Общероссийский математический портал

М. Ю. Кокурин, О процедурах регуляризации с линейными оценками точности аппроксимации, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 5, 30–39

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-5-30-39>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:08:02

М.Ю. КОКУРИН

О ПРОЦЕДУРАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С ЛИНЕЙНЫМИ ОЦЕНКАМИ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ

Аннотация. Рассматриваются численные методы устойчивой аппроксимации решения нерегулярного нелинейного уравнения с гладким оператором общего вида в гильбертовом пространстве. В общем случае известные процедуры вариационной и итеративной регуляризации доставляют приближения, погрешность которых оценивается величиной, большей по порядку относительно точности входных данных. В статье для определенных компонент искомого решения устанавливается возможность получения аппроксимации с линейной оценкой точности относительно уровня погрешности входных данных. Указанные компоненты выделяются проектированием решения на собственные подпространства, связанные с симметризованной производной оператора задачи.

Ключевые слова: некорректная задача, метод Тихонова, итеративная регуляризация, метод Гаусса–Ньютона, оценка точности.

УДК: 517.988

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-5-30-39

1. Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x) = f, \quad x \in H_1, \quad (1)$$

с дифференцируемым по Фреше оператором $F : H_1 \rightarrow H_2$, где H_1, H_2 — гильбертовы пространства, $f \in H_2$. Ради упрощения рассуждений предполагаем, что уравнение (1) имеет единственное решение x^* . Считаем, что оператор F дифференцируем по Фреше, и производная F' удовлетворяет на шаре

$$\Omega_R(x^*) = \{x \in H_1 : \|x - x^*\|_{H_1} \leq R\}$$

условию Липшица

$$\|F'(x) - F'(y)\|_{L(H_1, H_2)} \leq L\|x - y\|_{H_1}, \quad x, y \in \Omega_R(x^*). \quad (2)$$

Из неравенства (2) следует, что для подходящей константы M выполняется

$$\|F'(x)\|_{L(H_1, H_2)} \leq M, \quad x \in \Omega_R(x^*). \quad (3)$$

В (3) можно положить $M = \|F'(\bar{x})\|_{L(H_1, H_2)} + 2LR$ с произвольной $\bar{x} \in \Omega_R(x^*)$. При наших предположениях, не требующих регулярности оператора F в окрестности решения, задача

Поступила в редакцию 28.03.2018, после доработки 17.04.2018. Принята к публикации 20.06.2018

Благодарности. Работа выполнена в рамках госзадания Министерства образования и науки Российской Федерации по Марийскому госуниверситету (проект 1.5420.2017/8.9); поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 16-01-00039а.

(1) является в общем случае некорректной. Регулярность оператора F по определению означает, что оператор $F'(x^*)$ либо $F'^*(x^*)F'(x^*)$ непрерывно обратим ([1], гл. 2, § 1).

В виде нерегулярного операторного уравнения (1) записывается широкий спектр прикладных обратных задач. Элемент f в (1) обычно играет роль входных данных рассматриваемой обратной задачи, поэтому на практике он часто бывает известен приближенно. Пусть вместо элемента f доступна его аппроксимация $f_\delta \in H_2$, где

$$\|f_\delta - f\|_{H_2} \leq \delta, \quad (4)$$

величина $\delta \geq 0$ также считается заданной.

Для получения устойчивой аппроксимации точки x^* по данным (δ, f_δ) могут быть использованы как вариационные методы регуляризации, так и итеративно регуляризованные итерационные процессы ([1]–[3] и имеющиеся там ссылки).

Особый практический интерес представляют некорректные задачи (1) и регуляризующие алгоритмы для них, обеспечивающие точность получаемых приближений порядка $O(\delta)$. Этот интерес объясняется тем, что линейные по δ оценки точности характерны для численных методов решения регулярных уравнений (1) с приближенно заданной правой частью. Пусть априори известно, что искомое решение уравнения (1) принадлежит множеству $D \subset H_1$. В [4] установлено, что необходимым условием для существования регуляризующих алгоритмов $\mathcal{R} : H_2 \times [0, \infty) \rightarrow H_1$ таких, что

$$\Delta_D(\mathcal{R}, \delta) = O(\delta), \quad \delta \in (0, \bar{\delta}],$$

$$\Delta_D(\mathcal{R}, \delta) \triangleq \sup\{\|\mathcal{R}(f_\delta, \delta) - x\|_{H_1} : x \in D, f_\delta \in H_2, \|F(x) - f_\delta\|_{H_2} \leq \delta\},$$

является условная корректность ([5], с. 11) задачи (1) на D , характеризуемая линейной оценкой условной устойчивости

$$\|F(x) - F(y)\|_{H_2} \geq \omega \|x - y\|_{H_1} \quad \forall x, y \in D \quad (\omega > 0).$$

При отсутствии этого свойства условной устойчивости интересующая нас оценка точности $O(\delta)$ может быть получена за счет наложения иных структурных условий на оператор F и решение x^* . Например, в [6], [7] такая оценка установлена для класса итеративно регуляризованных методов типа Гаусса–Ньютона в предположении, что оператор $F'(x^*)$ нормально разрешим, а решение x^* удовлетворяет условию истокопредставимости (см. ниже условие 2). Без наложения подобных дополнительных требований на оператор F , неулучшаемые оценки точности приближений, доставляемых регуляризующими алгоритмами, имеют порядок $O(\varphi(\delta))$, превосходящий δ , так что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\varphi(\delta)} = 0.$$

Поэтому представляет интерес вопрос о том, какие компоненты решения x^* могут быть аппроксимированы существующими регуляризующими алгоритмами с точностью $O(\delta)$ в условиях неулучшаемой оценки близости получаемого приближения к x^* , выражаемой величиной $O(\varphi(\delta))$ при $\delta = o(\varphi(\delta))$, $\delta \rightarrow 0$. Этому вопросу посвящена данная работа. Формализуем постановку вопроса следующим образом. Пусть $\tilde{x}$ есть приближение, вырабатываемое тем или иным регуляризующим алгоритмом для решения задачи (1). Пусть при подходящих условиях на оператор F и решение x^* имеет место оценка $\|\tilde{x} - x^*\|_{H_1} = O(\varphi(\delta))$. Задача состоит в определении подпространства $\mathcal{L}(\tilde{x}) \subset H_1$, вообще говоря, зависящего от $\tilde{x}$ и бесконечномерного, и соответствующего ортопроектора $\mathcal{P}(\tilde{x}) : H_1 \rightarrow \mathcal{L}(\tilde{x})$ таких, что

$$\|\mathcal{P}(\tilde{x})(\tilde{x} - x^*)\|_{H_1} = O(\delta).$$

В этом случае элемент $\tilde{p} = \mathcal{P}(\tilde{x})\tilde{x}$ аппроксимирует ортогональную компоненту $\mathcal{P}(\tilde{x})x^*$ искомого решения $x^* = \mathcal{P}(\tilde{x})x^* + (E_1 - \mathcal{P}(\tilde{x}))x^*$, лежащую в $\mathcal{L}(\tilde{x})$, с точностью $O(\delta)$. Таким образом, указанная компонента решения восстанавливается с точностью, характерной для процедур решения корректно поставленных задач. Описанная конструкция содержательна в том случае, когда элемент $\tilde{p}$ допускает обозримые процедуры численной аппроксимации. Здесь и далее в статье E_1 — единичный оператор пространства H_1 .

Основным для дальнейшего изложения является

Условие 1. Точка $\lambda = m > 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора $F'^*(x^*)F'(x^*)$.

Обозначим

$$\chi_m(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < m \\ 1; & \lambda \geq m \end{cases}, \quad P_m(x) = \chi_m(F'^*(x)F'(x)). \quad (5)$$

Таким образом, $P_m(x)$ есть ортопроектор из H_1 на собственное подпространство оператора $F'^*(x)F'(x)$, отвечающее части его спектра в отрезке $[m, \|F'(x)\|_{L(H_1, H_2)}^2]$. В рассматриваемых ниже примерах принимаем $\mathcal{P}(\tilde{x}) = P_m(\tilde{x})$, так что $\mathcal{L}(\tilde{x}) = \mathcal{L}_m(\tilde{x})$ есть собственное подпространство оператора $F'^*(\tilde{x})F'(\tilde{x})$, соответствующее части его спектра в $[m, \|F'(\tilde{x})\|_{L(H_1, H_2)}^2]$. Параметр m доставляет возможность управлять размером подпространства $\mathcal{L}_m(\tilde{x})$ относительно H_1 . В частности, если $F'^*(\tilde{x})F'(\tilde{x})$ есть вполне непрерывный оператор с бесконечным числом положительных собственных значений, то подпространство $\mathcal{L}_m(\tilde{x})$ конечномерно для любого $m > 0$ и $\lim_{m \rightarrow 0} \dim \mathcal{L}_m(\tilde{x}) = \infty$. В данном случае оценка

$$\|P_m(\tilde{x})(\tilde{x} - x^*)\|_{H_1} = O(\delta) \quad (6)$$

означает, что “низкочастотные гармоники” решения x^* относительно ортонормированного базиса собственных векторов оператора $F'^*(\tilde{x})F'(\tilde{x})$ определяются в процессе отыскания $\tilde{x}$ с точностью $O(\delta)$. При этом основной вклад в $\|\tilde{x} - x^*\|_{H_1}$ вносят погрешности аппроксимации “высокочастотных гармоник” в составе x^* , отвечающих значениям спектрального параметра $0 < \lambda < m$. В качестве следствия отметим, что при наличии указанной оценки значение любого линейного функционала от x^* вида $\Lambda(x) = (g, x)_{H_1}$, $g \in \mathcal{L}_m(\tilde{x})$, также определяется с точностью $O(\delta)$. Действительно,

$$|\Lambda(\tilde{x}) - \Lambda(x^*)| \leq \|g\|_{H_1} \|P_m(\tilde{x})(\tilde{x} - x^*)\|_{H_1} = O(\delta).$$

В линейном случае оценки вида (6) характерны для методов спектральной срезки ([8], с. 33). Пусть $F(x) = Ax$, $A \in L(H_1, H_2)$, есть линейный оператор. Обозначим $P_m = \chi_m(A^*A)$ и сопоставим уравнению $Ax = f$ регуляризованную задачу $P_m A^* A P_m \tilde{x} = P_m A^* f$, $\tilde{x} \in \mathcal{L}_m = R(P_m)$. Здесь оператор $P_m A^* A$ непрерывно обратим на $\mathcal{L}_m$. Используя (4) и равенство $P_m A^* A P_m x^* = P_m A^* f$, получаем $\|P_m(\tilde{x} - x^*)\|_{H_1} = O(\delta)$.

Ниже покажем, как описанная общая конструкция реализуется в том случае, когда приближение $\tilde{x}$ генерируется схемой Тихонова, либо группой итеративно регуляризованных методов типа Гаусса–Ньютона для нелинейных уравнений (1). Заметим, что схемы указанных методов не включают в явном виде операций типа спектральной срезки. Минимальное дополнительное предположение, при котором в настоящее время удается оценить точность получаемых этими методами приближений без наложения на оператор F дополнительных структурных условий, сводится к следующему условию истокопредставимости решения x^* .

Условие 2. Имеет место представление

$$x^* - \xi = F'^*(x^*)w, \quad w \in H_2.$$

Кроме того, на норму элемента w в условии 2 налагаются верхние ограничения, см. ниже (10), (28). Если эти требования выполнены, то точность приближений, генерируемых указанными методами, оценивается величиной $O(\delta^{1/2})$, причем последняя оценка неулучшаема по порядку δ .

План дальнейшего изложения следующий. В п. 2 с точки зрения возможностей аппроксимации подходящей компоненты решения с линейной по δ оценкой погрешности исследуется схема Тихонова. Пункт 3 посвящен такому же анализу группы итеративно регуляризованных итерационных процессов типа Гаусса–Ньютона.

2. Исследуемая версия схемы Тихонова заключается в том, что в качестве приближения к решению (1) выбирается решение вариационной задачи

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \|F(x) - f_\delta\|_{H_2}^2 + \frac{1}{2} \alpha \|x - \xi\|_{H_1}^2 : x \in H_1 \right\}. \quad (7)$$

Здесь $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ — параметр регуляризации, параметр ξ играет роль априорной оценки искомого решения. Всюду далее в этом разделе считаем, что оператор $F : H_1 \rightarrow H_2$ слабо непрерывен, т. е. слабая сходимость $x_n \rightarrow \bar{x}$ в H_1 влечет $F(x_n) \rightarrow F(\bar{x})$ слабо в H_2 . При выполнении этого условия множество X_α решений задачи (7) непусто при любых $\alpha > 0$, $f_\delta \in H_2$. Пусть параметр регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ согласован с погрешностью так, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} = 0. \quad (8)$$

В этом случае при любом выборе $x_{\alpha(\delta)} \in X_{\alpha(\delta)}$ имеет место сходимость (например, [5], [9])

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x_{\alpha(\delta)} - x^*\|_{H_1} = 0. \quad (9)$$

Для погрешности приближения x_α , $\alpha > 0$, имеем следующую оценку ([9], с. 246).

Теорема 1. Пусть выполняется условие 2, имеет место (2) и, кроме того,

$$\|w\|_{H_2} < \frac{1}{L}. \quad (10)$$

Тогда для любого элемента $x_\alpha \in X_\alpha \cap \Omega_R(x^*)$ справедливы оценки

$$\|F(x_\alpha) - f_\delta\|_{H_2} \leq \delta + 2\alpha\|w\|_{H_2}, \quad \|x_\alpha - x^*\|_{H_1} \leq \frac{\delta + \alpha\|w\|_{H_2}}{\sqrt{\alpha(1 - L\|w\|_{H_2})}}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что оптимальная по порядку δ оценка для $\|x_\alpha - x^*\|_{H_1}$ получается при согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$ таким, что

$$C_1\delta \leq \alpha(\delta) \leq C_2\delta. \quad (12)$$

Здесь и далее в статье $C_1, C_2, \dots$ — положительные константы. Из (8) и (9) следует, что если выполняется (12), то независимо от выбора приближения f_δ из условия (4) с достаточно малым $\delta_0 > 0$ справедливо $x_{\alpha(\delta)} \in \Omega_R(x^*)$, $\delta \in (0, \delta_0]$. Указанная оптимальная оценка имеет вид

$$\|x_{\alpha(\delta)} - x^*\|_{H_1} \leq C_3\sqrt{\delta}, \quad \delta \in (0, \delta_0]. \quad (13)$$

Изучим возможность получения оценки порядка $O(\delta)$ для подходящей компоненты решения x^* . Считаем, что выполняется условие согласования (12) и $\delta \in (0, \delta_0]$. Для краткости зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$ далее в большинстве случаев не отмечаем.

Запишем необходимое условие минимума в задаче (7)

$$F'^*(x_\alpha)(F(x_\alpha) - f_\delta) + \alpha(x_\alpha - \xi) = 0, \quad \delta \in (0, \delta_0]. \quad (14)$$

Из (14) следует

$$F'^*(x^*)(F(x_\alpha) - f) + F'^*(x^*)(f - f_\delta) + (F'^*(x_\alpha) - F'^*(x^*))(F(x_\alpha) - f_\delta) + \alpha(x_\alpha - \xi) = 0.$$

Используя условие 2 и представление

$$\begin{aligned} F(x) &= F(y) + F'(y)(x - y) + G(x, y), \\ \|G(x, y)\|_{H_2} &\leq \frac{1}{2}L\|x - y\|_{H_1}^2, \quad x, y \in \Omega_R(x^*), \end{aligned} \quad (15)$$

получаем

$$\begin{aligned} (F'^*(x^*)F'(x^*) + \alpha E_1)(x_\alpha - x^*) + F'^*(x^*)[G(x_\alpha, x^*) + (f - f_\delta)] + \\ + (F'^*(x_\alpha) - F'^*(x^*))(F(x_\alpha) - f_\delta) + \alpha F'^*(x^*)w = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Следуя (5), определим проектор $P_m(x^*)$, $0 < m < \|F'(x^*)\|_{L(H_1, H_2)}^2$. Действуя на обе части равенства (16) оператором $P_m(x^*)$ и пользуясь перестановочностью функций одного и того же самосопряженного оператора, получаем

$$\begin{aligned} P_m(x^*)(x_\alpha - x^*) &= -P_m(x^*)(F'^*(x^*)F'(x^*) + \alpha E_1)^{-1}F'^*(x^*)[G(x_\alpha, x^*) + (f - f_\delta)] - \\ &- P_m(x^*)(F'^*(x^*)F'(x^*) + \alpha E_1)^{-1}(F'^*(x_\alpha) - F'^*(x^*))(F(x_\alpha) - f_\delta) - \\ &- \alpha P_m(x^*)(F'^*(x^*)F'(x^*) + \alpha E_1)^{-1}F'^*(x^*)w. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\|P_m(x^*)(F'^*(x^*)F'(x^*) + \alpha E_1)^{-1}\|_{L(H_1, H_1)} \leq \max \left\{ \frac{1}{\lambda + \alpha} : \lambda \in [m, M^2] \right\} = \frac{1}{m + \alpha}. \quad (18)$$

Из (17) с учетом (2), (3), (15), (18) и первого неравенства из (11) следует оценка

$$\begin{aligned} \|P_m(x^*)(x_\alpha - x^*)\|_{H_1} &\leq \\ &\leq \frac{1}{m + \alpha} \left(\frac{1}{2}LM\|x_\alpha - x^*\|_{H_1}^2 + M\delta + L\|x_\alpha - x^*\|_{H_1}(\delta + 2\|w\|_{H_2}\alpha) + M\|w\|_{H_2}\alpha \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Объединяя (19) с (12) и (13), приходим к оценке

$$\|P_m(x^*)(x_\alpha - x^*)\|_{H_1} \leq \frac{C_4\delta}{m + C_1\delta}, \quad \delta \in (0, \delta_0]. \quad (20)$$

Имеет место равенство

$$P_m(x_\alpha)(x_\alpha - x^*) = P_m(x^*)(x_\alpha - x^*) + (P_m(x_\alpha) - P_m(x^*))(x_\alpha - x^*). \quad (21)$$

Ввиду условия 1 некоторая окрестность $(m - \varepsilon, m + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, свободна от точек спектра $F'^*(x^*)F'(x^*)$. Нам понадобится следующая оценка для нормы возмущения спектрального проектора (например, [10], § 135).

Лемма. Пусть A, B — ограниченные самосопряженные операторы в H_1 ,

$$\|A\|_{L(H_1, H_1)}, \quad \|B\|_{L(H_1, H_1)} \leq M_0,$$

интервал $(m_0 - \varepsilon_0, m_0 + \varepsilon_0)$ лежит в резольвентном множестве A, B и $\pi(A) = \chi_{m_0}(A)$, $\pi(B) = \chi_{m_0}(B)$. Тогда для некоторой константы $d = d(M_0, m_0, \varepsilon_0)$ выполняется

$$\|\pi(A) - \pi(B)\|_{L(H_1, H_1)} \leq d\|A - B\|_{L(H_1, H_1)}.$$

В силу (2), (3) имеем

$$\|F'^*(x_\alpha)F'(x_\alpha) - F'^*(x^*)F'(x^*)\|_{L(H_1, H_1)} \leq 2LM\|x_\alpha - x^*\|_{H_1}.$$

Отсюда и из (13) следует, что интервал $(m - \varepsilon/2, m + \varepsilon/2)$ свободен от точек спектра $F'^*(x_\alpha)F'(x_\alpha)$ для всех $\delta \in (0, \delta_1]$. Используя лемму, получаем

$$\begin{aligned} \|P_m(x_\alpha) - P_m(x^*)\|_{L(H_1, H_1)} &\leq C_5\|F'^*(x_\alpha)F'(x_\alpha) - F'^*(x^*)F'(x^*)\|_{L(H_1, H_1)} \leq \\ &\leq C_6\|x_\alpha - x^*\|_{H_1}, \quad \delta \in (0, \delta_1]. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (20)–(22) и (13) вытекает

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1, 2 и соотношения (2), (10), (12). Тогда имеет место оценка

$$\|P_m(x_{\alpha(\delta)})(x_{\alpha(\delta)} - x^*)\|_{H_1} \leq C_7\delta, \quad \delta \in (0, \delta_1]. \quad (23)$$

Постоянные C_7 , δ_1 в (23) зависят от m , ε . Согласно (23) элемент $p_\delta = P_m(x_{\alpha(\delta)})x_{\alpha(\delta)}$ аппроксимирует проекцию x^* на подпространство $\mathcal{L}(x_{\alpha(\delta)}) = R(P_m(x_{\alpha(\delta)}))$ с погрешностью порядка $O(\delta)$.

3. В этом пункте обратимся к итеративно регуляризованным методам типа Гаусса–Ньютона ([1], гл. 2)

$$x_{n+1} = \xi - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)[F(x_n) - f_\delta - F'(x_n)(x_n - \xi)]. \quad (24)$$

Здесь $x_0 \in \Omega_R(x^*)$ — начальное приближение, $\xi \in H_1$ — параметр процесса, $\{\alpha_n\}$ — последовательность параметров регуляризации,

$$0 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n, \quad \sup_{n=0,1,\dots} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0. \quad (25)$$

Выражение $\Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)$ понимается в смысле исчисления самосопряженных операторов (например, [10], гл. VII). Вещественнозначная на $[0, M^2]$ порождающая функция $\Theta = \Theta(\lambda, \alpha)$ предполагается аналитичной по λ в области $D_\alpha \subset \mathbb{C}$ такой, что

$$D_\alpha \supset [0, M^2] \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0].$$

Следуя ([1], гл. 2, § 3), считаем выполненными

Условие 3. Имеют место оценки

$$\sup_{\lambda \in [0, M^2]} |\Theta(\lambda, \alpha)\sqrt{\lambda}| \leq \frac{C_8}{\sqrt{\alpha}}, \quad \sup_{\lambda \in [0, M^2]} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|\sqrt{\lambda} \leq C_9\sqrt{\alpha} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0].$$

Условие 4. Существует семейство замкнутых кусочно гладких контуров $\{\Gamma_\alpha\} \subset \mathbb{C}$ таких, что $\Gamma_\alpha \subset D_\alpha$, Γ_α содержит внутри $[0, M^2]$ для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$ и, кроме того,

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \sup_{\lambda \in \Gamma_\alpha} |\lambda| < \infty, \quad \sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \sup_{\substack{\lambda \in \Gamma_\alpha \\ \mu \in [0, M^2]}} \frac{|\lambda| + \mu}{|\lambda - \mu|} < \infty, \quad \sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|}{|\lambda|} |d\lambda| < \infty.$$

В качестве простейшего примера функции, удовлетворяющей условиям 3 и 4, отметим $\Theta(\lambda, \alpha) = (\lambda + \alpha)^{-1}$. В этом случае общая схема (24) приводит к итеративно регуляризованному методу Гаусса–Ньютона

$$x_{n+1} = \xi - (F'^*(x_n)F'(x_n) + \alpha_n E_1)^{-1} F'^*(x_n)[F(x_n) - f_\delta - F'(x_n)(x_n - \xi)].$$

Дальнейшие примеры порождающих функций, удовлетворяющих условиям 3, 4 см. в ([1], гл. 2, § 3). В большинстве случаев контуры Γ_α могут быть выбраны в виде

$$\Gamma_\alpha = \{\rho e^{\pm i\psi_0} : \rho \in [\alpha/2, R]\} \cup \{Re^{i\psi} : |\psi| \leq \psi_0\} \cup \{(\alpha/2)e^{i\psi} : \psi_0 \leq |\psi| \leq \pi\},$$

$$R > M^2, \quad \psi_0 \in (0, \pi/2), \quad \alpha \in (0, 2R).$$

Будем использовать следующее априорное правило останова процесса (24). Зафиксируем постоянную $\varkappa > 0$ и предположим, что

$$\delta \leq \varkappa \alpha_0. \quad (26)$$

В качестве приближения к решению x^* выбирается элемент последовательности $\{x_n\}$ с номером $n = N(\delta)$, где

$$N(\delta) = \max\{n \in \mathbb{N} : \varkappa \alpha_{n-1} \geq \delta\}. \quad (27)$$

Очевидно, $\lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) = \infty$.

Оценку погрешности получаемого приближения при выполнении условия 2 доставляет следующая

Теорема 3 ([1], гл. 2, § 4). Пусть выполняются условия 1–4 и соотношения (2), (25)–(27). Тогда найдутся такие константы C_{10} – C_{12} , что если

$$\|x_0 - x^*\|_{H_1} \leq l\sqrt{\alpha_0}, \quad \|w\|_{H_2} \leq d, \quad (28)$$

$$l\sqrt{\alpha_0} \leq R, \quad 0 < l \leq C_{10}, \quad d = C_{11} \min\{l, 1\}, \quad 0 < \varkappa \leq C_{12}, \quad (29)$$

то имеют место оценки

$$\|x_n - x^*\|_{H_1} \leq l\sqrt{\alpha_n}, \quad 1 \leq n \leq N(\delta), \quad (30)$$

$$\|x_{N(\delta)} - x^*\|_{H_1} \leq l\sqrt{\delta/\varkappa}. \quad (31)$$

Покажем, что для проекции невязки $x_{N(\delta)} - x^*$ на подходящее собственное подпространство оператора $F'^*(x_{N(\delta)})F'(x_{N(\delta)})$ имеет место более точная по сравнению с (31) оценка порядка $O(\delta)$.

Пусть $0 \leq n \leq N(\delta) - 1$. Из (24) с использованием (15) получаем

$$x_{n+1} - x^* = [E_1 - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)](\xi - x^*) - \\ - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)[G(x_n, x^*) + (f - f_\delta)]. \quad (32)$$

Согласно (5) определим операторы $P_m(x_n)$, $P_m(x^*)$, где $0 < m < \|F'(x^*)\|_{L(H_1, H_2)}^2$. Действуя на обе части (32) оператором $P_m(x^*)$, находим

$$P_m(x^*)(x_{n+1} - x^*) = P_m(x_n)[E_1 - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)](\xi - x^*) + \\ + (P_m(x^*) - P_m(x_n))[E_1 - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)](\xi - x^*) - \\ - P_m(x_n)\Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)[G(x_n, x^*) + (f - f_\delta)] - \\ - (P_m(x^*) - P_m(x_n))\Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)[G(x_n, x^*) + (f - f_\delta)]. \quad (33)$$

Оценим нормы отдельных слагаемых в правой части равенства (33). Нам потребуется, дополняющее условие 4,

Условие 5. Для некоторой константы $D(m)$ справедливо

$$\sup_{\lambda \in [m, M^2]} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \leq D(m)\alpha, \quad \alpha \in (0, \alpha_0].$$

Это условие выполняется в частности для порождающей функции $\Theta(\lambda, \alpha) = (\lambda + \alpha)^{-1}$. Оно имеет место также и для других функций ([1], гл. 2).

Пользуясь условием 5, получаем оценку

$$\begin{aligned} \|P_m(x_n)[E_1 - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)](\xi - x^*)\|_{H_1} &\leq \\ &\leq \max\{|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda| : \lambda \in [m, M^2]\} \|\xi - x^*\|_{H_1} \leq C_{13}\alpha_n. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь $C_{13} = C_{13}(m)$. Далее, с учетом условия 2 имеем

$$\begin{aligned} &\|[E_1 - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)](\xi - x^*)\|_{H_1} \leq \\ &\leq \|[E_1 - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)]F'^*(x^*)w\|_{H_1} + \\ &+ \|[\Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n) - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)]F'^*(x^*)w\|_{H_1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Заметим, что $F'^*(x^*)w = (F'^*(x^*)F'(x^*))^{1/2}\tilde{w}$ для некоторого элемента $\tilde{w} \in H_1$, $\|\tilde{w}\|_{H_1} = \|w\|_{H_2}$. Поэтому ввиду условия 3 первое слагаемое в правой части неравенства (35) мажорируется величиной

$$\max\{|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda|\sqrt{\lambda} : \lambda \in [0, M^2]\} \|\tilde{w}\|_{H_1} \leq C_{14}\|\tilde{w}\|_{H_1}\sqrt{\alpha_n}.$$

Для второго слагаемого согласно ([1], с. 118) имеем верхнюю оценку $C_{15}\|x_n - x^*\|_{H_1}$. Следовательно, с учетом (30)

$$\|[E_1 - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)](\xi - x^*)\|_{H_1} \leq C_{16}\sqrt{\alpha_n}.$$

Используя условие 1 и лемму, заключаем, что при $n \geq N_0$ с достаточно большим N_0 справедливо аналогичное (22) неравенство

$$\|P_m(x_n) - P_m(x^*)\|_{L(H_1, H_1)} \leq C_{17}\|x_n - x^*\|_{H_1} \leq C_{18}\sqrt{\alpha_n}. \quad (36)$$

Константы C_{17} , C_{18} зависят от m , ε . Таким образом, для этих номеров n

$$\|(P_m(x^*) - P_m(x_n)) \cdot [E_1 - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)](\xi - x^*)\|_{H_1} \leq C_{19}\alpha_n. \quad (37)$$

Из условия 5 следует

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \sup_{\lambda \in [m, M^2]} |\Theta(\lambda, \alpha)\sqrt{\lambda}| < \infty.$$

Поэтому из (4) и (15) вытекает

$$\begin{aligned} &\|P_m(x_n)\Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)[G(x_n, x^*) + (f - f_\delta)]\|_{H_1} \leq \\ &\leq C_{20}\left(\frac{1}{2}L\|x_n - x^*\|_{H_1}^2 + \delta\right) \leq C_{21}(\alpha_n + \delta). \end{aligned} \quad (38)$$

Наконец, используя условие 3 и оценки (30), (36), получаем

$$\begin{aligned} &\|(P_m(x^*) - P_m(x_n))\Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)[G(x_n, x^*) + (f - f_\delta)]\|_{H_1} \leq \\ &\leq \frac{C_8C_{17}\|x_n - x^*\|_{H_1}}{\sqrt{\alpha_n}}\left(\frac{1}{2}L\|x_n - x^*\|_{H_1}^2 + \delta\right) \leq C_{22}(\alpha_n + \delta), \quad N_0 \leq n \leq N(\delta) - 1. \end{aligned} \quad (39)$$

Объединяя (33) и оценки (34), (37)–(39), с учетом (25) находим

$$\|P_m(x^*)(x_{n+1} - x^*)\|_{H_1} \leq C_{23}(\alpha_n + \delta) \leq C_{24}(\alpha_{n+1} + \delta), \quad N_0 \leq n \leq N(\delta) - 1.$$

Полагая здесь $n = N(\delta) - 1$ и замечая, что в силу (27) $\alpha_{N(\delta)} < \delta/\varkappa$, приходим к оценке

$$\|P_m(x^*)(x_{N(\delta)} - x^*)\|_{H_1} \leq C_{25}\delta, \quad \delta \in (0, \delta_2]. \quad (40)$$

В (40) величина $\delta_2 > 0$ выбрана так, что $N(\delta) \geq N_0 + 1$ при $\delta \in (0, \delta_2]$. Из (36) следует

$$\|P_m(x^*) - P_m(x_{N(\delta)})\|_{L(H_1, H_1)} \leq C_{26}\|x_{N(\delta)} - x^*\|_{H_1}, \quad \delta \in (0, \delta_2].$$

Поэтому используя (31) и (40), получаем

$$\begin{aligned} \|P_m(x_{N(\delta)})(x_{N(\delta)} - x^*)\|_{H_1} &\leq \|P_m(x^*) - P_m(x_{N(\delta)})\|_{L(H_1, H_1)}\|x_{N(\delta)} - x^*\|_{H_1} + \\ &\quad + \|P_m(x^*)(x_{N(\delta)} - x^*)\|_{H_1} \leq C_{27}\delta. \end{aligned}$$

Тем самым доказана

Теорема 4. Пусть выполняются условия 1–5 и соотношения (2), (25)–(29). Тогда имеет место оценка

$$\|P_m(x_{N(\delta)})(x_{N(\delta)} - x^*)\|_{H_1} \leq C_{27}\delta, \quad \delta \in (0, \delta_2].$$

Постоянные C_{27}, δ_2 в теореме 4 зависят от m, ε . Таким образом, элемент $p_\delta = P_m(x_{N(\delta)})x_{N(\delta)}$ аппроксимирует компоненту $P_m(x_{N(\delta)})x^*$ решения x^* с точностью порядка $O(\delta)$.

В заключение укажем возможный способ практической аппроксимации элемента $P_m(x)y$ при заданных $x, y \in H_1$, $m > 0$. Без ограничения общности можем считать, что в (3) величина $M \leq 1$. Пусть выполняется условие 1. Тогда для точек x , достаточно близких к x^* , интервал $(m - \varepsilon/2, m + \varepsilon/2)$ свободен от точек спектра оператора $F'^*(x)F'(x)$. Для таких x определим итерационный процесс

$$P_m^{(0)}(x) = F'^*(x)F'(x) - mE_1, \quad P_m^{(k+1)}(x) = \frac{1}{2} \left(3P_m^{(k)}(x) - [P_m^{(k)}(x)]^3 \right).$$

Согласно ([1], гл. 3) для некоторых $C_{28} > 0$, $q \in (0, 1)$ выполняется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_m^{(k)}(x) - P_m(x)\|_{L(H_1, H_1)} \leq C_{28}q^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Другие возможные способы аппроксимации проектора $P_m(x)$ приведены в ([1], с. 226–227).

Таким образом, в работе установлено, что методы регуляризации (7), (10) и (24), (25), (27), доставляющие при выполнении условия 2 для элемента x^* приближения $\tilde{x} = x_{\alpha(\delta)}, x_{N(\delta)}$ с погрешностью порядка $O(\delta^{1/2})$, для компонент решения $P_m(\tilde{x})x^*$ обеспечивают получение аппроксимации $P_m(\tilde{x})\tilde{x}$ с лучшей оценкой точности порядка $O(\delta)$. Кроме того, значение на решении x^* любого функционала вида $\Lambda(x) = (g, x)_{H_1}$, где $g \in \mathcal{L}_m(\tilde{x})$, также вычисляется с погрешностью порядка $O(\delta)$. Соответствующее приближение имеет вид $\Lambda(\tilde{x})$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. *Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений* (ЛЕНАНД, М., 2012).
- [2] Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. *Нелинейные некорректные задачи* (Наука, М., 1995).
- [3] Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. *Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems* (Walter de Gruyter, Berlin, 2008).
- [4] Леонов А.С. *О возможности получения линейных оценок точности приближенных решений обратных задач*, Изв. вузов. Матем., № 10, 29–35 (2016).
- [5] Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения* (Изд-во МГУ, М., 1989).
- [6] Кокурин М.Ю. *Итеративно регуляризованные методы для нерегулярных нелинейных операторных уравнений с нормально разрешимой производной в решении*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **56** (9), 1543–1555 (2016).
- [7] Kokurin M.Yu. *Accuracy estimates of Gauss–Newton type iterative regularization methods for nonlinear equations with operators having normally solvable derivative at the solution*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **24** (4), 449–462 (2016).

- [8] Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах* (Наука, М., 1986).
- [9] Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of inverse problems* (Kluwer, Dordrecht, 2000).
- [10] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу* (Мир, М., 1979).

Михаил Юрьевич Кокурин

Марийский государственный университет,
пл. Ленина, д. 1, г. Йошкар-Ола, 424001, Россия,
e-mail: kokurinm@yandex.ru

M.Yu. Kokurin

On regularization procedures with linear accuracy estimates of approximations

Abstract. We consider numerical methods for stable approximation of solutions to irregular non-linear equations with general smooth operators in the Hilbert space. The known variational procedures and iterative regularization methods deliver approximations with accuracy estimates greater in order than error levels in the input data. In the paper for certain components of the desired solution we establish the possibility of obtaining approximations with linear accuracy estimates relative to the error level. These components correspond to the projections of the solution onto proper subspaces of the symmetrized derivative for the operator of the problem.

Keywords: ill-posed problem, Tikhonov method, iterative regularization, Gauss–Newton method, accuracy estimate.

Mikhail Yuryevich Kokurin

Mari State University,
1 Lenin sq., Yoshkar Ola, 424001 Russia,
e-mail: kokurinm@yandex.ru