Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Саргсян, О коэффициентах Фабера–Шаудера непрерывных функций и расходимости жадного алгоритма, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 5, 63–69

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-5-63-69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:12:04

А.А. САРГСЯН

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФАБЕРА–ШАУДЕРА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И РАСХОДИМОСТИ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА

Аннотация. Рассматривается связь между скоростью стремления к нулю коэффициентов Фабера–Шаудера непрерывных функций и поведением жадного алгоритма. Построена непрерывная функция f с коэффициентами Фабера–Шаудера, удовлетворяющими условию $|A_n(f)| = O(\log^{-1} n)$, жадный алгоритм которой не сходится к ней по норме $C[0, 1]$.

Ключевые слова: жадный алгоритм, система Фабера–Шаудера, коэффициенты разложения, равномерная сходимость.

УДК: 517.51

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-5-63-69

ВВЕДЕНИЕ

Система Фабера–Шаудера $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, является классическим базисом пространства непрерывных функций $C[0, 1]$ (см. [1]). Ее функции определяются следующим образом: $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$ и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$;

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}); \\ 1, & \text{если } x = x_n = x_k^{(i)} = \frac{2i-1}{2^{k+1}}; \\ \text{линейна и непрерывна на } [\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}], [\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}]. \end{cases} \quad (1)$$

Коэффициенты разложения $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) \varphi_n(x)$ непрерывной функции $f(x)$ (коэффициенты Фабера–Шаудера) определяются как

$$A_0(f) = f(0), \quad A_1(f) = f(1) - f(0),$$

$$A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right) \right],$$

и для каждого целого неотрицательного числа m частичная сумма $\sum_{n=0}^m A_n(f) \varphi_n(x)$ на $[0, 1]$ представляет собой ломаную, вершины которой лежат на графике функции $f(x)$, так что

$$\left\| \sum_{n=0}^m A_n \varphi_n \right\|_C \leq \|f\|_C,$$

где $\|\cdot\|_C = \max_{x \in [0,1]} \{\cdot\}$ есть норма пространства $C[0, 1]$. Есть много интересных результатов о свойствах системы Фабера–Шаудера (см., например, обзорную статью П.Л. Ульянова [14]).

Поступила в редакцию 22.03.2018, после доработки 18.07.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Дадим определение жадного алгоритма. Пусть $\Psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — базис в банаховом пространстве X . Для каждого элемента $f \in X$ перестановку натуральных чисел $\sigma_f = \{\sigma_f(k)\}_{k=1}^\infty$ назовем убывающей, если для коэффициентов разложения $f = \sum_{k=1}^\infty c_k(f)\psi_k$ имеем

$$|c_{\sigma_f(k)}(f)| \geq |c_{\sigma_f(k+1)}(f)|, \quad k = 1, 2, \dots$$

(в случае, если разложение функции f содержит нулевые коэффициенты и счетное число ненулевых коэффициентов, вместо перестановки натуральных чисел будем иметь ввиду такое отображение множества натуральных чисел в себя, образ которого содержит индексы всех ненулевых коэффициентов).

Пусть $D(f)$ есть множество всех таких перестановок (в случае строгих неравенств $D(f)$ состоит из одного элемента). Определим m -й жадный аппроксимант элемента $f \in X$ относительно базиса Ψ следующим образом:

$$G_m(f, \sigma_f) := \sum_{k=1}^m c_{\sigma_f(k)}(f) \psi_{\sigma_f(k)}(x), \quad \sigma_f \in D(f)$$

(подробно об этом см. обзорную статью В.Н. Темлякова [2]). Будем считать, что последовательность жадных аппроксимантов (жадный алгоритм) элемента f (по системе Ψ) сходится в X , если для всех убывающих перестановок $\sigma_f \in D(f)$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|G_m(f, \sigma_f) - f\|_X = 0.$$

Жадные алгоритмы для банаховых пространств относительно нормированных базисов изучены В.Н. Темляковым [2]–[4], Р. Де Ворем [3], С.В. Конягиным [4], П. Войташиком [5], Т.В. Корнером [6], М.Г. Григоряном [7] и другими авторами (см., например, [8]–[13]).

Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к результату настоящей работы. В работе [5] доказана следующая теорема: *для того чтобы жадный алгоритм по нормированному базису Ψ банахового пространства X сходиллся для каждого элемента из X (в этом случае базис Ψ называется квазигриди базисом в X), необходимо и достаточно, чтобы существовало число $B_0 > 0$ такое, что для каждого элемента $f \in X$ и для любых $\sigma_f \in D(f)$ и $m \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство*

$$\|G_m(f, \sigma_f)\|_X \leq B_0 \cdot \|f\|_X.$$

В [10] доказано, что в пространстве $C[0, 1]$ не существует квазигриди базисов. Следовательно, в случае системы Фабера–Шаудера для любого положительного числа B существуют функция $f_0 \in C[0, 1]$, перестановка $\sigma_{f_0} \in D(f_0)$ и натуральное число m_0 , для которых

$$\|G_{m_0}(f_0, \sigma_{f_0})\|_C > B \cdot \|f_0\|_C.$$

В [12] дано конструктивное доказательство этого результата со следующим усилением: для любой точки $x_0 \in [0, 1] \setminus \{\frac{i}{2^k}, k = 0, 1, \dots, i = 0, 1, \dots, 2^k\}$ (т. е. двоично-иррациональной точки) существует функция $f_0 \in C[0, 1]$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(f_0, \sigma_{f_0}, x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m A_{\sigma_{f_0}(n)}(f_0) \varphi_{\sigma_{f_0}(n)}(x_0) = +\infty,$$

для любого $\sigma_{f_0} \in D(f_0)$.

Более того, в [13] доказано, что существует функция $f_0 \in C[0, 1]$ и подпоследовательности $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ натуральных чисел такие, что для жадного алгоритма функции f_0 по

системе Фабера–Шаудера верны следующие утверждения: $D(f_0)$ содержит единственную убывающую перестановку,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} G_{M_k}(f_0, x) = +\infty \text{ почти всюду на отрезке } [0, 1],$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|G_{N_k}(f_0) - f_0\|_C = 0.$$

Отсюда вытекает, что существует непрерывная на $[0, 1]$ функция, жадный алгоритм которой по системе Фабера–Шаудера расходится по мере на $[0, 1]$.

Таким образом, система Фабера–Шаудера, являющаяся базисом в $C[0, 1]$, не совсем удобная система для рассмотрения жадной аппроксимации. Интересно изучить этот вопрос с точки зрения поведения коэффициентов Фабера–Шаудера. Нетрудно видеть, что если коэффициенты разложения функции $f(x) \in C[0, 1]$ по системе Фабера–Шаудера удовлетворяют условию

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2^{1+\varepsilon} n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty (\varepsilon > 0),$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x)$ абсолютно (а значит, и безусловно) сходится по норме пространства $C[0, 1]$.

В нашей работе доказывается, что отбрасывание ε в показателе степени не только нарушает безусловную сходимость, но и меняет ситуацию с поведением жадного алгоритма.

Теорема. *Существует функция $f_0 \in C[0, 1]$, коэффициенты разложения которой по системе Фабера–Шаудера удовлетворяют условию*

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

жадный алгоритм которой расходится в $C[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Носитель функции $\varphi_n(x)$ ($n \geq 2$) системы (1) обозначим через Δ_n и рассмотрим подсистему $\{\varphi_{n_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}$, в которой $\varphi_{n_1}(x) = \varphi_2(x)$ (носитель Δ_{n_1} совпадает с отрезком $[0, 1]$, $x_{n_1} = \frac{1}{2}$) и для каждого натурального числа m носителем функции $\varphi_{n_{2m}}(x)$ является левая половина отрезка $\Delta_{n_{2m-1}}$ ($x_{n_{2m}} = \frac{x_{n_{2m-2}} + x_{n_{2m-1}}}{2}$, $x_{n_0} \equiv 0$), а носителем функции $\varphi_{n_{2m+1}}(x)$ — правая половина отрезка $\Delta_{n_{2m}}$ ($x_{n_{2m+1}} = \frac{x_{n_{2m-1}} + x_{n_{2m}}}{2}$).

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = \frac{1}{3}, \quad \varphi_{n_m}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Можно, например, прямым расчетом проверить, что в точке $1/3$ функции $\varphi_{n_1}(x)$, $\varphi_{n_2}(x)$ и $\varphi_{n_3}(x)$ принимают одно и то же значение $2/3$, а потом, учитывая свойство локальности системы Фабера–Шаудера.

Далее, ввиду (1) и (2) ряд $\sum_{m=2}^{\infty} |\varphi_{n_m}(x) - \varphi_{n_{m-1}}(x)|$ сходится в каждой точке отрезка $[0, 1]$, так как в точке $\frac{1}{3}$ ее сумма равна нулю, а в остальных точках $x \in [0, 1]$ он представляет собой конечные суммы. Положим

$$L_j(x) = \sum_{m=j+1}^{\infty} |\varphi_{n_m}(x) - \varphi_{n_{m-1}}(x)|, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Докажем, что

$$L_1(x) < 3 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Учитывая определение системы Фабера–Шаудера и подсистемы $\{\varphi_{n_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}$, заметим, что для любого натурального числа $j \geq 1$

$$L_j(x) - L_{j+1}(x) = |\varphi_{n_{j+1}}(x) - \varphi_{n_j}(x)| = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in ([0, 1] \setminus \Delta_{n_j}) \cup \{\frac{1}{3}\}; \\ 1 & \text{при } x = x_{n_j}; \\ \frac{1}{2} & \text{при } x = x_{n_{j+1}}; \\ \text{линейна и непрерывна между} & \\ \text{всеми соседними точками из} & \\ \{x_{n_m}\}_{m=j-2}^{j+1} \cup \{\frac{1}{3}\}. & \end{cases} \quad (4)$$

Итак, $L_j(x) - L_{j+1}(x)$ равна нулю на $[0, 1] \setminus \Delta_{n_j}$, а на Δ_{n_j} представляет собой ломаную, абсциссами вершин которой являются x_{n_j} , $x_{n_{j+1}}$, $\frac{1}{3}$ (под $x_{n_{(-1)}}$ и x_{n_0} подразумеваем концы интервала Δ_{n_1}).

Рассмотрим величину $|\varphi_{n_2}(x) - \varphi_{n_1}(x)|$. На отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ имеем $\varphi_{n_1}(x) = 2x$, так что в точках $x_{n_m} \in [0, \frac{1}{2}]$ она принимает значения $2x_{n_m}$. Так как точками x_{n_m} носитель Δ_{n_2} прерывает дробления аналогичные носителю Δ_{n_1} , нетрудно видеть, что $\varphi_{n_2}(x_{n_m}) = 2x_{n_{m-1}}$. Таким образом, учитывая схему построения подсистемы $\{\varphi_{n_m}(x)\}_{m=1}^{\infty}$, заключаем

$$|\varphi_{n_2}(x_{n_m}) - \varphi_{n_1}(x_{n_m})| = 2|x_{n_m} - x_{n_{m-1}}| = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Отсюда, основываясь на (4) и на свойстве локальности системы Фабера–Шаудера, получаем, что для любого натурального числа $i \geq 1$

$$L_1(x) - L_{1+i}(x) = \sum_{j=1}^i [L_j(x) - L_{j+1}(x)] = \begin{cases} 0 & \text{при } x = \frac{1}{3}; \\ 1 & \text{при } x = x_{n_1}; \\ 1 + \frac{1}{2} & \text{при } x = x_{n_2}; \\ \dots & \\ \sum_{k=1}^i \frac{1}{2^k} & \text{при } x = x_{n_{1+i}}; \\ \text{линейна и непрерывна между} & \\ \text{всеми соседними точками из} & \\ \{x_{n_m}\}_{m=1}^{1+i} \cup \{\frac{1}{3}\}, & \end{cases}$$

т. е. представляет собой ломаную с абсциссами вершин x_{n_1} , $x_{n_2}, \dots, x_{n_{1+i}}$, $\frac{1}{3}$ (число вершин этой ломаной на единицу больше числа вершин ломаной, которую представляет собой $L_1(x) - L_i(x)$).

Из вышесказанного следует

$$L_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} [L_j(x) - L_{j+1}(x)] = \begin{cases} 0 & \text{при } x = \frac{1}{3}; \\ \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^{k-1}} & \text{при } x = x_{n_m}, \quad m \in \mathbb{N}; \\ \text{линейна и непрерывна между} & \\ \text{всеми соседними точками из} & \\ \{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}, & \end{cases}$$

т. е. представляет собой “ломаную” с бесконечным числом вершин, абсциссами которых являются точки $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Так как $L_1(\frac{1}{3}) = 0$ и $L_1(x_{n_m}) < 3 \quad \forall m \in \mathbb{N}$, то

$$L_1(x) < 3 \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (5)$$

Далее, пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1} \right) > 0 \quad (6)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m+1} \right) < 0. \quad (7)$$

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k} \varphi_{n_k}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(x), \\ A_n &= \begin{cases} A_{n_k} & \text{при } n = n_k; \\ 0 & \text{при } n \neq n_k. \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Ясно, что ряд (8) сходится в каждой точке $x \in [0, 1]$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k} \varphi_{n_k}(1/3) = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k} < 0$$

(см. (2)), а в точках $x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{3}\}$ он представляет собой конечные суммы.

Положим

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k} \varphi_{n_k}(x).$$

Используя шаги преобразования Абеля ([15], п. 383, с. 305) докажем, что ряд (8) сходится к $f_0(x)$ равномерно. Для этого положим

$$r_j = \sum_{k=j}^{\infty} A_{n_k}, \quad R_j(x) = \sum_{k=j}^{\infty} A_{n_k} \varphi_{n_k}(x).$$

Поскольку ряд (7) сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $j_0 \in \mathbb{N}$, чтобы при $j \geq j_0$

$$|r_j| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (9)$$

Так как $A_{n_k} = r_k - r_{k+1}$, то

$$\begin{aligned} R_j(x) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=j}^N (r_k - r_{k+1}) \varphi_{n_k}(x) = \\ &= r_j \varphi_{n_j}(x) + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=j+1}^N r_k (\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)) - \lim_{N \rightarrow +\infty} r_{N+1} \varphi_{n_N}(x). \end{aligned}$$

Отсюда и из того, что $\|\varphi_n\|_{C[0,1]} = 1$, $n = 0, 1, \dots$, имеем

$$|R_j(x)| \leq |r_j| + \sum_{k=j+1}^{\infty} |r_k| |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)|,$$

откуда в силу (3), (5) и (9) для всех $j \geq j_0$ получим

$$|R_j(x)| < \frac{\varepsilon}{4}(1 + L_j(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1].$$

Итак, ряд (8) является разложением функции $f_0 \in C_{[0,1]}$ по системе Фабера–Шаудера, и коэффициенты $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют условию

$$|A_n(f)| = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из (6)–(7) следует, что для любой перестановки $\sigma_{f_0} \in D(f_0)$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(f_0, \sigma_{f_0}, 1/3) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k > 0.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Schauder J. *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Functionalraumen*, Math. Zeit. **26**, 47–65 (1927).
- [2] Temlyakov V.N. *Nonlinear methods of approximation*, Found. Comput. Math. **3** (1), 33–107 (2003).
- [3] DeVore R.A., Temlyakov V.N. *Some remarks on greedy algorithms*, Adv. Comput. Math. **5** (2–3), 173–187 (1996).
- [4] Копыагин С.В., Темляков В.Н. *A remark on greedy approximation in Banach spaces*, East J. Approx. **5** (3), 365–379 (1999).
- [5] Wojtaszczyk P. *Greedy algorithm for general biorthogonal systems*, J. Approx. Theory **107** (2), 293–314 (2000).
- [6] Körner T.W. *Divergence of decreasing rearranged Fourier series*, Ann. Math. **144** (1), 167–180 (1996).
- [7] Григорян М.Г. *О сходимости в метрике L^p греди алгоритма по тригонометрической системе*, Изв. НАН Армении **4**, 89–116 (2004).
- [8] Grigoryan M.G., Gogyan S.L. *On nonlinear approximation with respect to the Haar system and modifications of functions*, Anal. Math. **32** (1), 49–80 (2006).
- [9] Gogyan S.L. *Greedy algorithm with regard to Haar subsystems*, East J. Approx. **11**(2), 221–236 (2005).
- [10] Dilworth S.J., Kalton N.J., Kutzarova D. *On the existence of almost greedy bases in Banach spaces*, Studia Math. **159** (1), 67–101 (2003).
- [11] Саргсян А.А. *Свойство квазигреди системности некоторых подсистем системы Фабера–Шаудера*, Изв. НАН Арм. **40** (3), 46–54 (2005).
- [12] Саргсян А.А. *О квазигреди системности и демократичности некоторых подсистем системы Фабера–Шаудера*, Изв. НАН Арм. **41** (2), 56–73 (2006).
- [13] Григорян М.Г., Саргсян А.А. *Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера–Шаудера*, Матем. сб. **199** (5), 3–26 (2008).
- [14] Ульянов П.Л. *Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$* , УМН **27** (2), 3–52 (1972).
- [15] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т. **2** (Наука, М., 1970).

Арцрун Аршалуйсович Саргсян

Российско-Армянский университет,

ул. Овсепя Эмина, д. 123, г. Ереван, 0051, Армения,

e-mail: asargsyan@ysu.am

A.A. Sargsyan

On Faber–Schauder coefficients of continuous functions and divergence of greedy algorithms

Abstract. We consider relationship between the rate of convergence to zero of the Faber–Schauder coefficients of continuous functions and the behavior of the greedy algorithm. We construct a continuous function f with Faber–Schauder coefficients $|A_n(f)| = O(\log^{-1} n)$ and divergent greedy algorithm.

Keywords: greedy algorithm, Faber–Schauder system, coefficients of expansion, uniform convergence.

Artsrun Arshaluys Sargsyan

Russian-Armenian University,

123 Hovsep Emin str., Yerevan, 0051 Armenia,

e-mail: asargsyan@ysu.am