Общероссийский математический портал

М. Б. Карманова, Минимальные поверхности-графики на произвольных двуступенчатых группах Карно, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 5, 15–29

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-5-15-29>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 08:05:24

М.Б. КАРМАНОВА

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ-ГРАФИКИ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ДВУСТУПЕНЧАТЫХ ГРУППАХ КАРНО

Аннотация. Установлены базовые свойства минимальных поверхностей-графиков, построенных по классу отображений двуступенчатых групп Карно. Методы исследования включают решение характерного для изучаемого случая вопроса о корректности постановки задачи. Основной результат о необходимых условиях минимальности сформулирован в терминах субриманова аналога средней кривизны.

Ключевые слова: двуступенчатая группа Карно, отображение-график, минимальная поверхность, средняя кривизна.

УДК: 517.2:517.4:514.7

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-5-15-29

ВВЕДЕНИЕ

Проведенные в статье исследования открывают основные свойства экстремальных поверхностей на неголономных структурах произвольных размерностей. Их известными примерами являются группы Карно. Такие структуры, как и их обобщения — пространства Карно—Каратеодори, применяются при моделировании и решении разнообразных теоретических и прикладных задач (см., например, комментарии и литературные источники в [1]). Цель настоящей работы состоит в рассмотрении отображений-графиков, построенных по классу отображений двуступенчатых групп Карно, и описании соответствующих минимальных поверхностей. Здесь и далее под термином “минимальная поверхность” будем понимать поверхность с минимальной площадью (подразумевается, что решение соответствующей краевой задачи существует). Специфика изучаемых структур и особенности соответствующих отображений порождают вопросы, не возникающие в евклидовом анализе или на неголономных структурах малых размерностей. В частности, в отличие от [2], [3], вопросы о корректности определения приращения функционала возникают уже при описании свойств горизонтального подпространства прообраза. Дело в том, что, как и в классическом анализе, вывод уравнений экстремальных поверхностей основан на дифференцировании функционала площади, который зависит от задающего поверхность отображения. Но если в евклидовом анализе можем заменить исходное отображение φ на измененное $\varphi + \varepsilon\psi$ того же класса, то на неголономных структурах так уже сделать не можем в силу зависимости координат степени два и выше от горизонтальных. Кроме того, когда горизонтальных полей более двух, то в силу такой зависимости возникает вопрос о свойствах их

Поступила в редакцию 26.03.2018, после доработки 17.07.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2, проект № 0314-2016-0006.

коммутаторов и их взаимосвязи с векторными полями высоких степеней, так как от таких соотношений напрямую зависит класс, в котором будут рассматриваться поверхности на предмет экстремальности их площади. Помимо этого, как и в [2], [3], во-первых, функционал площади будет меняться неодинаково для координат, стоящих при полях разных степеней, что также добавляет задаче сложность и специфику, и, во-вторых, для неголономных отображений понятие “экстремум площади” и “экстремум значений функционала площади” различны, так как во втором случае функционал может принимать некоторое значение, но существование самого отображения, определяющего поверхность с данной площадью, не обязательно (в силу того, что соответствующая задача в частных производных не всегда разрешима). Это различие является характерным для многомерного случая, когда график определяется отображением, а не функцией (ср., например, [4]).

В первом разделе приведем базовые определения, во втором опишем условия, при которых постановка задачи о минимальных поверхностях корректна, а в третьем сформулируем и решим задачу о минимальных поверхностях.

1. Двуступенчатые группы Карно: основные определения

Определение 1 (например, [5]). *Двуступенчатой группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представляется в виде прямой суммы

$$V = V_1 \oplus V_2, \quad [V_1, V_1] = V_2, \quad [V_1, V_2] = \{0\}. \quad (1)$$

Определение 2. Если в (1) условие $[V_1, V_1] = V_2$ заменить на $[V_1, V_1] \subset V_2$ и $[V_2, V_2] = \{0\}$, то $\mathbb{G}$ называется *двуступенчатой нильпотентной градуированной группой (Ли)*.

Из определений следует, что группа Карно является частным случаем нильпотентной градуированной группы.

Определение 3. Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$, и $X_1, X_2, \dots, X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V , причем

$$\begin{aligned} X_1, \dots, X_{\dim V_1} & \text{ — базис } V_1, \\ X_{\dim V_1+1}, \dots, X_N & \text{ — базис } V_2. \end{aligned}$$

Здесь символ $\dim V_1$ означает размерность V_1 . Если $X_j \in V_k$, $k = 1, 2$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается символом $\deg X_j$, $j = 1, \dots, N$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*. В рассматриваемом случае *глубина* группы $\mathbb{G}$ равна двум.

Замечание 1. Базис выбран таким образом, что его поля имеют либо степень один, либо степень два на всей группе $\mathbb{G}$.

Пусть символ $\mathbf{0}$ — единица группы $\mathbb{G}$.

Из формулы Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа и условия левоинвариантности базисных полей выводятся следующие выражения для групповой операции на $\mathbb{G}$. Если $x = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j X_j\right)(\mathbf{0})$, $y = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(\mathbf{0})$, то $x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^N z_j X_j\right)(\mathbf{0})$, где

$$\begin{aligned} z_j &= x_j + y_j && \text{для } \deg X_j = 1, \\ z_j &= x_j + y_j + \sum_{\substack{\mu > 0, \beta > 0 \\ \mu, \beta \leq \dim V_1}} F_{\mu, \beta}^j x^\mu y^\beta && \text{для } \deg X_j = 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь умножение $x \cdot y$ понимается в следующем смысле. Сначала движение идет вдоль интегральной линии векторного поля $\sum_{j=1}^N x_j X_j$ с началом в $\mathbf{0}$ до точки x , а затем — вдоль интегральной линии векторного поля $\sum_{j=1}^N y_j X_j$ с началом в x . Таким образом, интегральная линия поля $\sum_{j=1}^N z_j X_j$ соединяет точки $\mathbf{0}$ и $z = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(x)$.

Определение 4. Константы $\{F_{\mu,\beta}^j\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами группы* $\mathbb{G}$.

На группах Карно часто используется метрика Карно–Каратеодори d_{cc} , согласованная с неголономной структурой (например, [6]). Однако до сих пор остаются открытыми вопросы о строении ее шаров, кроме того, ее не всегда возможно использовать на нильпотентных градуированных группах, поэтому в таких случаях применяется квазиметрика d_∞ , которая на группах Карно локально билипшицево эквивалентна d_{cc} : если $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$, то $d_\infty(v, w) = \max_{i=1,\dots,N} \{|w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}$. Мы же будем использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную d_∞ (см. далее замечание 2).

Определение 5. Пусть $\mathbb{G}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности N , и $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$. Определим величину

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{i=1}^{\dim V_1} w_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{i=\dim V_1+1}^N w_i^2\right)^{\frac{1}{4}}\right\}.$$

Свойство 1. Величина $d_2(v, w)$ локально является квазиметрикой: она неотрицательна (и равна нулю тогда и только тогда, когда $v = w$), обладает свойством симметричности, и для всякой окрестности $D \subset \mathbb{G}$ существует константа $C_D < \infty$ такая, что обобщенное неравенство треугольника

$$d_2(v, w) \leq C_D(d_2(v, u) + d_2(u, w))$$

верно для всех $v, u, w \in D$.

Шар в квазиметрике d_2 радиуса r с центром в точке v , равный $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$, обозначим символом $\text{Box}_2(v, r)$.

Свойство 2. Рассмотрим точку $v \in \mathbb{G}$ и $(w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_v(w_1, \dots, w_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v).$$

Известно, что θ_v — гладкий диффеоморфизм.

Определение 6. Набор $\{w_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* (или *координатами первого рода*) (относительно $v \in \mathbb{G}$) точки $w = \theta_v(w_1, \dots, w_N)$.

Свойство 3. Образ шара $\text{Box}_2(v, r)$ при отображении θ_v^{-1} — декартово произведение шаров в евклидовой метрике, диаметры которых равны $2r$ и $2r^2$.

Замечание 2. Образ шара в квазиметрике d_∞ при отображении θ_v^{-1} равен декартову произведению кубов с длинами граней $2r$ и $2r^2$. При выводе свойств поверхностей, в частности, при подсчете их меры, возникает необходимость исследования пересечений соответствующих касательных плоскостей с субримановыми шарами. Так как форма пересечения шара с плоскостью всегда одна и та же (в отличие от случая кубов), то преимущество использования d_2 вместо d_∞ очевидно.

Свойство 4. С помощью свойства 3 непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$ относительно d_2 равна $\nu = \dim V_1 + 2 \dim V_2$.

Перейдем к подробному описанию условий задачи и приведем необходимые понятия и результаты для отображений групп Карно.

Определение 7. Отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, нильпотентных градуированных групп называется *контактным отображением класса C_H^1* , если его горизонтальные производные существуют и непрерывны, а отображение $\hat{D}_H \varphi = (X_1 \varphi, \dots, X_{\dim V_1} \varphi)$ переводит горизонтальные поля в горизонтальные.

Свойство 5. Всякое контактное отображение класса C_H^1 является локально липшицевым во внутреннем смысле: если обозначить d_2 -квазиметрику в образе символом $\tilde{d}_2$, то локально верно соотношение $\tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L d_2(x, y)$, $x, y \in \Omega$, для некоторого $L < \infty$, зависящего от рассматриваемой окрестности.

Определение 8 ([6], [7]). Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа, $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, и $\varphi : D \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ является *hc-дифференцируемым* (или *дифференцируемым в субримановом смысле*) в (предельной) точке $x \in D$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$d_2(\varphi(y), \mathcal{L}_x(y)) = o(d_2(x, y)) \quad \text{при } y \rightarrow x, \quad y \in D.$$

hc-дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathcal{L}_x$ обозначается символом $\hat{D}\varphi(x)$.

Для липшицевых в субримановом смысле отображений справедлив аналог теоремы Радемахера о *hc-дифференцируемости* почти всюду липшицевых отображений ([6], см. также [7] для измеримых множеств). Для рассматриваемого класса отображений верно следующее утверждение, учитывающее непрерывную дифференцируемость по горизонтальным полям [7].

Теорема 1 ([7]). Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа и $\varphi \in C_H^1(\Omega, \tilde{\mathbb{G}})$. Тогда φ непрерывно *hc-дифференцируемо* всюду. Иными словами, элементы $(\hat{D}\varphi)_{V_1, \tilde{V}_1}(x)$, $(\hat{D}\varphi)_{V_2, \tilde{V}_2}(x)$ субриманова дифференциала

$$\begin{pmatrix} (\hat{D}\varphi)_{V_1, \tilde{V}_1}(x) & 0 \\ 0 & (\hat{D}\varphi)_{V_2, \tilde{V}_2}(x) \end{pmatrix}$$

непрерывно зависят от $x \in \Omega$.

Предположение 1. Будем рассматривать $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, где

- (1) $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — контактное отображение класса $C_H^1 \cap C^2$;
- (2) $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество;

- (3) $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — двуступенчатая нильпотентная градуированная группа топологической размерности $N + \tilde{n} + 1$, с базисными полями $X_1, \dots, X_N, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{n}+1}$, алгеброй Ли векторных полей $\hat{V} = \hat{V}_1 \oplus \hat{V}_2$, где поля $X_1, \dots, X_n, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{n}}, n < N$, составляют базис $\hat{V}_1$, поля $X_{n+1}, \dots, X_N, \tilde{X}_{\tilde{n}+1}$ составляют базис $\hat{V}_2$, и единицей $\hat{\mathbf{0}}$;
- (4) $\mathbb{G}$ — группа Карно топологической размерности N с базисными полями $X_1, \dots, X_N$, алгеброй Ли векторных полей $V = V_1 \oplus V_2$, где поля $X_1, \dots, X_n$ составляют базис V_1 , поля $X_{n+1}, \dots, X_N$ составляют базис V_2 , и единицей $\mathbf{0}$;
- (5) $\tilde{\mathbb{G}}$ — группа Карно топологической размерности $\tilde{n} + 1$ с базисными полями $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{n}+1}$, алгеброй Ли векторных полей $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$, где поля $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{n}}$ составляют базис $\tilde{V}_1$, поле $\tilde{X}_{\tilde{n}+1}$ является базисным для $\tilde{V}_2$, и единицей $\tilde{\mathbf{0}}$;
- (6) $\hat{\mathbf{0}} = (\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{0}})$.

Замечание 3. Последнее условие предположения 1 означает, что, во-первых, пересечение $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ совпадает с единицей группы $\mathbb{U}$, и, во-вторых, обе группы пересекаются по своим единицам.

Обозначение единиц групп нулями обусловлено тем, что многие рассуждения проводятся в нормальных координатах в том числе, относительно этих единиц (см. определение 6). При этом, очевидно, что их координаты относительно самих себя нулевые.

Определение 9. Пусть выполнены условия предположения 1. *Отображение-график* $\varphi_{\Gamma} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$ сопоставляет точке x элемент

$$\mathbb{U} \ni \varphi_{\Gamma}(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(x),$$

где $\exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(\tilde{\mathbf{0}}) = \varphi(x) \in \tilde{\mathbb{G}}$.

Для описания меры на поверхностях-графиках нам потребуются следующие определения и утверждения.

Определение 10 (например, [8]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы Ли, $\Omega \subset \mathbb{G}$, $\psi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, и функция $\tilde{\mathbf{d}} : \psi(\Omega) \times \tilde{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ такова, что $\tilde{\mathbf{d}}(x, x) = 0$ и $\tilde{\mathbf{d}}(x, y) = \tilde{\mathbf{d}}(y, x)$ для всех точек ее области определения. Будем говорить, что ψ *полиномиально субриманово дифференцируемо* (или *полиномиально h -дифференцируемо*) в (предельной) точке $x \in \Omega$ относительно $\tilde{\mathbf{d}}$, если существует отображение $\mathcal{L}_x : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ такое, что

$$1) \tilde{\mathbf{d}}(\psi(w), \mathcal{L}_x(w)) = o(d_2(x, w)), \Omega \ni w \rightarrow x;$$

$$2) \mathcal{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w), \text{ где } L_x \text{ — полином по } w_1, \dots, w_N, \text{ а } \exp\left(\sum_{j=1}^N w_j X_j\right)(x) = w.$$

Отображение $\mathcal{L}_x$ называется *полиномиальным субримановым дифференциалом* (или *полиномиальным h -дифференциалом*) отображения ψ в точке x .

Теорема 2 ([8]). *График φ_{Γ} контактного отображения φ класса C_N^1 непрерывно полиномиально h -дифференцируем всюду.*

Из полученных в [8] для полиномиального h -дифференциала $\hat{D}_R \varphi_{\Gamma}$ выражений следует, что коэффициенты при полях второй степени будут сравнимы с d_2 , а не с $(d_2)^2$. Кроме того,

его дифференциал имеет вид

$$D(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)) = \begin{pmatrix} E_{\dim V_1} & 0 \\ * & E_{\dim V_2} \\ (\widehat{D}\varphi)_{V_1, \tilde{V}_1}(x) & 0 \\ * & (\widehat{D}\varphi)_{V_2, \tilde{V}_2}(x) \end{pmatrix},$$

где символ “*” обозначает элементы матрицы, которые могут не быть равными нулю, что существенно затрудняет вывод метрических свойств. Тем не менее, эта проблема решается при помощи специального нового базиса $\{^x X_1, \dots, ^x X_N, ^x \tilde{X}_1, \dots, ^x \tilde{X}_{\tilde{n}+1}\}$ в $\mathbb{U}$, который согласует неголономную структуру $\mathbb{U}$ с таковой у образов отображения-графика и его полиномиального субриманова дифференциала. Иными словами, образ $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle \text{Box}_2(x, r) \rangle$ полиномиального h -дифференциала можно параметризовать следующим образом: он будет совпадать с множеством

$$(^x \tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)} \circ \theta_{\varphi_\Gamma(x)}^{-1})(D_{\text{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle \text{Box}_2(x, r) \rangle),$$

где $^x \tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}$ — отображение координат первого рода в новом базисе, а D_{diag} — блочно-диагональная часть матрицы дифференциала (в базисе, перенумерованном по степеням) с блоками размерностей $(n + \tilde{n}) \times n$ и $(N - n + 1) \times (N - n)$. Иными словами, множество $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle \text{Box}_2(x, r) \rangle$ параметризуется образом субриманова шара при отображении

$$D_{\text{diag}}(\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x) = \begin{pmatrix} E_{\dim V_1} & 0 \\ (\widehat{D}\varphi)_{V_1, \tilde{V}_1}(x) & 0 \\ 0 & E_{\dim V_2} \\ 0 & (\widehat{D}\varphi)_{V_2, \tilde{V}_2}(x) \end{pmatrix}.$$

Определение 11. Если $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i ^x X_i + \sum_{j=1}^{\tilde{n}+1} w_{N+j} ^x \tilde{X}_j\right)(v)$, то

$$^x d_2(v, w) = \max \left\{ \left(\sum_{i=1}^n w_i^2 + \sum_{j=N+1}^{N+\tilde{n}} w_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{i=n+1}^N w_i^2 + w_{N+\tilde{n}+1}^2 \right)^{\frac{1}{4}} \right\}.$$

Шар с центром в v радиуса $r > 0$ обозначим символом $^x \text{Box}_2(v, r)$.

Опишем внутреннюю меру на поверхностях-графиках.

Определение 12. Пусть выполнены условия предположения 1. Значение *внутренней меры* $\mathcal{H}_\Gamma^\nu$ для подмножеств $A \subset \varphi_\Gamma(\Omega)$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{H}_\Gamma^\nu(A) = \omega_n \omega_{N-n} \cdot \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \varphi_\Gamma^{-1}(x_i) \text{Box}_2(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A .

Базовым результатом для исследований классов минимальных поверхностей является

Теорема 3 (см. также [9]). Пусть выполнены условия предположения 1. Тогда для отображений-графиков справедлива формула площади

$$\int_{\Omega} \mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\mathcal{H}_\Gamma^\nu(y), \quad (3)$$

где

$$\mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x) = \sqrt{\det(E_n + (\widehat{D}\varphi)_{V_1, \tilde{V}_1}^*(x)(\widehat{D}\varphi)_{V_1, \tilde{V}_1}(x))} \cdot \sqrt{1 + (\widehat{D}\varphi)_{V_2, \tilde{V}_2}^*(x)(\widehat{D}\varphi)_{V_2, \tilde{V}_2}(x)}. \quad (4)$$

2. УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОЙ ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧИ

При исследовании поверхностей в пятимерном пространстве, в [3] установлено, что вариация отображения (как аргумента функционала площади) зависит только от горизонтальных координат отображения. Поэтому для каждого $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ будем строить вариации, определяемые исходным отображением и набором $\xi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, \tilde{n}$. В отличие от пятимерного случая, когда отображение было определено на группе Гейзенберга с единственным нетривиальным коммутатором базисных полей, на произвольных двуступенчатых группах Карно существует более одного не равного нулю коммутатора. Так как вариации аргумента функционала площади на неголономных структурах зависят от коммутаторов полей и их соотношений, то на выбор определяющих вариацию отображения функций ξ_k , $k = 1, \dots, \tilde{n}$, могут возникнуть некоторые ограничения. Поэтому в данном разделе опишем условия корректности постановки задачи, т.е. условия отсутствия ограничений в выборе ξ_k , $k = 1, \dots, \tilde{n}$.

Теорема 4. *Для того чтобы не было ограничений в выборе ξ_k , $k = 1, \dots, \tilde{n}$, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы первого порядка горизонтальных полей были либо линейно независимы с остальными, либо равны нулю.*

Иными словами, на $\mathbb{G}$ всякое поле степени два должно быть представимо единственным образом через коммутаторы горизонтальных полей.

Пример 1. Простейшим примером группы, удовлетворяющей условиям теоремы 4, является группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ топологической размерности три с полями X, Y, T , где $[X, Y] = T$, определенными на $\mathbb{R}^3$. В качестве более сложного примера можно представить декартово произведение k экземпляров $\mathbb{R}^3$, на каждом из которых определены поля X_j, Y_j, T_j , где $[X_j, Y_j] = T_j$. Тогда по построению имеем $[X_j, Y_m] = [X_j, X_m] = [Y_j, Y_m] = 0$ для $m \neq j$, $j, m = 1, \dots, k$. Кроме того, можно рассмотреть декартово произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, где на $\mathbb{R}^3$ определена структура группы Гейзенберга, а на $\mathbb{R}$ — постоянное векторное поле Z . В этом случае, полагая поля X, Y, Z горизонтальными, получим группу, удовлетворяющую условиям теоремы 4. Действительно, по построению $[X, Z] = [Y, Z] = 0$ и $[X, Y] = T$.

Доказательство теоремы 4. Как установлено в [2], [3], вариация определяющего график отображения определяется изменением его горизонтальных координат $\varphi_1, \dots, \varphi_{\tilde{n}}$, где

$$\varphi(x) = \exp \left(\sum_{j=1}^{\tilde{n}+1} \varphi_j(x) \tilde{X}_j \right) (\tilde{0}).$$

Пусть $k > n$. Тогда если $X_k = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k [X_i, X_j]$ (здесь и далее $i < j$), то для $x \in \Omega$ имеем

$$\widehat{D}\varphi(x)\langle X_k \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \widehat{D}\varphi(x)\langle [X_i, X_j] \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k [\widehat{D}\varphi(x)\langle X_i \rangle, \widehat{D}\varphi(x)\langle X_j \rangle].$$

Кроме того, при $\widehat{D}\varphi(x)\langle X_i \rangle = \sum_{l=1}^{\tilde{n}} (\widehat{D}\varphi(x))_{li} \tilde{X}_l$, $i = 1, \dots, n$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k [\widehat{D}\varphi(x)\langle X_i \rangle, \widehat{D}\varphi(x)\langle X_j \rangle] &= \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \left[\sum_{l=1}^{\tilde{n}} (\widehat{D}\varphi(x))_{li} \tilde{X}_l, \sum_{m=1}^{\tilde{n}} (\widehat{D}\varphi(x))_{mj} \tilde{X}_m \right] = \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} ((\widehat{D}\varphi(x))_{li} (\widehat{D}\varphi(x))_{mj} - (\widehat{D}\varphi(x))_{mi} (\widehat{D}\varphi(x))_{lj}) [\tilde{X}_l, \tilde{X}_m] = \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} ((\widehat{D}\varphi(x))_{li} (\widehat{D}\varphi(x))_{mj} - (\widehat{D}\varphi(x))_{mi} (\widehat{D}\varphi(x))_{lj}) c_{lm\tilde{n}+1} \tilde{X}_{\tilde{n}+1}, \quad (5) \end{aligned}$$

где $i < j$ и $l < m$. Таким образом, значение $\widehat{D}\varphi(x)\langle X_k \rangle$ определяется однозначно и выражается в виде (5). Покажем, что условие единственности представления поля второй степени через коммутаторы горизонтальных полей является необходимым. Заменим горизонтальные координатные функции φ_j на $\psi_{\varepsilon,j} = \varphi_j + \varepsilon \xi_j$, где $\xi_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, \tilde{n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{D}\psi_{\varepsilon,j}(x)\langle X_k \rangle &= \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} \left[((\widehat{D}\varphi(x))_{li} + \varepsilon X_i \xi_l(x)) ((\widehat{D}\varphi(x))_{mj} + \varepsilon X_j \xi_m(x)) - \right. \\ &\quad \left. - ((\widehat{D}\varphi(x))_{mi} + \varepsilon X_i \xi_m(x)) ((\widehat{D}\varphi(x))_{lj} + \varepsilon X_j \xi_l(x)) \right] c_{lm\tilde{n}+1} \tilde{X}_{\tilde{n}+1} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} ((\widehat{D}\varphi(x))_{li} (\widehat{D}\varphi(x))_{mj} - (\widehat{D}\varphi(x))_{mi} (\widehat{D}\varphi(x))_{lj}) c_{lm\tilde{n}+1} \tilde{X}_{\tilde{n}+1} + \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} ((\widehat{D}\varphi(x))_{li} X_j \xi_m(x) - (\widehat{D}\varphi(x))_{lj} X_i \xi_m(x)) c_{lm\tilde{n}+1} \tilde{X}_{\tilde{n}+1} + \\ &\quad + \varepsilon \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} ((\widehat{D}\varphi(x))_{mj} X_i \xi_l(x) - (\widehat{D}\varphi(x))_{mi} X_j \xi_l(x)) c_{lm\tilde{n}+1} \tilde{X}_{\tilde{n}+1} + \\ &\quad + \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} (X_i \xi_l(x) X_j \xi_m(x) - X_i \xi_m(x) X_j \xi_l(x)) c_{lm\tilde{n}+1} \tilde{X}_{\tilde{n}+1}. \quad (6) \end{aligned}$$

Отметим, здесь $i < j$ и $l < m$. Фиксируем точку $x \in \Omega$ и перейдем к нормальным координатам относительно нее. Далее фиксируем k , а также такие m и l , что $c_{lm\tilde{n}+1} \neq 0$, и рассмотрим (в координатах первого рода) функции $\xi_l = x_p$ и $\xi_m = x_q$, а остальные положим равными нулю. Тогда в точке $0 \in \mathbb{R}^N$ имеем $(\theta_u^{-1})_* X_p \xi_l(0) = (\theta_u^{-1})_* X_q \xi_m(0) = 1$, а остальные соотношения равны нулю. В частности, последнее слагаемое в (6) равно

$$\varepsilon^2 a_{p,q}^k c_{lm\tilde{n}+1} \tilde{X}_{\tilde{n}+1} \neq 0.$$

Поэтому при предположении

$$X_k = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k [X_i, X_j] = \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{i,j}^k [X_i, X_j]$$

выводим

$$\varepsilon \cdot a_{p,q}^k S + \varepsilon^2 a_{p,q}^k c_{lm\tilde{n}+1} = \varepsilon \cdot \bar{a}_{p,q}^k S + \varepsilon^2 \bar{a}_{p,q}^k c_{lm\tilde{n}+1},$$

где величина S зависит только от точки x . Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то получаем $a_{p,q}^k = \bar{a}_{p,q}^k$ для всех возможных k, p, q . Иными словами, всякое поле степени два в прообразе должно быть представимо единственным образом через коммутаторы горизонтальных полей. Достаточность такого условия очевидна из (6). $\square$

В силу установленных результатов, к предположению 1 добавляется

Предположение 2. На $\mathbb{G}$ всякое поле степени два представимо в виде линейной комбинации коммутаторов горизонтальных полей единственным образом.

3. МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И СВОЙСТВА

Положим для субриманова дифференциала $\hat{D}_H \varphi(x) = (\hat{D}\varphi)_{V_1, \tilde{V}_1}(x)$ и $\hat{D}_{H^\perp} \varphi(x) = (\hat{D}\varphi)_{V_2, \tilde{V}_2}(x)$. Таким образом, матрица субриманова дифференциала в точке $x \in \Omega$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \hat{D}_H \varphi(x) & 0 \\ 0 & \hat{D}_{H^\perp} \varphi(x) \end{pmatrix}.$$

Определение 13. *Функционалом площади*, действующим на классе графиков, построенных по контактному отображениям класса $C_H^1 \cap C^2$, называется выражение

$$S(\varphi) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(E_n + \hat{D}_H \varphi(x)^* \hat{D}_H \varphi(x))} \cdot \sqrt{1 + \langle \hat{D}_{H^\perp} \varphi(x), \hat{D}_{H^\perp} \varphi(x) \rangle} d\mathcal{H}^n(x). \quad (7)$$

Здесь и далее верхний индекс “*” обозначает сопряженный оператор, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Замечание 4. Функционал площади (7) определен корректно и для произвольных липшицевых в субримановом смысле отображений.

Обозначим символом $\hat{D}\psi_\varepsilon(x)$ горизонтальный гомоморфизм, зависящий от точки $x \in \Omega$, значения которого определяются горизонтальными производными функций $\psi_{\varepsilon,j} = \varphi_j + \varepsilon \xi_j$ и соотношением (6) доказательства теоремы 4. Из него получаем условие на приращение функционала площади. А именно, для полей X_k второй степени имеем

$$\begin{aligned} \hat{D}\psi_\varepsilon(x)\langle X_k \rangle &= \hat{D}\varphi(x)\langle X_k \rangle + \\ &+ \varepsilon \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} \left((\hat{D}\varphi(x))_{li} X_j \xi_m(x) - (\hat{D}\varphi(x))_{lj} X_i \xi_m(x) \right) c_{lm\tilde{n}+1} \tilde{X}_{\tilde{n}+1} + \\ &+ \varepsilon \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} \left((\hat{D}\varphi(x))_{mj} X_i \xi_l(x) - (\hat{D}\varphi(x))_{mi} X_j \xi_l(x) \right) c_{lm\tilde{n}+1} \tilde{X}_{\tilde{n}+1} + \\ &+ \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} \left(X_i \xi_l(x) X_j \xi_m(x) - X_i \xi_m(x) X_j \xi_l(x) \right) c_{lm\tilde{n}+1} \tilde{X}_{\tilde{n}+1} = \\ &= \phi_k(x) \tilde{X}_{\tilde{n}+1} + (\varepsilon P_1^k(\hat{D}_H \varphi(x), \hat{D}_H \xi(x)) + \varepsilon^2 P_2^k(\hat{D}_H \xi(x))) \tilde{X}_{\tilde{n}+1}, \end{aligned}$$

где $i < j$ и $l < m$, ϕ_k — коэффициент при $\tilde{X}_{\tilde{n}+1}$ в $\hat{D}\varphi(x)\langle X_k \rangle$, P_1^k — полином от горизонтальных производных функций $\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{n}}$ степени один, а P_2^k — полином от горизонтальных производных функций $\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{n}}$ степени два, $k = n+1, \dots, N$. Здесь и далее символ $\hat{D}_H \xi$

обозначает матрицу из горизонтальных производных функций ξ_q , элемент которой с номером (q, p) равен $X_p \xi_q$, $q = 1, \dots, \tilde{n}$, $p = 1, \dots, n$.

Определение 14. Приращение функционала площади на элементе $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{n}})$ будет равно $S(\widehat{D}\psi_\varepsilon) - S(\varphi)$, где $S(\widehat{D}\psi_\varepsilon) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(E_n + (\widehat{D}_H \varphi(x) + \varepsilon D_H \xi(x))^* (\widehat{D}_H \varphi(x) + \varepsilon D_H \xi(x)))} \times \sqrt{1 + \Delta^2(x)} d\mathcal{H}^\nu(x)$, и

$$\Delta^2(x) = \sum_{k=n+1}^N (\phi_k(x) + \varepsilon P_1^k(\widehat{D}_H \varphi(x), \widehat{D}_H \xi(x)) + \varepsilon^2 P_2^k(\widehat{D}_H \xi(x)))^2.$$

Замечание 5. Фактически, аргументом функционала площади являются не отображения, а их субримановы дифференциалы или, в более общем случае, горизонтальные гомоморфизмы, зависящие от точек прообраза. Подчеркнем, что отображения ψ_ε , субриманов дифференциал которого равен $\widehat{D}\psi_\varepsilon(x)$ в почти каждой точке, может не существовать. Следовательно, понятия “минимальная площадь” и “минимум функционала площади” различны.

Введем теперь норму для отображений.

Определение 15. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$, $\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{n}} \in C_H^1(\Omega, \mathbb{R})$, и $m \in \mathbb{N}$. Для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{n}})$ равенством определим норму

$$\|\xi\|_m = \left(\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} |\xi_k(x)|^m + \sum_{\beta: |\beta|=m} |\widehat{\xi}(x)^\beta| d\mathcal{H}^\nu(x) \right)^{\frac{1}{m}},$$

а для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{n}})$ — (полу)норму

$$\|\xi\|_{H,m} = \left(\int_{\Omega} \sum_{\beta: |\beta|=m} |\widehat{\xi}(x)^\beta| d\mathcal{H}^\nu(x) \right)^{\frac{1}{m}}, \quad (8)$$

где $\widehat{\xi}$ — вектор-функция, состоящая из элементов

$$X_1 \xi_1, \dots, X_1 \xi_{\tilde{n}}, X_2 \xi_1, \dots, X_n \xi_{\tilde{n}}.$$

Пусть B — матрица. Символ $\|B\|_{H,m}$ обозначает выражение (8) с заменой подынтегрального выражения на сумму модулей всевозможных произведений элементов B из m множителей.

Теорема 5. Функционал площади (7) является дифференцируемым относительно нормы $\|\cdot\|_{4n}$.

Доказательство. Проведем сначала рассуждения для $n = 2$. Положим $E = E_n$ и исследуем на дифференцируемость функцию

$$f(\varepsilon) = \sqrt{\det(E + (A + \varepsilon B)^*(A + \varepsilon B))} \cdot \sqrt{1 + \sum_{k=n+1}^N (c_k + \varepsilon P_1^k(a_{ij}, b_{ml}) + \varepsilon^2 P_2^k(b_{ml}))^2},$$

$i, j = 1, \dots, n$, $i < j$, $l, m = 1, \dots, \tilde{n}$, $l < m$. Так как $|f(\varepsilon) - f(0) - f'(0)\varepsilon| \leq \frac{\varepsilon^2}{2} |f''(\tilde{\varepsilon})|$, $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$, то для доказательства дифференцируемости найдем вторую производную. Для удобства выпишем сначала производные каждого множителя. Обозначим

$$f_1(\varepsilon) = \sqrt{\det(E + (A + \varepsilon B)^*(A + \varepsilon B))} = \sqrt{f_2(\varepsilon)},$$

$$f_3(\varepsilon) = \sqrt{1 + \sum_{k=n+1}^N (c_k + \varepsilon P_1^k(a_{ij}, b_{ml}) + \varepsilon^2 P_2^k(b_{ml}))^2} = \sqrt{f_4(\varepsilon)}.$$

Кроме того, представим матрицы A и B в виде наборов столбцов:

$$A = (a_1, \dots, a_n), \quad B = (b_1, \dots, b_n).$$

Тогда $f'_2(\varepsilon)$ — сумма n слагаемых, где каждое слагаемое с номером i представляет собой определитель матрицы $E + (A + \varepsilon B)^*(A + \varepsilon B)$; здесь строку с номером i заменили строкой с номером i этой же матрицы, элементы которой продифференцированы по ε , $i = 1, \dots, n$. Эта строка равна $b_i^* A + a_i^* B + 2\varepsilon b_i^* B$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим матрицу с такой замененной строкой символом $A'_B(i, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда при $\varepsilon = 0$ с помощью разложения определителя по строке и с учетом линейности получаем

$$f'_2(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle b_i, a_j \rangle (E + A^* A)_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle a_i, b_j \rangle (E + A^* A)_{ij}, \quad (9)$$

так как элементы строки с номером i равны $\langle b_i, a_j \rangle + \langle a_i, b_j \rangle$, где $(E + A^* A)_{ij}$ — алгебраические дополнения, $i, j = 1, \dots, n$.

В случае рассмотрения второй производной определителя, получим n^2 слагаемых, каждое из которых равно определителю матрицы $A'_B(i, \varepsilon)$, в которой одну из строк заменили строкой, состоящей из производных ее элементов. Иными словами, это матрица $E + (A + \varepsilon B)^*(A + \varepsilon B)$, в которой либо строки i и j , $i \neq j$, равны соответственно $b_i^* A + a_i^* B + 2\varepsilon b_i^* B$ и $b_j^* A + a_j^* B + 2\varepsilon b_j^* B$, либо строка с номером i равна $2b_i^* B$, $i, j = 1, \dots, n$. Матрицы, полученные в результате замены двух строк, обозначим символом $A''_B(i, j, \varepsilon)$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, а одной — символом $A''_B(i, i, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$. Заметим, что вторая производная определителя оценивается как

$$O\left(\sum_{i,j} b_{ij}^2\right), \quad (10)$$

если $\varepsilon = 0$. В случае, когда $\varepsilon \neq 0$, то появляются еще слагаемые

$$O\left(\varepsilon \sum b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} b_{i_3 j_3}\right) + O\left(\varepsilon^2 \sum b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} b_{i_3 j_3} b_{i_4 j_4}\right), \quad (11)$$

но так как элементы B ограничены, а $\varepsilon > 0$ мало, то и они оцениваются через (10). Тем не менее, в силу присутствия слагаемых (11) дифференцируемость будем устанавливать по норме, как минимум, $\|\cdot\|_4$.

Далее, очевидно,

$$f'_4|_{\varepsilon=0} = 2 \sum_{k=n+1}^N c_k P_1^k(a_{ij}, b_{ml}). \quad (12)$$

Кроме того,

$$f''_4(\varepsilon) = 2 \sum_{k=n+1}^N \left((P_1^k(a_{ij}, b_{ml}))^2 + 2c_k P_2^k(b_{ml}) + 6\varepsilon P_1^k(a_{ij}, b_{ml}) P_2^k(b_{ml}) + 6\varepsilon^2 (P_2^k(b_{ml}))^2 \right). \quad (13)$$

Перейдем непосредственно к исследованию дифференцируемости функционала. Найдём оценку сверху $(f_1(\varepsilon)f_3(\varepsilon))'' = (\sqrt{f_2(\varepsilon)}\sqrt{f_4(\varepsilon)})''$. Она выражается в виде

$$\frac{2f_2''f_2 - (f_2')^2}{2f_2^{3/2}} + 2\frac{f_2'}{2\sqrt{f_2}}\frac{f_4'}{2\sqrt{f_4}} + \frac{2f_4''f_4 - (f_4')^2}{2f_4^{3/2}}.$$

Так как $(A + \varepsilon B)^*(A + \varepsilon B) = QD_\varepsilon Q^T$, Q — ортогональная матрица, а D_ε — диагональная матрица с неотрицательными элементами (в силу того, что матрица $(A + \varepsilon B)^*(A + \varepsilon B)$ положительно определена), то

$$E + (A + \varepsilon B)^*(A + \varepsilon B) = Q(E + D_\varepsilon)Q^T,$$

и поэтому $f_2 \geq 1$. Кроме того, по определению $f_4 \geq 1$. Из оценок (9)–(13) следует

$$\begin{aligned} |(f_1(\varepsilon)f_3(\varepsilon))''| &\leq K_1 \left(\sum_{i,j} b_{ij}^2 \right) + \varepsilon K_2 \left(\sum |b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} b_{i_3 j_3}| \right) + \varepsilon^2 K_3 \left(\sum |b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} b_{i_3 j_3} b_{i_4 j_4}| \right) + \\ &\quad + O(\varepsilon^2) \left(\sum_{l=5}^8 K_l \prod_{k=1}^l |b_{i_k j_k}| \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда для $\Omega \in \mathbb{G}$ имеем дифференцируемость функционала площади относительно нормы $\|\cdot\|_8$ (для первых двух слагаемых соотношения (14) достаточно применить неравенство Гёльдера для интегралов):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} |b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2} b_{i_3 j_3}| dx \right| &\leq \left| \int_{\Omega} (b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2})^2 dx \right|^{1/2} \left| \int_{\Omega} (b_{i_3 j_3})^2 dx \right|^{1/2} \leq \\ &\leq K(\Omega) \left| \int_{\Omega} (b_{i_1 j_1} b_{i_2 j_2})^4 dx \right|^{1/4} \left| \int_{\Omega} (b_{i_3 j_3})^8 dx \right|^{1/8} \leq K(\Omega) \|B\|_{H,8}^3. \end{aligned}$$

Окончательно, в силу оценки (10) получаем

$$|f(\varepsilon) - f(0) - f'(0)\varepsilon| \leq C(\Omega) \|B\|_{H,8}.$$

Рассуждения для произвольного $n > 2$ проводятся аналогично с учетом того, что в соотношениях вида (11) и (14) полином от элементов матрицы B будет иметь степень $2n$ вместо 4 в силу правил вычисления определителя. Таким образом, функционал площади (7) дифференцируем относительно (полу)нормы $\|\cdot\|_{H,4n}$ и нормы $\|\cdot\|_{4n}$. $\square$

Из установленного утверждения получаем следующий результат, являющийся одним из основных в статье.

Теорема 6. *Для того чтобы функционал площади достигал минимума на поверхности-графике, определяемой контактным отображением φ и горизонтальным гомоморфизмом $\hat{D}\varphi$, среди значений, определяемых горизонтальными гомоморфизмами вида $\hat{D}\psi_\varepsilon$ из обозначения 4, необходимо, чтобы был равен нулю интеграл*

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}_H(\varphi, \xi) \frac{\sqrt{1 + \langle \hat{D}\varphi_{H^\perp}, \hat{D}\varphi_{H^\perp} \rangle}}{\sqrt{\det(E_n + \hat{D}_H \varphi^* \hat{D}_H \varphi)}} + \mathcal{D}_{H^\perp}(\varphi, \xi) \frac{\sqrt{\det(E_n + \hat{D}_H \varphi^* \hat{D}_H \varphi)}}{\sqrt{1 + \langle \hat{D}_{H^\perp} \varphi, \hat{D}_{H^\perp} \varphi \rangle}} d\mathcal{H}^\nu,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_H(\varphi, \xi, x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle (D\xi)_i, (\hat{D}_H \varphi(x))_j \rangle (E + \hat{D}_H \varphi(x)^* \hat{D}_H \varphi(x))_{ij} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle (\hat{D}_H \varphi(x))_i, (D\xi)_j \rangle (E + \hat{D}_H \varphi(x)^* \hat{D}_H \varphi(x))_{ij}, \end{aligned}$$

кроме того,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{H^\perp}(\varphi, \xi, x) = & 2 \sum_{k=n+1}^N (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1k} \times \\ & \times \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} \left((\widehat{D}\varphi(x))_{li} X_j \xi_m(x) - (\widehat{D}\varphi(x))_{lj} X_i \xi_m(x) \right) c_{lm\tilde{n}+1} + \right. \\ & \left. + \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} \left((\widehat{D}\varphi(x))_{mj} X_i \xi_l(x) - (\widehat{D}\varphi(x))_{mi} X_j \xi_l(x) \right) c_{lm\tilde{n}+1} \right), \end{aligned}$$

причем $i < j$, $l < m$, $D\xi$ — матрица дифференциала $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{\tilde{n}})$, $(A)_i$ — столбец матрицы A с номером i , а A_{ij} — алгебраическое дополнение.

Замечание 6. Так как вариации для отображений с неголономным образом определены в общем случае не всегда, то понятия “максимальная площадь поверхности” и “максимум функционала площади” различны (см. подробности в [3], замечание 34).

Положим

$$\mathcal{F}(\varphi) = \frac{\sqrt{1 + \langle \widehat{D}\varphi_{H^\perp}, \widehat{D}\varphi_{H^\perp} \rangle}}{\sqrt{\det(E_n + \widehat{D}_H \varphi^* \widehat{D}_H \varphi)}}$$

и преобразуем значения $\mathcal{D}_H(\varphi, \xi, x)$ и $\mathcal{D}_{H^\perp}(\varphi, \xi, x)$, чтобы сформулировать определения субримановой средней кривизны и соответствующий критерий. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_H(\varphi, \xi, x) = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\tilde{n}} (X_i \xi_k(x) \cdot X_j \varphi_k(x) + X_i \varphi_k(x) \cdot X_j \xi_k(x)) (E + \widehat{D}_H \varphi(x)^* \widehat{D}_H \varphi(x))_{ij} = \\ = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\tilde{n}} (X_i \xi_k(x) \cdot X_j \varphi_k(x)) (E + \widehat{D}_H \varphi(x)^* \widehat{D}_H \varphi(x))_{ij} + \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\tilde{n}} (X_i \xi_k(x) \cdot X_j \varphi_k(x)) (E + \widehat{D}_H \varphi(x)^* \widehat{D}_H \varphi(x))_{ji}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{H^\perp}(\varphi, \xi, x) = & 2 \sum_{k=n+1}^N (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} c_{lm\tilde{n}+1} \left(X_i \varphi_l(x) \cdot X_j \xi_m(x) - X_j \varphi_l(x) \cdot X_i \xi_m(x) \right) + \\ & + 2 \sum_{k=n+1}^N (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} c_{lm\tilde{n}+1} \left(X_j \varphi_m \cdot X_i \xi_l(x) - X_i \varphi_m(x) \cdot X_j \xi_l(x) \right), \quad (16) \end{aligned}$$

где $i < j$ и $l < m$. Далее будем предполагать, что $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область с достаточно гладкой границей, и $\xi|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Тогда при действии сопряженным к X_i и X_j оператором, который совпадает с X_i и X_j соответственно, и интегрировании по частям получаем, что в правой части суммы (15) каждое слагаемое меняется на

$$X_i \langle X_j \varphi_k(x) (E + \widehat{D}_H \varphi(x)^* \widehat{D}_H \varphi(x))_{ij} \mathcal{F}(\varphi) \rangle \cdot \xi_k$$

или

$$X_i \langle X_j \varphi_k(x) (E + \widehat{D}_H \varphi(x)^* \widehat{D}_H \varphi(x))_{ji} \mathcal{F}(\varphi) \rangle \cdot \xi_k,$$

а в (16)

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{k=n+1}^N \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} c_{lm\tilde{n}+1} X_j \left\langle X_i \varphi_l(x) (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k} \mathcal{F}(\varphi)^{-1} \right\rangle \xi_m(x) - \\
& - 2 \sum_{k=n+1}^N \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} c_{lm\tilde{n}+1} X_i \left\langle X_j \varphi_l(x) (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k} \mathcal{F}(\varphi)^{-1} \right\rangle \xi_m(x) + \\
& + 2 \sum_{k=n+1}^N \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} c_{lm\tilde{n}+1} X_i \left\langle X_j \varphi_m(x) (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k} \mathcal{F}(\varphi)^{-1} \right\rangle \xi_l(x) - \\
& - 2 \sum_{k=n+1}^N \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{l,m=1}^{\tilde{n}} c_{lm\tilde{n}+1} X_j \left\langle X_i \varphi_m(x) (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k} \mathcal{F}(\varphi)^{-1} \right\rangle \xi_l(x),
\end{aligned}$$

где $i < j$ и $l < m$.

Из приведенных выше рассуждений выводим понятие горизонтальной средней кривизны, которое является субримановым аналогом средней кривизны.

Определение 16. Вектором *горизонтальной средней кривизны* называется набор $H^{SR}(\varphi, x) = (H_1^{SR}(x), \dots, H_{\tilde{n}}^{SR}(x))$, где

$$\begin{aligned}
H_m^{SR}(x) = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i \left\langle X_j \varphi_m(x) (E + \widehat{D}_H \varphi(x)^* \widehat{D}_H \varphi(x))_{ij} \mathcal{F}(\varphi) \right\rangle + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i \left\langle X_j \varphi_m(x) (E + \widehat{D}_H \varphi(x)^* \widehat{D}_H \varphi(x))_{ji} \mathcal{F}(\varphi) \right\rangle + \\
& + 2 \sum_{k=n+1}^N \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{1 \leq l < m} c_{lm\tilde{n}+1} X_j \left\langle X_i \varphi_l(x) (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k} \mathcal{F}(\varphi)^{-1} \right\rangle - \\
& - 2 \sum_{k=n+1}^N \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{1 \leq l < m} c_{lm\tilde{n}+1} X_i \left\langle X_j \varphi_l(x) (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k} \mathcal{F}(\varphi)^{-1} \right\rangle + \\
& + 2 \sum_{k=n+1}^N \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{m < l \leq \tilde{n}} c_{ml\tilde{n}+1} X_i \left\langle X_j \varphi_l(x) (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k} \mathcal{F}(\varphi)^{-1} \right\rangle - \\
& - 2 \sum_{k=n+1}^N \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^k \sum_{m < l \leq \tilde{n}} c_{ml\tilde{n}+1} X_j \left\langle X_i \varphi_l(x) (\widehat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k} \mathcal{F}(\varphi)^{-1} \right\rangle, \quad (17)
\end{aligned}$$

$m = 1, \dots, \tilde{n}$.

Из теоремы 6 и формулы интегрирования по частям получаем следующее необходимое условие минимальности.

Теорема 7. Для того чтобы функционал площади достигал минимума на поверхности-графике, определяемой контактным C^2 -отображением φ и горизонтальным гомоморфизмом $\widehat{D}\varphi$, среди значений, определяемых горизонтальными гомоморфизмами вида $\widehat{D}\psi_\varepsilon$, необходимо, чтобы для $H_m^{SR}(x)$ из (17) выполнялось $H_m^{SR} \equiv 0$, $m = 1, \dots, \tilde{n}$.

Таким образом, уравнения $H_m^{SR} \equiv 0$, $m = 1, \dots, \tilde{n}$, описывают классы минимальных поверхностей.

Пример 2. Если отображение определяется горизонтальным гомоморфизмом, не зависящим от $x \in \Omega$, то для него $H_m^{SR} \equiv 0$, $m = 1, \dots, \tilde{n}$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Karmanova M., Vodopyanov S. *Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas*, Anal. and Math. Phys., 233–335 (Birkhäuser, Basel, 2009).
- [2] Карманова М.Б. *Вариации отображений с неголономным образом и применения к теории максимальных поверхностей*, Докл. РАН **468** (3), 257–260 (2016).
- [3] Карманова М.Б. *Максимальные поверхности на пятимерных групповых структурах*, Сиб. матем. журн. **59** (3), 561–579 (2018).
- [4] Карманова М.Б. *Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно*, Сиб. матем. журн. **53** (4), 839–861 (2012).
- [5] Folland G.B., Stein E.M. *Hardy spaces on homogeneous groups* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1982).
- [6] Pansu P. *Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. Math. **129** (1), 1–60 (1989).
- [7] Vodopyanov S. *Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings*, The Interaction Anal. and Geometry, Contemp. Math., (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007), **424**, 247–301.
- [8] Карманова М.Б. *О полиномиальной субримановой дифференцируемости некоторых гёльдеровых отображений групп Карно*, Сиб. матем. журн. **58** (2), 305–332 (2017).
- [9] Карманова М.Б. *Формулы площади для классов гёльдеровых отображений групп Карно*, Сиб. матем. журн. **58** (5), 1056–1079 (2017).

Мария Борисовна Карманова

Институт математики им. С.Л. Соболева

Сибирского отделения Российской академии наук,

пр. Академика Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,

e-mail: maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

M.B. Karmanova

Minimal graph-surfaces on arbitrary two-step Carnot groups

Abstract. We establish basic properties of minimal graph-surfaces constructed from classes of mappings defined on two-step Carnot groups. Research methods include solving of a specific question on correctness of the problem statement. A main result on necessary minimality conditions is formulated in terms of sub-Riemannian analog of mean curvature.

Keywords: two-step Carnot group, graph-mapping, minimal surface, mean curvature.

Maria Borisovna Karmanova

Sobolev Institute of Mathematics,

Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,

4 Acad. Koptug Ave., Novosibirsk, 630090 Russia,

e-mail: maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com