Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Родин, С. В. Синегубов, О надежности сетей большой размерности, состоящих из одинаковых элементов, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 5, 56–62

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-5-56-62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:51:15

В.А. РОДИН, С.В. СИНЕГУБОВ

О НАДЕЖНОСТИ СЕТЕЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ОДИНАКОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Аннотация. Изучается надежность структур больших размеров, полученных из идентичных элементов. Рассматриваются структуры, построенные последовательно-параллельными и фрактальными расширениями. Число последовательных и параллельных соединений представлены как бесконечно большие величины. Показано, что надежность предельно получаемых структур зависит от соотношения этих величин. Для практического применения фрактального размножения при построении систем большой надежности изучены свойства модулей с числом элементов не более пяти. Результаты работы находят применение для пожарной сигнализации сложных наземных и подземных многоярусных строений.

Ключевые слова: надежность сложных электрических цепей, последовательно-параллельные системы, надежность фрактально размножающихся структур.

УДК: 519.2

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-5-56-62

ВВЕДЕНИЕ

Теоретические первоначальные исследования возможностей управления надежностью сложных систем принадлежат Дж. фон Нейману, который показал как посредством использования ненадежных логических элементов, соединенных в простейшую схему-модуль, можно построить систему с более высоким уровнем надежности при сохранении прежнего принципа функционирования [1]. Развивая мысль Дж. Неймана, Э. Мур и К. Шеннон [2] на примере системы релейных сетей показали, что из реле недостаточной надежности можно создать сеть с заданной надежностью. Надежность сложных систем исследовалась во многих последующих работах [3], [4]. Отметим работу [5], в которой приведена общая теория расчета надежности сложных систем.

Однако ни в этих работах, ни в других современных известных авторах источниках не рассматривалось одновременное увеличение как параллельных, так и последовательных соединений.

Определение 1. Под надежностью элемента будем понимать вероятность его безотказной работы за время t не меньшее, чем фиксированное время T : $p = P(t \geq T)$ ([6]). Рассматриваются одинаковые элементы с одним и тем же временным ограничением T . Указанные элементы объединяются в различные структуры. Надежность этих структур будем обозначать функциями $H(p)$ с разными индексами. Надежность данных структур зависит от p , числа элементов в структуре и способа организации структуры.

В первой части работы число параллельных и последовательных соединений в системе большой размерности рассматриваются как бесконечно большие величины. Их соотношения определяют аналитическое выражение предельного состояния системы. Во второй части работы с помощью теоремы Шеннона–Мура [2] получены утверждения об изменениях надежности самоподобно-расширяющихся систем. Приведена схема получения фрактального образования с заданной большой надежностью. Отдельные результаты без доказательства анонсированы в работе [7].

1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ (ППС)

1.1. Предположим, что ППС содержит n последовательно соединенных блоков, содержащих $k(n)$ параллельно соединенных элементов с одинаковой надежностью p (рис. 1).

Рис. 1. n — число последовательно соединенных блоков, $k(n)$ — число параллельно соединенных элементов

Увеличение числа $k(n)$ ведет к увеличению надежности всей ППС, а увеличение числа последовательно соединенных блоков n уменьшает ее. Надежность такой системы вычисляется по формуле

$$H_1(p, n) = \left[1 - (1 - p)^{k(n)}\right]^n. \quad (1)$$

При одновременном увеличении n и $k(n)$ сравнение бесконечно больших величин $k(n)$ и n в формуле (1) играет основную роль.

Теорема 1. 1) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 n / k(n) = \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} H_1(p, n) = 0$.

2) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 n / k(n) = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} H_1(p, n) = 1$.

3) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 n / k(n) = C$ и $C > 0$, то имеют место следующие возможности, характеризующие поведение функции надежности системы:

3.1) если $C > -\log_2(1 - p)$, то $H_1(p, n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

3.2) если $C < -\log_2(1 - p)$, то $H_1(p, n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

4) Для любых $\alpha > 0$ и $p \in (0, 1)$ можно так выбрать соотношение размеров $k(n)$ и n , что $\lim_{n \rightarrow \infty} H_1(p, n) = \exp(-\alpha)$.

Доказательство. Содержательным является случай $0 < p < 1$. Равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - (1 - p)^{k(n)}\right)^n = \exp\left(-\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot (1 - p)^{k(n)})\right) \quad (2)$$

переводит рассуждения в сравнение бесконечно больших величин $\log_2 n$ и $k(n)$. Удобно перейти к логарифму по основанию два от выражения под знаком предела.

Введем обозначения. Пусть

$$A = n \cdot (1 - p)^{k(n)}, \quad B = \log_2 A = k(n) \left[\frac{\log_2 n}{k(n)} + \log_2(1 - p) \right].$$

В случае 1) выражение в квадратных скобках положительно. Тогда B стремится к $+\infty$. В этом случае A также стремится к $+\infty$ и экспонента в правой части равенства (2) стремится к нулю. Получаем справедливость 1).

Если выполнено условие 2), то выражение в квадратных скобках отрицательно и стремится к $-\infty$. Тогда A стремится к нулю. Экспонента в правой части равенства (2) стремится к единице.

Аналогично доказываться пп. 3.1) и 3.2).

Для доказательства условия 4) выберем $k(n) = m$ и пусть $n = [\alpha(1-p)^m]$. Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа, поэтому верно

$$\frac{\alpha}{(1-p)^m} - 1 < n \leq \frac{\alpha}{(1-p)^m}. \quad (3)$$

Вычислим пределы

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} [1 - (1-p)^m]^{\alpha(1-p)^m} &= e^{-\alpha}, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} [1 - (1-p)^m]^{\alpha(1-p)^{m-1}} &= e^{-\alpha} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} [1 - (1-p)^m]^{-1} = e^{-\alpha} \cdot 1 = e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Учитывая (3), по свойству пределов получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [1 - (1-p)^m]^n = e^{-\alpha}. \quad \square$$

1.2. Предположим теперь, что ППС содержит в каждой параллельной линии n последовательно соединенных элементов с надежностью p . Вся сеть состоит из $k(n)$ таких параллельно соединенных линий (рис. 2).

Увеличение числа $k(n)$ ведет к увеличению надежности всей ППС, а увеличение числа последовательно соединенных элементов n уменьшает ее. Надежность такой системы вычисляется по формуле $H_2(p, n) = 1 - (1 - p^n)^{k(n)}$.

Рис. 2. n — число последовательно соединенных элементов, $k(n)$ — число параллельно соединенных блоков

Теорема 2. 1) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 k(n)/n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} H_2(p, n) = 0$.

2) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 k(n)/n = \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} H_2(p, n) = 1$.

3) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 k(n)/n = C$ и $C > 0$, то имеют место следующие возможности, характеризующие поведение функции надежности системы:

3.1) если $p < 2^{-C}$, то $H_2(p, n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

3.2) если $p > 2^{-C}$, то $H_2(p, n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

4) Для любых $\alpha > 0$ и $p \in (0, 1)$ можно так выбрать соотношение размеров $k(n)$ и n , что $\lim_{n \rightarrow \infty} H_2(p, n) = 1 - \exp(-\alpha)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

2. ФРАКТАЛЬНО РАЗМНОЖАЮЩИЕСЯ СТРУКТУРЫ (ФРС)

В предыдущих разделах работы увеличение размерности структуры происходило за счет увеличения как параллельных соединений в блоках, так и за счет увеличения числа последовательно соединенных блоков. В данном разделе для повышения надежности используется увеличение размерности с помощью самоподобного размножения определенных модулей. Первоначально возможность повышения надежности сложной структуры путем самоподобного размножения простейших модулей исследовалась в работах [2], [3]. Эти работы по исследованию сложных структур — двухполюсников, состоящих из элементарных элементов, послужили основанием для появления обширной теории надежности, основы которой изложены Р. Берлоу и Ф. Прошаном в [3]. Заметим, что эффект увеличения надежности происходит не всегда, а зависит от возможности применить теорему Шеннона–Мура.

Определение 2. Под модулем будем понимать простейшую схему соединений одинаковых элементов с надежностью модуля $h(p)$, для которой справедливо следующее: решение p_0 уравнения $h(p) = p$ лежит в интервале $(0,1)$.

Для пояснения выбора наилучшего с практической точки зрения элемента размножения приведем одну из формулировок теоремы Шеннона–Мура.

Надежность ФРС после n итераций вычисляется по формуле

$$H(p, n) = \underbrace{h(h \dots (h(p)) \dots)}_n, \quad (4)$$

где $h(p)$ — надежность модуля. Если k_m — число элементов в модуле, то $N = (k_m)^n$ — число элементов в ФРС.

Теорема 3 (Шеннон–Мур [2]). Если функция $h(p)$ в (4) обладает свойствами

- а) непрерывна и монотонно возрастает на $[0,1]$,
- б) $h(0) = 0$, $h(1) = 1$,
- в) решение p_0 уравнения $h(p) = p$ лежит в интервале $(0,1)$, то при $n \rightarrow \infty$ ($N \rightarrow \infty$) для $p > p_0$ имеем $H(p, n) \rightarrow 1$, а для $p < p_0$ — $H(p, n) \rightarrow 0$.

Фрактальное образование (ФРС) происходит следующим образом. Определяется исходный модуль, который удовлетворяет свойствам теоремы 3. На следующем шаге каждый элемент выбранного модуля представляется в виде самого модуля. Например, если имеется приведенный на рис. 3а) модуль, то на втором шаге размножения получим схему, изображенную на рис. 4, состоящую из шестнадцати элементов, где пунктирным прямоугольником отмечен исходный модуль.

Рис. 3. Варианты модулей

Рис. 4. Размножение модуля

Необходимость модуля иметь неподвижную точку, лежащую внутри интервала $(0,1)$, вызвана известной способностью ФРС увеличивать свою надежность при увеличении размерности системы при использовании элементов в модуле с собственной надежностью больше значения данной неподвижной точки и основана на применении указанной теоремы. Модулей с небольшим числом составляющих элементов немного. Среди модулей с тремя элементами таких нет. Примеры простейших схем-ячеек (модулей) приведены на рис. 3.

Число элементов в ФРС растет как $N = (k_m)^n$, где k_m — число элементов в модуле.

Задача выбора наилучшего модуля обладает следующими особенностями.

1. Необходимо найти модуль с надежностью $h(p)$, для которого решение p_0 уравнения $h(p) = p$ имеет наименьшее значение. Это позволит использовать для построения системы элементы с низкой надежностью.

2. По возможности использовать наименьшее число элементов в ФРС при фиксированной надежности одного элемента. В этой работе из практических соображений изучаются свойства модулей, составленных из не более пяти одинаковых элементов.

Фактически имеем двухфакторную задачи оптимизации. Выбор преимущественного фактора или построение множества Парето определяется задачами практики.

Сравним значения неподвижной точки для модулей, представленных на рис. 3.

1) Функция надежности модуля, представленного на рис. 3а), имеет вид $h_1(p) = [1 - (1 - p)^2]^2$ и уравнение для определения неподвижной точки $h_1(p) = p$ в качестве решения имеет $p_{01} \approx 0.3820$. Эта схема приведена и в [3].

2) Для схемы, приведенной на рис. 3б), аналогично получим функцию надежности $h_2(p) = 1 - (1 - p^2)^2$ и при решении уравнения $h_2(p) = p$ получаем $p_{02} \approx 0.618$. Значит, для построения ФРС с использованием данного модуля потребуются более надежные элементы по сравнению с модулем, изображенным на рис. 3а).

3) Возможна так же конструкция из пяти элементов. Схема такого модуля приведена на рис. 3с) с функцией надежности $h_3(p) = [1 - (1 - p)^3] \cdot [1 - (1 - p)^2]$. Численное решение уравнения $h_3(p) = p$ имеет значение $p_{03} \approx 0.2451$.

4) Двойственная к 3с) схема 3д) с функцией надежности $h_4(p) = 1 - (1 - p^3)(1 - p^2)$. Неподвижная точка $p_{04} \approx 0.755$. Такое соединение требует использования элементов с высокой надежностью и не выдерживает конкуренции со схемой 3с).

5) Мостиковая схема, состоящая так же из пяти элементов, имеет функцию надежности $h_5(p) = p [1 - (1 - p)^2]^2 + (1 - p) [1 - (1 - p^2)^2]$. Значение неподвижной точки составляет $p_{05} \approx 0.5$. Данная схема так же проигрывает схеме 3с). Кроме того, мостиковая схема не применяется в схемах пожаро-охранной сигнализации.

Для сравнения численности ФРС при фиксированной вероятности безотказной работы приведем графики (рис. 5), показывающие следующие закономерности.

1) При использовании малонадежных элементов ($p < p_{03}$) в ФРС невозможно увеличение надежности всей схемы. Использование элементов с надежностью $p < 0.4$ возможно только для модуля, соединенного по схеме 3с).

2) Если использовать элементы с надежностью $p > 0.7$, то уже третья итерация схемы 3b), при числе элементов $N = 4^3 = 64$ дает наивысшее, по сравнению с остальными, значение надежности всей схемы $H_2(0.7; 64) \approx 0.865$.

3) Сравнение численности используемых элементов для получения схемы с надежностью с большей 0.8 для модулей 3b) и 3с) показывает преимущество схемы, образованной модулем 3с).

Изменения численности элементов при использовании модуля 3с) приведены для удобства на одном графике с модулями 3а) и 3b) (рис. 5). Так как в модуле 3с) пять элементов, то точки, соответствующие численности фрактальных расширений графика $h_3(p)$, сдвинуты на множитель $\log_4 5$. Таким образом, имеем преобразование $k \rightarrow k \cdot \log_4 5$.

3. Выводы

1. Для получения ФРС большой надежности, имея надежные элементы, целесообразно применять модуль, изображенный на рис. 3b) (кривая $h_2(p)$). Для построения конструкции, использующей малонадежные элементы, преимущество имеет модуль 3с) (кривая $h_3(p)$).

2. Несложные вычисления показывают, что других моделей, составленных из четырех или пяти элементов, функция надежности которых имела бы неподвижную точку, расположенную строго в интервале (0,1), нет. Сложность фрактальных изменений при использовании шести элементов в модуле растет как 6^n и использование таких модулей экономически нецелесообразно.

3. При незначительной цене элемента, образующего модуль, системы большой размерности найдут широкое применение в специальных релейных цепях и системах блокировки в ядерных реакторах. Применение возможно для контроля уровня радиоактивности воздуха в вентиляционной системе в интересах обеспечения остановки реактора в случае опасного уровня радиоактивности. А также при организации пожаро-охранной сигнализации многоярусных шахт, приисков, метрополитенов, куполов ангаров, стадионов и др.

Рис. 5

Простота расчета надежности размножающихся образований стимулирует их дальнейшее изучение в плане практического использования на охраняемых объектах большой конструктивной размерности.

Для расчета надежности ФРС и ППС с различным количеством элементов авторами были разработаны соответствующие компьютерные программы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нейман Дж. *Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонентов* (Ин. лит., М., 1956).
- [2] Moore E.F., Shannon C.E. *Reliable circuits using less reliable relays*, J. Franklin Inst. **262** (3), 191–208 (1956).
- [3] Барлоу Р., Прошан Ф. *Математическая теория надежности* (Сов. радио, М., 1969).
- [4] Tkachev O.A. *Analytical estimation of reliability of networks consisting of identical elements*, Reliability Theory Appl. **2** (21), 9–20 (2011).
- [5] Каштанов В.А., Медведев А.И. *Теория надежности сложных систем* (Физматлит, М., 2010).
- [6] Гмурман В.Е. *Теория вероятностей и математическая статистика* (Высш. шк., М., 2003).
- [7] Родин В.А., Синегубов С.В. *Анализ надежности некоторых специальных систем большой размерности*, Вестн. Воронежск. ин-та МВД РФ **2**, 12–14 (1998).

Владимир Александрович Родин

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, д. 53, г. Воронеж, 394065, Россия,
e-mail: rodin_v@mail.ru

Сергей Владимирович Синегубов

Воронежский институт МВД России,
пр. Патриотов, д. 53, г. Воронеж, 394065, Россия,
e-mail: sinusdvm@mail.ru

V.A. Rodin and S.V. Sinigubov

On reliability of large-scale nets constructed from identical elements

Abstract. We study the reliability of large-scale structures constructed from identical elements. We consider the structures constructed by serial-parallel extensions and fractal extensions. The number of consecutive connections and the number of parallel connections are presented as infinitely large quantities. It is shown that the reliability of ultimately obtained structures depends on the ratio of these quantities. For the practical application of fractal multiplication in the construction of systems of large reliability, the properties of modules with a number of elements of no more than five have been studied. The results of the work are used for fire-security alarm of complex ground and underground multistory buildings.

Keywords: reliability of complex electric circuits, series-parallel systems, reliability of fractals multiplying structures.

Vladimir Aleksandrovich Rodin

Voronezh Institute of Ministry of Internal Affairs of Russia,
53 Patriotov Ave., Voronezh, 394065 Russia,
e-mail: rodin_v@mail.ru

Sergei Vladimirovich Sinigubov

Voronezh Institute of Ministry of Internal Affairs of Russia,
53 Patriotov Ave., Voronezh, 394065 Russia,
e-mail: sinusdvm@mail.ru