Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Балоев, Универсальная форма решения стационарного линейного разностного уравнения, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 5, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-5-3-14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:01:12

А.А. БАЛОЕВ

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМА РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Вид решения разностного уравнения зависит от характера корней его характеристического уравнения. Представляет практический интерес запись общего решения такого уравнения в форме, пригодной для любых (кроме нулевых) корней. Эта задача и решается в данной работе. Упрощен алгоритм получения общего решения.

Ключевые слова: дискретная система, кратный корень.

УДК: 517.962

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-5-3-14

1. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ k -ГО ПОРЯДКА

1. Постановка и решение задачи. Требуется найти решение разностного уравнения порядка k

$$a_0 y[n+k] + a_1 y[n+k-1] + \dots + a_k y[n] = f[n], \quad (1.1)$$

где коэффициенты a_i ($i = \overline{0, k}$) — вещественные числа, $a_k \neq 0$, $f[n]$ — известная решетчатая функция, начальное состояние системы задано.

Прежде всего для (1.1) получим фундаментальную систему, т. е. сначала будем рассматривать однородное уравнение

$$a_0 y[n+k] + a_1 y[n+k-1] + \dots + a_k y[n] = 0. \quad (1.2)$$

Наряду с (1.2) рассмотрим другое уравнение порядка $k-1$

$$b_0 y_{k-1}[n+k-1] + b_1 y_{k-1}[n+k-2] + \dots + b_{k-1} y_{k-1}[n] = f_{k-1}[n], \quad (1.3)$$

где $y_{k-1}[n]$, $f_{k-1}[n]$ и b_α ($\alpha = \overline{0, k-1}$) являются неизвестными.

Требуется найти такие числа b_α ($\alpha = \overline{0, k-1}$) и функцию $f_{k-1}[n]$, чтобы решение уравнения $(k-1)$ -го порядка (1.3) совпало с решением уравнения k -го порядка (1.2).

Для решения этой задачи уравнение (1.3) при $n = n+1$ сложим с уравнением (1.3), умноженным на некоторое число $-j_{k-1}$, получаем

$$\begin{aligned} b_0 y_{k-1}[n+k] + (b_1 - j_{k-1} b_0) y_{k-1}[n+k-1] + \dots + (b_{k-1} - j_{k-1} b_{k-2}) \times \\ \times y_{k-1}[n+1] - j_{k-1} b_{k-1} y_{k-1}[n] = f_{k-1}[n+1] - j_{k-1} f_{k-1}[n]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Согласно уравнениям (1.2), (1.4) $y[n] \equiv y_{k-1}[n]$, если

$$b_0 = a_0, \quad b_i - j_{k-1} b_{i-1} = a_i \quad (i = \overline{1, k-1}), \quad -j_{k-1} b_{k-1} = a_k, \quad (1.5)$$

$$f_{k-1}[n+1] - j_{k-1} f_{k-1}[n] = 0. \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.5), (1.6) позволяет определить константы b_α ($\alpha = \overline{0, k-1}$) и функцию $f_{k-1}[n]$. Для этого из системы (1.5) путем последовательного исключения коэффициентов b_i получаем уравнение

$$a_0 j_{k-1}^k + a_1 j_{k-1}^{k-1} + \dots + a_k = 0, \quad (1.7)$$

т. е. j_{k-1} должна быть корнем характеристического уравнения (1.7).

Заметим, что корни уравнения (1.7) могут быть простыми, часть их или все кратными, вещественными или комплексными, однако нам достаточно взять в качестве j_{k-1} любой из них, например, корень r_k , тогда из (1.6) имеем [1]

$$f_{k-1}[n] = C_k r_k^n; \quad (1.8)$$

здесь и далее C_i ($i = \overline{1, k}$) — постоянные интегрирования.

Таким образом, решением уравнения (1.2) порядка k является решение уравнения (1.3) порядка $k-1$, в котором коэффициенты b_i удовлетворяют уравнениям (1.5), а функция $f_{k-1}[n]$ имеет вид (1.8).

Дальнейшее аналогичное понижение порядка приведет к решению

$$\begin{aligned} y_0[n] = & C_1 r_1^n + C_2 r_1^n \sum_{i_1=1}^n \frac{r_2^{i_1-1}}{r_1^{i_1}} + C_3 r_1^n \sum_{i_1=2}^n \frac{r_2^{i_1-1}}{r_1^{i_1}} \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \frac{r_3^{i_2-1}}{r_2^{i_2}} + \dots + \\ & + C_j r_1^n \sum_{i_1=j-1}^n \frac{r_2^{i_1-1}}{r_1^{i_1}} \sum_{i_2=j-2}^{i_1-1} \frac{r_3^{i_2-1}}{r_2^{i_2}} \sum_{i_3=j-3}^{i_2-1} \dots \sum_{i_{j-1}=1}^{i_{j-2}-1} \frac{r_j^{i_{j-1}-1}}{r_{j-1}^{i_{j-1}}} + \dots + \\ & + C_k r_1^n \sum_{i_1=k-1}^n \frac{r_2^{i_1-1}}{r_1^{i_1}} \sum_{i_2=k-2}^{i_1-1} \frac{r_3^{i_2-1}}{r_2^{i_2}} \sum_{i_3=k-3}^{i_2-1} \dots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}-1} \frac{r_k^{i_{k-1}-1}}{r_{k-1}^{i_{k-1}}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

При записи этого решения было учтено, что решение (1.9) должно содержать слагаемые, отвечающие лишь положительному времени.

Решение (1.9) запишем в более компактной форме, обозначив

$$y_{1,j}[n] = r_1^n \sum_{i_1=j-1}^n \frac{r_2^{i_1-1}}{r_1^{i_1}} \sum_{i_2=j-2}^{i_1-1} \frac{r_3^{i_2-1}}{r_2^{i_2}} \sum_{i_3=j-3}^{i_2-1} \dots \sum_{i_{j-1}=1}^{i_{j-2}-1} \frac{r_j^{i_{j-1}-1}}{r_{j-1}^{i_{j-1}}}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (1.10)$$

$$y_{\alpha,\alpha}[n] = r_\alpha^n \quad (\alpha = 1, 2, \dots). \quad (1.11)$$

Таким образом, для (1.9) имеем

$$y_0[n] = \sum_{j=1}^k C_j y_{1,j}[n]. \quad (1.12)$$

2. Свойства решения (1.12).

2.1. Покажем, что

$$y_{1,j}[n] = S_{1,j}^{n-j+1} \quad (j = \overline{1, k}), \quad (1.13)$$

где $S_{1,j}^{n-j+1}$ — сочетание с повторением из корней $r_1, \dots, r_j$ по $n-j+1$ ([2]).

Воспользуемся методом полной математической индукции (ПМИ). При $j = 1$ согласно (1.11) $y_{1,1}[n] = r_1^n$, этот же результат получаем из (1.13). Далее, как вытекает из (1.10),

$$y_{1,j}[n] = r_1^n \sum_{i_1=j-1}^n \frac{1}{r_1^{i_1}} \left(r_2^n \sum_{i_2=j-2}^n \frac{r_3^{i_2-1}}{r_2^{i_2}} \sum_{i_3=j-3}^{i_2-1} \cdots \sum_{i_{j-1}=1}^{i_{j-2}-1} \frac{r_j^{i_{j-1}-1}}{r_{j-1}^{i_{j-1}}} \right) \Bigg|_{\text{при } n=i_1-1}.$$

К выражению в скобках применим предположение индукции, тогда

$$y_{1,j}[n] = r_1^n \sum_{i_1=j-1}^n \frac{1}{r_1^{i_1}} S_{2,j}^{i_1-j+1} = r_1^{n-j+1} S_{2,j}^0 + r_1^{n-j} S_{2,j}^1 + \cdots + r_1 S_{2,j}^{n-j} + S_{2,j}^{n-j+1} = S_{1,j}^{n-j+1}.$$

Равенство (1.13) доказано. В таком случае вместо (1.12) запишем

$$y_0[n] = \sum_{j=1}^k C_j S_{1,j}^{n-j+1}. \quad (1.14)$$

Заметим, что в полученном выражении следует принимать

$$S_{1,j}^{n-j+1} = 0 \quad \text{при } n-j+1 < 0 \quad \text{и} \quad S_{1,j}^{n-j+1} = 1 \quad \text{при } n-j+1 = 0. \quad (1.15)$$

2.2. Покажем, что $y_{1,j}[n]$ является решением уравнения (1.2), т. е.

$$a_0 S_{1,j}^{n+k-j+1} + a_1 S_{1,j}^{n+k-j} + \cdots + a_k S_{1,j}^{n-j+1} = 0 \quad (j = \overline{1, k}). \quad (1.16)$$

Применим метод ПМИ. Покажем, что (1.16) выполняется при $j = 1$:

$$a_0 S_{1,1}^{n+k} + a_1 S_{1,1}^{n+k-1} + \cdots + a_k S_{1,1}^n = 0.$$

Левая часть этого выражения $r_1^n (a_0 r_1^k + a_1 r_1^{k-1} + \cdots + a_k) = 0$ в силу того, что r_1 — корень характеристического уравнения.

Зададимся конкретным значением $1 < j < k$. Пусть (1.16) доказано для любого j , меньше заданного числа. Покажем, что при этом вытекает справедливость (1.16). Левую часть выражения (1.16) обозначим через L , тогда поскольку [3], [4]

$$S_{i,j}^q = r_i S_{i,j}^{q-1} + S_{i+1,j}^q \quad (i+1 < j), \quad (1.17)$$

следовательно,

$$L = r_j (a_0 S_{1,j}^{n+k-j} + a_1 S_{1,j}^{n+k-j-1} + \cdots + a_k S_{1,j}^{n-j}) + (a_0 S_{1,j-1}^{n+k-j+1} + a_1 S_{1,j-1}^{n+k-j} + \cdots + a_k S_{1,j-1}^{n-j+1}).$$

Ко второй скобке применим предположение индукции, в этом случае

$$L = r_j (a_0 S_{1,j}^{n+k-j} + a_1 S_{1,j}^{n+k-j-1} + \cdots + a_k S_{1,j}^{n-j}). \quad (1.18)$$

Выполнив рассмотренную процедуру еще $n-j$ раз, для (1.18) получим

$$L = r_j^{n-j+1} (a_0 S_{1,j}^k + a_1 S_{1,j}^{k-1} + \cdots + a_{k-1} S_{1,j}^1 + a_k) = 0 \quad (1.19)$$

в силу ([4], П 3.32). Равенство (1.16) доказано.

2.3. Функции $y_{1,j}[n] = S_{1,j}^{n-j+1}$ ($j = \overline{1, k}$) линейно независимы.

Покажем, что для любых корней (простых или кратных) характеристического уравнения исходного уравнения (1.1) функции

$$y_{1,j}[n] = S_{1,j}^{n-j+1} \quad (j = \overline{1, k}) \quad (1.20)$$

образуют фундаментальную систему.

Из частных решений $y_{1,j}[n]$ (1.20) сформируем определитель

$$W[y_{1,1}[n], \dots, y_{1,k}[n]] = \begin{vmatrix} S_{1,1}^n & S_{1,2}^{n-1} & \dots & S_{1,k}^{n-k+1} \\ S_{1,1}^{n+1} & S_{1,2}^n & \dots & S_{1,k}^{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1,1}^{n+k-1} & S_{1,2}^{n+k-2} & \dots & S_{1,k}^n \end{vmatrix}. \quad (1.21)$$

Покажем, что

$$W[y_{1,1}[n], \dots, y_{1,k}[n]] = \prod_{j=1}^k r_j^n. \quad (1.22)$$

Воспользуемся методом ПМИ. При $k = 1$, как это следует из (1.21), (1.20), $W[y_{1,1}[n]] = y_{1,1}[n] = r_1^n$, т.е. формула (1.22) справедлива при $k = 1$.

Допустим, что (1.22) доказана для всех определителей порядка $k - 1$. Докажем ее для определителя порядка k . Преобразуем определитель (1.21): из k -й строки вычтем строку $(k - 1)$ -ю, умноженную на r_1 , а затем из $(k - 1)$ -й строки вычитаем $(k - 2)$ -ю, умноженную на r_1 и т.д., наконец, из второй строки вычитаем первую, умноженную на r_1 , получим

$$W[y_{1,1}[n], \dots, y_{1,k}[n]] = \begin{vmatrix} S_{1,1}^n & S_{1,2}^{n-1} & \dots & S_{1,k}^{n-k+1} \\ 0 & S_{1,2}^n - r_1 S_{1,2}^{n-1} & \dots & S_{1,k}^{n-k+2} - r_1 S_{1,k}^{n-k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & S_{1,2}^{n+k-2} - r_1 S_{1,2}^{n+k-3} & \dots & S_{1,k}^n - r_1 S_{1,k}^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (1.23)$$

Применяя зависимость (1.18), из (1.23) находим

$$W[y_{1,1}[n], \dots, y_{1,k}[n]] = r_1^n \begin{vmatrix} S_{2,2}^n & \dots & S_{2,k}^{n-k+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{2,2}^{n+k-2} & \dots & S_{2,k}^n \end{vmatrix}.$$

В правую часть этого выражения входит детерминант порядка $k - 1$, записанный для функций $y_{2,i}[k]$ ($i = \overline{2, k}$), поэтому к нему применимо предположение индукции, т.е. он равен $\prod_{i=2}^k r_i^n$. Формула (1.22) доказана. Это утверждение означает, что

$$y[n] = \sum_{j=1}^k C_j y_{1,j}[n]$$

является общим решением однородного разностного уравнения (1.2) независимо от того, будут ли корни r_i ($i = \overline{1, k}$) простыми или будут содержать группы кратности.

3. Частное решение неоднородного уравнения. Согласно [5] таким решением уравнения (1.1) при $a_0 = 1$ является

$$\bar{y}[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m] \frac{G[n, m]}{W[m + 1]}, \quad (1.24)$$

где определители k -го порядка имеют вид

$$G[n, m] = \begin{vmatrix} S_{1,1}^{m+1} & S_{1,2}^m & \cdots & S_{1,k}^{m-k+2} \\ S_{1,1}^{m+2} & S_{1,2}^{m+1} & \cdots & S_{1,k}^{m-k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1,1}^{m+k-1} & S_{1,2}^{m+k-2} & \cdots & S_{1,k}^m \\ S_{1,1}^n & S_{1,2}^{n-1} & \cdots & S_{1,k}^{n-k+1} \end{vmatrix} \quad (n \geq 1, \quad m = \overline{0, n-1}), \quad (1.25)$$

$$W[m+1] = \begin{vmatrix} S_{1,1}^{m+1} & \cdots & S_{1,k}^{m-k+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1,1}^{m+k} & \cdots & S_{1,k}^{m+1} \end{vmatrix} \quad (m = \overline{0, n-1}). \quad (1.26)$$

Согласно (1.22) для (1.26) имеем

$$W[m+1] = \prod_{j=1}^k r_j^{m+1}. \quad (1.27)$$

Как показано в [5],

$$\frac{G[n, m]}{W[m+1]} = \begin{cases} 0 & \text{при } n = m+1, m+2, \dots, m+k-1; \\ 1 & \text{при } n = m+k. \end{cases}$$

Покажем, что в (1.24)

$$G[n, m] = (r_1 \dots r_k)^{m+1} S_{1,k}^{n-m-k} \quad (n \geq m+k). \quad (1.28)$$

Заметим, что в (1.28) согласно (1.15) $S_{1,k}^{n-m-k} = 0$ при $n-m-k < 0$, поэтому наименьшее значение для n будет $n = m+k$.

Для доказательства (1.28) применим метод индукции. Покажем, что (1.28) справедлива при $n = m+k$. В этом случае

$$G[m+k, m] = \begin{vmatrix} S_{1,1}^{m+1} & S_{1,2}^m & \cdots & S_{1,k}^{m-k+2} \\ S_{1,1}^{m+2} & S_{1,2}^{m+1} & \cdots & S_{1,k}^{m-k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1,1}^{m+k-1} & S_{1,2}^{m+k-2} & \cdots & S_{1,k}^m \\ S_{1,1}^{m+k} & S_{1,2}^{m+k-1} & \cdots & S_{1,k}^{m+1} \end{vmatrix} = W[m+1].$$

С другой стороны, согласно (1.28)

$$G[m+k, m] = (r_1 \dots r_k)^{m+1} = W[m+1],$$

т. е. (1.28) справедлива при $n = m+k$. Рассмотрим теперь $n > m+k$. Применим (1.18) к последней строке определителя (1.25), получим

$$G[n, m] = r_1 \begin{vmatrix} S_{1,1}^{m+1} & S_{1,2}^m & \cdots & S_{1,k}^{m-k+2} \\ S_{1,1}^{m+2} & S_{1,2}^{m+1} & \cdots & S_{1,k}^{m-k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1,1}^{m+k-1} & S_{1,2}^{m+k-2} & \cdots & S_{1,k}^m \\ S_{1,1}^{n-1} & S_{1,2}^{n-2} & \cdots & S_{1,k}^{n-k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_{1,1}^{m+1} & S_{1,2}^m & \cdots & S_{1,k}^{m-k+2} \\ S_{1,1}^{m+2} & S_{1,2}^{m+1} & \cdots & S_{1,k}^{m-k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1,1}^{m+k-1} & S_{1,2}^{m+k-2} & \cdots & S_{1,k}^m \\ 0 & S_{2,2}^{n-1} & \cdots & S_{2,k}^{n-k+1} \end{vmatrix}. \quad (1.29)$$

Первый определитель в (1.29) есть $G[n-1, m]$ и согласно (1.28)

$$G[n-1, m] = (r_1 \dots r_k)^{m+1} S_{1,k}^{n-1-m-k}. \quad (1.30)$$

Преобразуем второй определитель в (1.29): из $(k-1)$ -й строки вычтем $(k-2)$ -ю, умноженную на r_1 и т.д., из второй строки вычтем первую, умноженную на r_1 . Запишем этот определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_{1,1}^{m+1} & S_{1,2}^m & \dots & S_{1,k}^{m-k+2} \\ 0 & S_{1,2}^{m+1} - r_1 S_{1,2}^m & \dots & S_{1,k}^{m-k+3} - r_1 S_{1,k}^{m-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & S_{1,2}^{m+k-2} - r_1 S_{1,2}^{m+k-3} & \dots & S_{1,k}^m - r_1 S_{1,k}^{m-1} \\ 0 & S_{2,2}^{n-1} & \dots & S_{2,k}^{n-k+1} \end{vmatrix}.$$

Далее, применив (1.18), получим

$$\Delta = r_1^{m+1} \begin{vmatrix} S_{2,2}^{m+1} & S_{2,3}^m & \dots & S_{2,k}^{m-k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{2,2}^{m+k-2} & S_{2,3}^{m+k-3} & \dots & S_{2,k}^m \\ S_{2,2}^{n-1} & S_{2,3}^{n-2} & \dots & S_{2,k}^{n-k+1} \end{vmatrix}$$

или $\Delta = r_1^{m+1} G[n-1, m]$, где определитель $G[n-1, m]$ формируется для корней $r_2, \dots, r_k$. Согласно (1.30)

$$\Delta = r_1^{m+1} (r_2 \dots r_k)^{m+1} S_{2,k}^{n-1-m-k+1} = (r_1, \dots, r_k)^{m+1} S_{2,k}^{n-m-k}. \quad (1.31)$$

Таким образом, (1.29) имеет вид

$$\begin{aligned} G[n, m] &= r_1 (r_1 \dots r_k)^{m+1} S_{1,k}^{n-m-k-1} + (r_1, \dots, r_k)^{m+1} S_{2,k}^{n-m-k} = \\ &= (r_1 \dots r_k)^{m+1} (r_1 S_{1,k}^{n-m-k-1} + S_{2,k}^{n-m-k}) = (r_1 \dots r_k)^{m+1} S_{1,k}^{n-m-k}. \end{aligned}$$

Формула (1.28) доказана.

Теперь с учетом (1.27), (1.28) запишем (1.24) как

$$\bar{y}[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f[m] S_{1,k}^{n-m-k}.$$

Поскольку индекс $n-m-k$ не может быть отрицательным, то

$$\bar{y}[n] = \sum_{m=0}^{n-k} f[m] S_{1,k}^{n-m-k}. \quad (1.32)$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.1) согласно (1.14), (1.32) имеет вид

$$y[n] = \sum_{j=1}^k C_j S_{1,j}^{n-j+1} + \begin{cases} 0 & \text{при } n < k; \\ \sum_{m=0}^{n-k} f[m] S_{1,k}^{n-m-k} & \text{при } n \geq k. \end{cases}$$

2. СИСТЕМЫ НЕОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему разностных уравнений k -го порядка

$$x[n+1] = Ax[n] + f[n] \quad (n \geq 0), \quad (2.1)$$

где $A = [a_{i,j}]$ ($i, j = \overline{1, k}$) — постоянная матрица, $x[n] = [x[1], \dots, x[k]]^T$ — k -мерный вектор, $f[n]$ — решетчатая функция, определенная при всех значениях n .

Сначала получим общее решение однородной системы

$$x[n+1] = Ax[n]. \quad (2.2)$$

Приведем систему (2.2) к одному уравнению. Для этого матрицу A представим в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \vdots & A_g \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_v & \vdots & \tilde{A} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где

$$A_g = [a_{1,1}, \dots, a_{1,k}], \quad A_v = [a_{2,1}, \dots, a_{k,1}]^T, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{bmatrix}.$$

Используя известную процедуру преобразования системы разностных уравнений к одному уравнению, при $\tilde{x}[n] = [x_2[n], \dots, x_k[n]]^T$ получим

$$\begin{aligned} x_1[n+1] &= a_{1,1}x_1[n] + A_g\tilde{x}[n], \\ x_1[n+2] &= a_{1,1}x_1[n+1] + A_gA_vx_1[n] + A_g\tilde{A}\tilde{x}[n], \\ x_1[n+3] &= a_{1,1}x_1[n+2] + A_gA_vx_1[n+1] + A_g\tilde{A}A_vx_1[n] + A_g\tilde{A}^2\tilde{x}[n], \\ &\dots \\ x_1[n+k-1] &= a_{1,1}x_1[n+k-2] + A_gA_vx_1[n+k-3] + \dots + \\ &\quad + A_g\tilde{A}^{k-3}A_vx_1[n] + A_g\tilde{A}^{k-2}\tilde{x}[n]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Используя далее $(k-1) \times (k-1)$ и $(k-1) \times k$ -матрицы

$$M = \begin{bmatrix} A_g \\ A_g\tilde{A} \\ \vdots \\ A_g\tilde{A}^{k-2} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$N^* = \begin{bmatrix} a_{1,1} & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A_gA_v & a_{1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A_g\tilde{A}A_v & A_gA_v & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_g\tilde{A}^{k-4}A_v & A_g\tilde{A}^{k-5}A_v & \cdots & a_{1,1} & -1 & 0 \\ A_g\tilde{A}^{k-3}A_v & A_g\tilde{A}^{k-4}A_v & \cdots & A_gA_v & a_{1,1} & -1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

и k -мерный вектор

$$\tilde{x}_1[n] = [x_1[n], x_1[n+1], \dots, x_1[n+k-1]]^T, \quad (2.7)$$

из (2.4) получаем

$$M\tilde{x}[n] = -N^*\tilde{x}_1[n] \quad (2.8)$$

или

$$\tilde{x}[n] = -M^{-1}N^*\tilde{x}_1[n]. \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) выражает компоненты $x_2[n], \dots, x_k[n]$ через $x_1[n], \dots, x_1[n+k-1]$. Далее из последнего уравнения системы (2.4) находим

$$\begin{aligned} x_1[n+k] = & a_{1,1}x_1[n+k-1] + A_g A_v x_1[n+k-2] + \\ & + A_g \tilde{A} A_v x_1[n+k-3] + \dots + A_g \tilde{A}^{k-3} A_v x_1[n+1] + A_g \tilde{A}^{k-2} \tilde{x}[n+1], \end{aligned}$$

поскольку, как это следует из (2.2), $\tilde{x}[n+1] = A_v x_1[n] + \tilde{A} \tilde{x}[n]$, то

$$x_1[n+k] + M_1 \tilde{x}_1[n] = 0, \quad (2.10)$$

где

$$M_1 = A_g \tilde{A}^{k-1} M^{-1} N^* - [A_g \tilde{A}^{k-2} A_v, A_g \tilde{A}^{k-3} A_v, \dots, A_g A_v, a_{1,1}].$$

Система (2.2) сведена к одному уравнению k -го порядка.

Согласно (1.14) решение уравнения (2.10) запишем в виде

$$x_1[n] = \sum_{j=1}^k C_j S_{1,j}^{n-j+1}, \quad (2.11)$$

где частные решения записываются через корни уравнения $|A - \lambda E| = 0$.

Введем $k \times k$ -матрицу

$$W[n] = \begin{bmatrix} S_{1,1}^n & S_{1,2}^{n-1} & \dots & S_{1,k}^{n-k+1} \\ S_{1,1}^{n+1} & S_{1,2}^n & \dots & S_{1,k}^{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{1,1}^{n+k-2} & S_{1,2}^{n+k-3} & \dots & S_{1,k}^{n-1} \\ S_{1,1}^{n+k-1} & S_{1,2}^{n+k-2} & \dots & S_{1,k}^n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

и решение (2.11) запишем в виде

$$x_1[n] = W_1[n]C, \quad (2.13)$$

где $W_1[n]$ — первая строка матрицы (2.12). Таким образом, согласно (2.7), (2.13)

$$\tilde{x}_1[n] = W[n]C. \quad (2.14)$$

Имея ввиду (2.8), запишем

$$\begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0_{k-1}^T & \vdots & M \end{bmatrix} x[n] = - \begin{bmatrix} -1 & \vdots & 0_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ N^* & & \end{bmatrix} \tilde{x}_1[n], \quad (2.15)$$

где 0_{k-1} — $(k-1)$ -мерная строка нулевых элементов. Далее с учетом (2.6), (2.14), (2.15) получаем

$$M_0 x[n] = -NW[n]C, \quad (2.16)$$

где $k \times k$ -матрицы

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0_{k-1}^T & \vdots & M \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,1} & -1 & \cdots & 0 \\ A_g A_v & a_{1,1} & \cdots & 0 \\ A_g \tilde{A} A_v & A_g A_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_g \tilde{A}^{k-3} A_v & A_g \tilde{A}^{k-4} A_v & \cdots & -1 \end{bmatrix}.$$

Из (2.16) вытекает

$$x[n] = M_0^{-1} N W[n] C. \quad (2.18)$$

Преобразуем выражение (2.18). Рассмотрим $k \times k$ -матрицы

$$Z[n] = \begin{bmatrix} S_{1,1}^n & S_{1,2}^{n-1} & \cdots & S_{1,k-1}^{n-k+2} & S_{1,k}^{n-k+1} \\ 0 & S_{2,2}^n & \cdots & S_{2,k-1}^{n-k+3} & S_{2,k}^{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & S_{k,k}^n \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ S_{1,1}^1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{1,1}^{k-1} & S_{1,2}^{k-2} & \cdots & S_{1,k-1}^1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Покажем, что

$$W[n] = \hat{S} Z[n]. \quad (2.21)$$

Для этого с помощью формулы (1.18) матрицу (2.12) запишем в виде

$$W[n] = \begin{bmatrix} S_{1,1}^n & S_{1,2}^{n-1} & \cdots & S_{1,k}^{n-k+1} \\ r_1 S_{1,1}^n & r_1 S_{1,2}^{n-1} + S_{2,2}^n & \cdots & r_1 S_{1,k}^{n-k+1} + S_{2,k}^{n-k+2} \\ r_1^2 S_{1,1}^n & r_1^2 S_{1,2}^{n-1} + S_{1,2}^1 S_{2,2}^n & \cdots & r_1^2 S_{1,k}^{n-k+1} + S_{1,2}^1 S_{2,k}^{n-k+2} + S_{3,k}^{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} S_{1,1}^n & r_1^{k-1} S_{1,2}^{n-1} + S_{1,2}^{k-2} S_{2,2}^n & \cdots & r_1^{k-1} S_{1,k}^{n-k+1} + S_{1,2}^{k-2} S_{2,k}^{n-k+2} + \dots + S_{k,k}^n \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Из выражений (2.19), (2.20), (2.22) видно, что (2.21) выполняется. Кроме того,

$$W[0] = \hat{S} Z[0],$$

где $Z[0] = E$, поэтому $W[0] = \hat{S}$.

Покажем также, что

$$Z[n+1] = R Z[n], \quad (2.23)$$

где $k \times k$ -матрица

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{k-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_k \end{bmatrix}.$$

Согласно (2.19)

$$Z[n+1] = \begin{bmatrix} S_{1,1}^{n+1} & S_{1,2}^n & \cdots & S_{1,k}^{n-k+2} \\ 0 & S_{2,2}^{n+1} & \cdots & S_{2,k}^{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{k,k}^{n+1} \end{bmatrix},$$

применив далее соотношения (1.18), получим

$$Z[n+1] = \begin{bmatrix} r_1 S_{1,1}^n & r_1 S_{1,2}^{n-1} + S_{2,2}^n & \cdots & r_1 S_{1,k}^{n-k+1} + S_{2,k}^{n-k+2} \\ 0 & r_2 S_{2,2}^n & \cdots & r_2 S_{2,k}^{n-k+2} + S_{2,k}^{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_k S_{k,k}^n \end{bmatrix}.$$

Из этого выражения вытекает равенство (2.23). Теперь в силу (2.21), запишем (2.18) в виде

$$x[n] = M_0^{-1} N \hat{S} Z[n] C. \quad (2.24)$$

Пусть

$$V_0 = M_0^{-1} N \hat{S}, \quad (2.25)$$

тогда (2.24) имеет вид

$$x[n] = V_0 Z[n] C. \quad (2.26)$$

Покажем, что $x[n]$ (2.26) является решением уравнения (2.2). С этой целью подставив (2.26) в (2.2), получим

$$V_0 Z[n+1] C = A V_0 Z[n] C.$$

Согласно (2.23)

$$(V_0 R - A V_0) Z[n] C = 0. \quad (2.27)$$

Равенство (2.27) выполняется, поскольку [6]

$$V_0 R - A V_0 = 0. \quad (2.28)$$

Если существует матрица M^{-1} , то существует фундаментальная матрица

$$X[n] = V_0 Z[n]. \quad (2.29)$$

Из (2.29), (2.25), (2.17) получаем

$$|X[n]| = |M_0^{-1}| |N| |\hat{S}| |Z[n]| = |M^{-1}| |N| |\hat{S}| |Z[n]|.$$

Согласно (2.19)

$$|Z[n]| = \prod_{i=1}^k S_{i,i}^n = (r_1 \dots r_k)^n,$$

следовательно, $|X[n]| \neq 0$, если определитель матрицы M (2.5) отличен от нуля.

Рассмотрим неоднородную систему (2.1).

Покажем, что общим решением системы (2.1) является

$$x[n] = \Phi[n] x[0] + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi[n-k-1] f[k], \quad (2.30)$$

где [6] $\Phi[n] = V_0 Z[n] V_0^{-1}$.

Это утверждение проверяется непосредственной подстановкой (2.30) в (2.1) при условии (2.28) и $Z[0] = E$.

Замечание. Согласно (2.25) $V_0^{-1} = \widehat{S}^{-1}N^{-1}M_0$. Как показано в [6], $k \times k$ -матрица

$$\widehat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ V_{1,1}^1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ V_{1,2}^2 & V_{1,2}^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_{1,k-1}^{k-1} & V_{1,k-1}^{k-2} & \cdots & V_{1,k-1}^1 & 1 \end{bmatrix},$$

где $V_{1,j}^i$ ($i, j = \overline{1, k}$) — числа Виета. Далее [6],

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \Delta_2 & \Delta_1 & \cdots & 0 \\ \Delta_3 & \Delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_k & \Delta_{k-1} & \cdots & \Delta_1 \end{bmatrix},$$

где $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = a_{1,1}$, Δ_i ($i = \overline{3, k}$) определяются из рекуррентного уравнения

$$\Delta_i = a_{1,1}\Delta_{i-1} + A_g \sum_{\alpha=0}^{i-3} \widetilde{A}^\alpha A_v \Delta_{i-\alpha-2} \quad (i = 3, 4, \dots).$$

Пример. Запишем общее решение для системы

$$x[n+1] = Ax[n] + f[n],$$

где $x[n] = [x_1[n], x_2[n], x_3[n]]^T$, $A = [a_{i,j}]$, $i, j = \overline{1, 3}$; $f[n] = [f_1[n], f_2[n], f_3[n]]^T$.

Представим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \vdots & A_g \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A_v & \vdots & \widetilde{A} \end{bmatrix}, \quad A_g = [a_{1,2}, a_{1,3}]; \quad A_v = [a_{2,1}, a_{3,1}]^T; \quad \widetilde{A} = \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Общее решение (2.30)

$$x[n] = \Phi[n]x[0] + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi[n-i-1]f[i],$$

$$\Phi[n] = V_0 Z[n] V_0^{-1}, \quad V_0 = M_0^{-1} N \widehat{S}, \quad V_0^{-1} = \widehat{S}^{-1} N^{-1} M_0,$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_2^T & \vdots & M \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} A_g \\ A \widetilde{A} \end{bmatrix}, \quad M_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_2^T & \vdots & M^{-1} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a_{1,1} & -1 & 0 \\ A_g A_v & a_{1,1} & -1 \end{bmatrix},$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ a_{1,1} & -1 & 0 \\ \Delta_3 & a_{1,1} & -1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1 & 1 & 0 \\ r_1^2 & r_1 + r_2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -r_1 & 1 & 0 \\ r_1 r_2 & -(r_1 + r_2) & 1 \end{bmatrix}, \quad Z[n] = \begin{bmatrix} S_{1,1}^n & S_{1,2}^{n-1} & S_{1,3}^{n-2} \\ 0 & S_{2,2}^n & S_{2,3}^{n-1} \\ 0 & 0 & S_{3,3}^n \end{bmatrix},$$

$$V_{1,1}^1 = -r_1, \quad V_{1,2}^1 = -(r_1 + r_2), \quad V_{1,2}^2 = r_1 r_2, \quad \Delta_3 = a_{1,1}^2 - A_g A_v,$$

$$x[n] = M_0^{-1} N \hat{S} \begin{bmatrix} r_1^n & S_{1,2}^{n-1} & S_{1,3}^{n-2} \\ 0 & S_{2,2}^n & S_{2,3}^{n-1} \\ 0 & 0 & S_{3,3}^n \end{bmatrix} \hat{S}^{-1} N^{-1} M_0 x[0] + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi[n-i-1] f[i].$$

Автор выражает признательность рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей*. 3-е изд., испр. (Наука, М., 1967).
- [2] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов*. 13-е изд., испр. (Наука, М., 1986).
- [3] Балоев А.А. *Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами*. Palmarium Academic Publ., 2015.
- [4] Балоев А.А. *Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2012).
- [5] Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. *Математические основы автоматического регулирования* (Высш. шк., М., 1971).
- [6] Балоев А.А. Матрично-алгебраическая форма решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, Сиб. журн. индустр. матем. **17** (3), 3–12 (2014).

Арнольд Андреевич Балоев

Казанский национальный исследовательский технический университет,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: a.baloev@mail.ru

A.A. Baloev

Universal form of solving the stationary linear difference equation

Abstract. The form of solution of difference equation depends on a character of roots of its characteristic equation. It is of practical interest of writing down the general solution of such an equation in the form suitable for any (except for zero) roots. Namely this problem is solved in this paper. We also simplify an algorithm of obtaining of a solution.

Keywords: discrete system, multiple root.

Arnold Andreevich Baloev

Kazan National Research Technical University,
10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,

e-mail: a.baloev@mail.ru