\varepsilon^2 < \pi/2$ и $\lim_{\substack{z \in L(\xi, \varphi_\varepsilon^1) \\ z \rightarrow \xi}} f(z) = \lim_{\substack{z \in L(\xi, \varphi_\varepsilon^2) \\ z \rightarrow \xi}} f(z) = \alpha$.

Утверждения теоремы 2 и следствия 2 для субгармонических функций класса $\mathfrak{R}$ в случае, когда вместо гиперциклов рассматривались хорды, известны [8], однако для получения аналогичных результатов для более широких классов $\mathfrak{R}^\theta$ пришлось видоизменить методы доказательств.

Замечание 2. Условие существования углов $\varphi_\varepsilon^1, \varphi_\varepsilon^2$ при любом $\varepsilon > 0$, для которых $\lim_{\substack{z \in L(\xi, \varphi_\varepsilon^1) \\ z \rightarrow \xi}} f(z) = \lim_{\substack{z \in L(\xi, \varphi_\varepsilon^2) \\ z \rightarrow \xi}} f(z) = \alpha$, существенно, так как Дж. Миком [7] приведен пример

субгармонической функции класса $\mathfrak{R}$, для которого $\lim_{\substack{z \in H(\xi, \varphi_1, \varphi_2) \\ z \rightarrow \xi}} f(z) = \alpha$, в любой фиксированной гиперциклической области $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$, однако даже в этом случае в точке $\xi = 1$ углового предела не существует.

Если в условиях теоремы 2 вместо гиперциклов $L(\xi, \varphi)$ рассмотреть хорды $h(\xi, \varphi)$, составляющие с радиусом в точке ξ углы φ , где $\pi/2 < \varphi < \pi$, то можно убедиться, что эти условия являются необходимыми, но недостаточными для существования угловых пределов даже у ограниченных субгармонических функций. Рассмотрим субгармоническую функцию $u(z)$, построенную М. Цудзи [9]. Эта функция обладает следующими свойствами: $-1 \leq u(z) \leq 0$, имеет всюду на Γ , кроме множества E , $\text{mes } E = 0$, пределы по хордам $h(\xi, \varphi)$ $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \in \Gamma \setminus E \\ z \in h(\xi, \varphi)}} u(z) = 0$ для почти всех $\varphi \in (\pi/2, \pi)$. Однако в каждой такой точке $\zeta \in \Gamma \setminus E$ функция $u(z)$ не имеет углового предела, так как в любой гиперциклической области $H(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ существует такая последовательность точек $\{z_n\} \rightarrow \zeta$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) = -1$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bagemihl F. *Some boundary properties of normal functions bounded on nontangential arcs*, Arch. Math. **14** (6), 399–406 (1963).
- [2] Берберян С.Л. *О граничных свойствах субгармонических функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга*, Изв. АН Арм. ССР **15** (4), 395–402 (1980).
- [3] Берберян С.Л. *Об угловых граничных значениях нормальных непрерывных функций*, Изв. вузов. Матем., № 3, 22–28 (1986).
- [4] Lappan P. *Some results on harmonic normal functions*, Math. Zeitschr. **90** (1), 155–159 (1965).
- [5] Rung D.C. *Asymptotic values of normal subharmonic functions*, Math. Zeitschr. **84** (1), 9–15 (1964).
- [6] Гаврилов В.И. *Нормальные функции и почти периодические функции*, ДАН СССР **240** (4), 768–770 (1978).
- [7] Meek J. *Of Fatous points of normal subharmonic functions*, Mathematica Japonica **22** (3), 309–314 (1977).
- [8] Berberyan S.L. *On angular boundary values of subharmonic functions from the class N* , Mathem. Montisingri **XX–XXI**, 5–14 (2007–2008).
- [9] Tsuji M. *Littlewoods theorem on subharmonic functions in a unit circle*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **5** (7), 3–16 (1956).

Самвел Левонович Берберян,

Российско-Армянский (Славянский) университет,
ул. Овсепя Эмина, д. 123, г. Ереван, 0051, Армения,
e-mail: samvel357@mail.ru

S.L. Berberyan

On boundedness and angular boundary values of subharmonic functions of classes $\mathfrak{R}^\theta$

Abstract. In this paper we study the uniform boundedness in hypercyclic domains of subharmonic functions of classes $\mathfrak{R}^\theta$ and its relation to existence of angular limits at points of the unit circumference.

Keywords: subharmonic functions, angular limit, $\mathfrak{R}^\theta$ classes, hypercycle, hypercycle domain.

Samvel Levonovich Berberyan,

Russian–Armenian (Slavonic) University,
123 Ovsep Emin str., Yerevan, 0051 Armenia,
e-mail: samvel357@mail.ru