Общероссийский математический портал

С. В. Свинина, А. К. Свинин, Об одной начально-краевой задаче для полулинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных индекса $(1, 0)$, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 5, 70–82

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-5-70-82>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:10:38

С.В. СВИНИНА, А.К. СВИНИН

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ИНДЕКСА (1,0)

Аннотация. Рассмотрена смешанная задача для некоторой полулинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных индекса (1,0) первого порядка с двумерной прямоугольной областью определения. С помощью метода характеристик и метода последовательных приближений доказана теорема существования и единственности классического решения смешанной задачи во всей области определения. Показано, что решение и его первые производные остаются ограниченными в этой области.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическая система, индекс пучка, матричный пучок, метод характеристик.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-5-70-82

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полулинейную систему уравнений в частных производных

$$A(x, t)\partial_t u + B(x, t)\partial_x u = F(x, t, u), \quad (1)$$

где $A(x, t)$ и $B(x, t)$ — заданные квадратные матрицы порядка n , тождественно вырожденные в области определения $U = \{(x, t) | x \in I_x = [x_0, X] \subset \mathbb{R}^1, t \in I_t = [t_0, T] \subset \mathbb{R}^1\}$. Предполагается, что вектор-функция $F(x, t, u)$ определена в области $\mathcal{U} = \{(x, t, u) | (x, t) \in U, \|u\|_{C(U)} \leq Q\}$, где Q — некоторая постоянная величина. Системы вида (1) могут возникать при описании поведения сплошной среды: газа, жидкости, твердого тела (например, [1]–[5]).

Зададим для системы (1) начально-краевые условия

$$u(x_0, t) = \psi(t), \quad u(x, t_0) = \phi(x), \quad (2)$$

где $\psi(t)$ и $\phi(x)$ — некоторые заданные n -мерные вектор-функции. Будем предполагать, что в каждой точке области U пучок матриц $P(\lambda, x, t) = A(x, t) + \lambda B(x, t)$ является регулярным. В этом случае его индекс или индекс системы (1) определяется парой чисел $(k, 0)$, где k — максимальная степень элементарных делителей пучка $P(\lambda, x, t)$. Второй параметр индекса равен нулю, поскольку пучок $P(\lambda, x, t)$ по предположению не содержит сингулярной составляющей. Рассмотрим случай, когда система (1) имеет индекс (1, 0), т. е. все элементарные делители пучка $P(\lambda, x, t)$ являются простыми, при этом корни характеристического многочлена $\det P(\lambda, x, t)$ могут быть кратными.

Поступила в редакцию 09.04.2018, после доработки 05.06.2018. Принята к публикации 20.06.2018

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта СО РАН “Качественная теория и численный анализ дифференциально-алгебраических уравнений”, № 0348-216-0009.

Цель работы состоит в исследовании и доказательстве существования и единственности решения смешанной задачи (1), (2) во всей области определения U при определенных условиях гладкости на ее исходные данные. При доказательстве используем структурную форму матричного пучка, построенного по коэффициентам дифференциально-алгебраической системы. При определенных условиях на матричные коэффициенты возможно расщепление системы на три составляющих уравнения, одно из которых гиперболическое с ненулевыми характеристиками. Два других уравнения параболического типа, они имеют только нулевые характеристики. Такое расщепление при доказательстве теоремы о существовании решения позволило применить известный метод характеристик. Само доказательство выполнено конструктивным методом, основанным на хорошо известном методе последовательных приближений [6]–[8]. Отметим, также, что с помощью метода характеристик за счет введения параметра в качестве нижнего предела интегрирования, построены интегральные кривые, покрывающие искомые поверхности, во всей прямоугольной области определения U , а не в ее подобласти.

В следующем разделе приведем условия, при выполнении которых пучок системы (1) преобразуется к некоторому специальному виду.

1. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА МАТРИЧНОГО ПУЧКА СИСТЕМЫ

Теорема 1 ([9]). Пусть выполнены следующие условия:

- 1) все корни характеристического многочлена $\det(A(x) + \lambda B(x))$, где $x = (x_1, \dots, x_m) \in \bar{U}$, $\bar{U}$ — замыкание некоторой области, содержащейся в $\mathbb{R}^m$, являются вещественными и имеют постоянную кратность в области определения $\bar{U}$;
- 2) старший коэффициент многочлена $\det(A(x) + \lambda B(x))$ относительно параметра λ не обращается в нуль ни в одной точке $\bar{U}$;
- 3) ранги матриц $A(x)$ и $B(x)$ являются постоянными в каждой точке области $\bar{U}$ и меньше размерности n .

Тогда пучок $A(x) + \lambda B(x)$ s -гладко эквивалентен пучку следующего канонического вида:

$$\text{diag}\{E_d, M(x), E_p\} + \lambda \text{diag}\{J(x), E_l, N(x)\}, \quad (3)$$

где E_d — единичная матрица порядка d ; $M(x)$ и $N(x)$ — верхние (правые) треугольные блоки с нулевой диагональю порядка l и p соответственно; $J(x) = \text{diag}\{J_1(x), J_2(x), \dots, J_{\tilde{s}}(x)\}$ — блочно-диагональная матрица порядка d , в которой $J_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, \tilde{s}$, — невырожденные верхние (правые) треугольные матрицы порядков p_i соответственно, $d = \sum_{\nu=1}^{\tilde{s}} p_\nu$; каждый блок $J_i(x)$ имеет единственное собственное значение $-1/\lambda_i(x)$ в области определения $\bar{U}$; $\lambda_i(x)$ — собственные значения характеристического многочлена $\det(A(x) + \lambda B(x))$, не обращающиеся в нуль в области $\bar{U}$; $p = n - d - l$.

Из этой теоремы следует, что $M(x)$ и $N(x)$ в (3) являются нильпотентными матрицами в области определения $\bar{U}$. Пусть $\text{ind } M(x) = k_1$ и $\text{ind } N(x) = k_2$ в области $\bar{U}$, т.е. $k_1 = \min\{\bar{k} : M(x)^{\bar{k}} = 0 \ \forall x \in \bar{U}\}$. Аналогично определяется k_2 . Тогда пучок $P(\lambda, x, t)$, для которого выполняются все условия теоремы 1, имеет индекс $(k, 0)$, где $k = \max\{k_1, k_2\}$, и соответственно система (1) по определению имеет индекс $(k, 0)$. В настоящей работе предполагаем, что для системы (1) выполнены все условия теоремы 1 и степени элементарных делителей пучка $P(\lambda, x, t)$ не превосходят единицы. В этом случае система (1) имеет индекс $(1, 0)$ и в силу теоремы 1 для пучка $P(\lambda, x, t)$ найдутся невырожденные в области определения U матрицы $R(x, t)$ и $Q(x, t)$, обладающие той же гладкостью, что и элементы пучка

$P(\lambda, x, t)$, которые выполняют преобразование

$$R(x, t)P(\lambda, x, t)Q(x, t) = \text{diag}\{E_d, \mathcal{O}_l, E_p\} + \lambda \text{diag}\{J(x, t), E_l, \mathcal{O}_p\}, \quad (4)$$

где $\mathcal{O}_l$ — нулевой квадратный блок порядка l , $J(x, t) = \text{diag}\{k_1(x, t), k_2(x, t), \dots, k_d(x, t)\}$ — диагональная матрица. Правую часть в равенстве (4) будем называть канонической формой пучка $P(\lambda, x, t)$ системы (1) индекса $(1, 0)$.

Перейдем к исследованию начально-краевой задачи (1), (2).

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Докажем основную теорему.

Теорема 2. В области U существует единственное решение $u(x, t)$ системы (1), непрерывное в U вместе с частными производными первого порядка по переменным x и t , удовлетворяющее условиям (2), если выполнены следующие предположения:

- 1) для матричного пучка $P(\lambda, x, t)$ выполнены все условия теоремы 1;
- 2) все элементарные делители пучка $P(\lambda, x, t)$ имеют первую степень;
- 3) все ненулевые корни характеристического многочлена $\det P(\lambda, x, t)$ отрицательные;
- 4) элементы матрицы $A(x, t)$ и $B(x, t)$ принадлежат пространству $C^2(U)$; вектор-функция $\psi(t)$ принадлежит пространству $C^1(I_t)$; вектор-функция $\phi(x)$ принадлежит пространству $C^1(I_x)$; вектор-функция $F(x, t, u)$ удовлетворяет условию Липшица по u ; частные производные $\partial_x F(x, t, u)$, $\partial_t F(x, t, u)$ и $\partial_u F(x, t, u)$ удовлетворяют условию Липшица по u в области $\mathcal{U} = \{(x, t, u) \mid (x, t) \in U, \|u\|_{C(U)} \leq \mathcal{Q}\}$, где

$$\mathcal{Q} = \rho \left\{ \gamma + \delta \max_{\forall k} \left(\frac{K^k(|I_t| + |I_x|)^k}{k!} \right) + M (\exp(K(|I_t| + |I_x|)) - 1) \right\}, \quad (5)$$

$\rho = \|Q^{-1}(x, t)\|_{C(U)}$, $\gamma = \max\{\|\psi(t)\|_{C(I_t)}, \|\phi(x)\|_{C(I_x)}\}$ и δ, K, M — некоторые постоянные величины¹;

- 5) выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} \psi(t_0) &= \phi(x_0), \quad \frac{d\psi(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{d\phi(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}, \\ A(x_0, t_0) \frac{d\psi(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} + B(x_0, t_0) \frac{d\phi(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} &= F(x_0, t_0, \psi(t_0)). \end{aligned}$$

Доказательство. В силу первых двух условий теоремы найдутся невырожденные матрицы $P(x, t)$ и $Q(x, t)$ с элементами из пространства $C^2(U)$, которые преобразуют пучок $P(\lambda, x, t)$ к виду (4). Умножим систему (1) слева на матрицу $P(x, t)$ и выполним замену переменной $u(x, t) = Q(x, t)v(x, t)$, где $v(x, t)$ — неизвестная n -мерная вектор-функция. В результате получим расщепленную систему

$$\begin{aligned} \partial_t v_i^1 + k_i(x, t) \partial_x v_i^1 &= g_i^1(x, t, v), \quad i = 1, \dots, d, \\ \partial_x v^2 &= g^2(x, t, v), \\ \partial_t v^3 &= g^3(x, t, v), \end{aligned} \quad (6)$$

где $g(x, t, v) = P(x, t)F(x, t, Q(x, t)v) - P(x, t)(A(x, t)\partial_t Q(x, t) + B(x, t)\partial_x Q(x, t))v$ — вектор-функция, состоящая из блоков $g(x, t, v) = (g^1(x, t, v), g^2(x, t, v), g^3(x, t, v))^T$ размеров d, l и p

¹В пространстве $C^1(U)$ используем норму $\|v(x, t)\|_{C(U)} = \max_{(x, t) \in U} \|v(x, t)\|$, где $\|v(x, t)\| = \max_{i=1, \dots, n} |v_i(x, t)|$.

соответственно, $g^1(x, t, v) = (g_1^1(x, t, v), g_2^1(x, t, v), \dots, g_d^1(x, t, v))^T$; искомая вектор-функция $v(x, t) = (v^1, v^2, v^3)^T$ также состоит из блоков размеров d , l и p соответственно, $v^1 = (v_1^1, v_2^1, \dots, v_d^1)^T$. При этом начально-краевые условия для системы (6) примут вид

$$v(x_0, t) = Q^{-1}(x_0, t)\psi(t) = \Psi(t), \quad v(x, t_0) = Q^{-1}(x, t_0)\phi(x) = \Phi(x). \quad (7)$$

Отметим, что вектор-функция $g(x, t, v)$ обладает всеми свойствами вектор-функции $F(x, t, u)$, перечисленными в четвертом пункте настоящей теоремы. Следовательно, для задачи (6), (7) выполнены третье, четвертое и пятое условия настоящей теоремы. Докажем, что задача (6), (7) имеет единственное классическое решение в области U . Для этого рассмотрим задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = k_i(x, t), \quad x(t^0) = x^0, \quad i = 1, \dots, d, \quad (8)$$

где $k_i(x, t) \in C^2(U)$ — диагональные элементы матрицы $J(x, t)$, причем $k_i(x, t) > 0 \forall (x, t) \in U$. Величины x^0 и t^0 являются параметрами, которые принимают свои значения на границе области U . Обозначим эту границу Γ , т.е. $(x^0, t^0) \in \Gamma = \{(x^0, t^0) | (x^0 \in I_x, t^0 = t_0) \vee (x^0 = x_0, t^0 \in I_t)\}$. Так как функции $k_i(x, t)$ определены и непрерывны в области U , то решение задачи Коши существует и единственно для каждого i на отрезке $[t^0, T]$. Решения задач (8) обозначим $x_i = x_i(x, t, x^0, t^0)$. Это ненулевые характеристики системы (1). Через каждую граничную точку (x^0, t^0) проходит ровно d ненулевых характеристик. С учетом (8) запишем систему (6) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv_i^1(x, t)}{dt} &= g_i^1(x_i(x, t, x^0, t^0), t, v(x_i(x, t, x^0, t^0), t)), \quad i = 1, \dots, d, \\ \partial_x v^2(x, t) &= g^2(x, t, v(x, t)), \\ \partial_t v^3(x, t) &= g^3(x, t, v(x, t)), \end{aligned} \quad (9)$$

где $dv_i^1(x, t)/dt$ — полная производная i -й компоненты $v_i^1(x, t)$ блока $v^1(x, t)$ по переменной t в направлении характеристики $x_i = x_i(x, t, x^0, t^0)$. Очевидно, система (9) с начально-краевыми условиями (7) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} v_i^1(x, t) &= v_i^1(x^0, t^0) + \int_{t^0}^t g_i^1(x_i, \tau, v(x_i, \tau)) d\tau, \quad t^0 \in I_t, \\ v^2(x, t) &= v^2(x_0, t) + \int_{x_0}^x g^2(s, t, v(s, t)) ds, \\ v^3(x, t) &= v^3(x, t_0) + \int_{t_0}^t g^3(x, \tau, v(x, \tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Эта система определяет n интегральных поверхностей с областью определения U , удовлетворяющих начально-краевым условиям (7). Эти поверхности покрывают кривые, проекции которых являются характеристиками системы (1). Среди них d ненулевых характеристик $x = x_i(x, t, x^0, t^0)$, l нулевых характеристик $t = t^0$, которые соответствуют нулевым корням характеристического многочлена $\det P(\lambda, x, t)$ и p бесконечных характеристик $x = x^0$, соответствующих бесконечным корням характеристического многочлена $\det P(\lambda, x, t)$.

Перейдем к построению интегральных поверхностей, определенных системой уравнений (10). Для этого применим к системе (10) метод последовательных приближений. Пусть

$v_0(x, t) = \Phi(x)$, а $v_{k+1}(x, t) = (v_{k+1}^1, v_{k+1}^2, v_{k+1}^3)^\top$, где $v_{k+1}^1 = (v_{1,k+1}, v_{2,k+1}, \dots, v_{d,k+1})^\top$, определяется как решение задачи

$$\begin{aligned} v_{i,k+1}^1(x, t) &= v_{i,k+1}^1(x^0, t^0) + \int_{t^0}^t g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) d\tau, \quad t^0 \in I_t, \\ v_{k+1}^2(x, t) &= v_{k+1}^2(x_0, t) + \int_{x_0}^x g^2(s, t, v_k(s, t)) ds, \\ v_{k+1}^3(x, t) &= v_{k+1}^3(x, t_0) + \int_{t_0}^t g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

с начально-краевыми условиями

$$v_{k+1}(x_0, t) = \Psi(t), \quad v_{k+1}(x, t_0) = \Phi(x). \quad (12)$$

Рекуррентные соотношения (11), (12), начиная с $v_0(x, t)$, однозначно определяют бесконечную последовательность функций $\{v_k(x, t) : k \geq 0\}$, каждый элемент которой является непрерывной функцией в области U . Покажем, что все элементы последовательности $\{v_k(x, t)\}$ не выходят за пределы области $\mathcal{U}$. Преобразуем систему (11), добавляя и вычитая в правой части необходимые величины. В результате, получим систему

$$\begin{aligned} v_{i,k+1}^1(x, t) &= v_{i,k+1}^1(x^0, t^0) + \int_{t^0}^t \{g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) - g_i^1(x_i, \tau, v_k(x^0, t^0)) + \\ &\quad + g_i^1(x_i, \tau, v_k(x^0, t^0))\} d\tau, \\ v_{k+1}^2(x, t) &= v_{k+1}^2(x_0, t) + \int_{x_0}^x \{g^2(s, t, v_k(s, t)) - g^2(s, t, v_k(x_0, t)) + g^2(s, t, v_k(x_0, t))\} ds, \\ v_{k+1}^3(x, t) &= v_{k+1}^3(x, t_0) + \int_{t_0}^t \{g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) - g^3(x, \tau, v_k(x, t_0)) + g^3(x, \tau, v_k(x, t_0))\} d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как вектор-функция $g(x, t, v)$, как и вектор-функция $F(x, t, u)$, удовлетворяет условию Липшица по v , то из (13) следует

$$\begin{aligned} \|v_{i,k+1}^1(x, t) - v_{i,k+1}^1(x^0, t^0)\|_{C(U)} &\leq K \int_{t^0}^t \|v_k(x, t) - v(x^0, t^0)\|_{C(U)} d\tau + M|t - t^0|, \\ \|v_{k+1}^2(x, t) - v_{k+1}^2(x_0, t)\|_{C(U)} &\leq K \int_{x_0}^x \|v_k(x, t) - v(x_0, t)\|_{C(U)} ds + M|x - x_0|, \\ \|v_{k+1}^3(x, t) - v_{k+1}^3(x, t_0)\|_{C(U)} &\leq K \int_{t_0}^t \|v_k(x, t) - v(x, t_0)\|_{C(U)} d\tau + M|t - t_0|, \end{aligned} \quad (14)$$

где K — постоянная Липшица, а $M = \max\{\|g(x, t, v(x_0, t))\|_{C(U)}, \|g(x, t, v(x, t_0))\|_{C(U)}\}$. Обозначим $\tilde{v}(x, t) = (v^1(x, t), v^3(x, t))^\top$ и $\tilde{v}_k(x, t) = (v_k^1(x, t), v_k^3(x, t))^\top$. Так как t^0 , в частности,

принимает значение t_0 , то неравенства (14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_{k+1}(x, t) - \tilde{v}(x^0, t^0)\|_{C(U)} &\leq K \int_{t^0}^t \|v_k(x, t) - v(x^0, t^0)\|_{C(U)} d\tau + M|t - t^0|, \\ \|\tilde{v}_{k+1}^2(x, t) - \tilde{v}_{k+1}^2(x_0, t)\|_{C(U)} &\leq K \int_{x_0}^x \|v_k(x, t) - v(x_0, t)\|_{C(U)} ds + M|x - x_0|. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим $v_\Gamma(x, t) = (v_\Gamma^1(x, t), v_\Gamma^2(x, t), v_\Gamma^3(x, t))^\top$, где

$$v_\Gamma^1(x, t) = \begin{cases} \Phi^1(x) & \text{при } t = t_0; \\ \Psi^1(t) & \text{при } x = x_0 \end{cases}$$

определена на левой и нижней границах области U , $v_\Gamma^2(x, t) = \Psi^2(t)$ и $v_\Gamma^3(x, t) = \Phi^3(t)$. Вектор-функции $\Phi^j(x)$ и $\Psi^j(t)$ являются блоками вектор-функций $\Phi(x) = (\Phi^1(x), \Phi^2(x), \Phi^3(x))^\top$ и $\Psi(t) = (\Psi^1(t), \Psi^2(t), \Psi^3(t))^\top$ порядков d , l и p соответственно, $j = 1, 2, 3$. С учетом сделанных обозначений из (15) получаем неравенства

$$\begin{aligned} \|v_1(x, t) - v_\Gamma(x, t)\|_{C(U)} &\leq \max\{(K\delta + M)|t - t_0|, (K\delta + M)|x - x_0|\}, \\ \|v_2(x, t) - v_\Gamma(x, t)\|_{C(U)} &\leq \max\left\{(K^2\delta + KM)\frac{|t - t_0|^2}{2} + M|t - t_0|, \right. \\ &\quad (K^2\delta + KM)|t - t_0||x - x_0| + M|t - t_0|, (K^2\delta + KM)|t - t_0||x - x_0| + M|x - x_0|, \\ &\quad \left.(K^2\delta + KM)\frac{|x - x_0|^2}{2} + M|x - x_0|\right\} \end{aligned} \quad (16)$$

и т. д. Обобщая неравенства (16), получаем оценку

$$\|v_k(x, t) - v_\Gamma(x, t)\|_{C(U)} \leq \delta \frac{K^k(|I_x| + |I_t|)^k}{k!} + M \sum_{p=1}^k K^p \frac{(|I_x| + |I_t|)^p}{p!}, \quad (17)$$

где $\delta = \max\{\|v_0(x, t) - v(x_0, t)\|_{C(U)}, \|v_0(x, t) - v(x, t_0)\|_{C(U)}\}$. Из (17) следует

$$\|v_k(x, t) - v_\Gamma(x, t)\|_{C(U)} \leq \delta \max_k \left\{ \frac{K^k(|I_x| + |I_t|)^k}{k!} \right\} + M(\exp(K(|I_x| + |I_t|)) - 1). \quad (18)$$

В свою очередь, из (18) следует оценка

$$\|v_k(x, t)\|_{C(U)} \leq \|v_\Gamma(x, t)\|_{C(U)} + \delta \max_k \left\{ \frac{K^k(|I_x| + |I_t|)^k}{k!} \right\} + M(\exp(K(|I_x| + |I_t|)) - 1). \quad (19)$$

Неравенство (19) показывает, что вектор-функции $v_k(x, t)$ являются ограниченными в области U при любом значении $k \geq 0$.

Все элементы последовательности $\{v_k(x, t)\}$ являются непрерывными функциями. Докажем, что эта последовательность равномерно сходится к некоторой непрерывной функции. Очевидно, что равномерная сходимость последовательности $\{v_k(x, t)\}$ эквивалентна равномерной сходимости ряда

$$v_0(x, t) + \sum_{k=0}^{\infty} (v_{k+1}(x, t) - v_k(x, t)). \quad (20)$$

Покажем, что ряд (20) сходится абсолютно и равномерно. Из (11) находим соотношения

$$\begin{aligned} v_{i,k+1}^1(x, t) - v_{i,k}^1(x, t) &= \int_{t_0}^t \{g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) - g_i^1(x_i, \tau, v_{k-1}(x_i, \tau))\} d\tau, \\ v_{k+1}^2(x, t) - v_k^2(x, t) &= \int_{x_0}^x \{g^2(s, t, v_k(s, t)) - g^2(s, t, v_{k-1}(s, t))\} ds, \\ v_{k+1}^3(x, t) - v_k^3(x, t) &= \int_{t_0}^t \{g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) - g^3(x, \tau, v_{k-1}(x, \tau))\} d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Так как вектор-функция $g(x, t, v)$ удовлетворяет условию Липшица по v с некоторой постоянной K , то из (21) следуют оценки

$$\begin{aligned} \|v_{k+1}^1(x, t) - v_k^1(x, t)\|_{C(U)} &\leq K \int_{t_0}^t \|v_k(x, t) - v_{k-1}(x, t)\|_{C(U)} d\tau, \\ \|v_{k+1}^2(x, t) - v_k^2(x, t)\|_{C(U)} &\leq K \int_{x_0}^x \|v_k(x, t) - v_{k-1}(x, t)\|_{C(U)} ds, \\ \|v_{k+1}^3(x, t) - v_k^3(x, t)\|_{C(U)} &\leq K \int_{t_0}^t \|v_k(x, t) - v_{k-1}(x, t)\|_{C(U)} d\tau \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_{k+1}(x, t) - \tilde{v}_k(x, t)\|_{C(U)} &\leq K \int_{t_0}^t \|v_k(x, t) - v_{k-1}(x, t)\|_{C(U)} d\tau, \\ \|v_{k+1}^2(x, t) - v_k^2(x, t)\|_{C(U)} &\leq K \int_{x_0}^x \|v_k(x, t) - v_{k-1}(x, t)\|_{C(U)} ds. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) получаем

$$\begin{aligned} &\|v_{k+1}(x, t) - v_k(x, t)\|_{C(U)} \leq \\ &\leq K \max_{\forall (x, t) \in U} \left\{ \int_{t_0}^t \|v_k(x, t) - v_{k-1}(x, t)\|_{C(U)} d\tau, \int_{x_0}^x \|v_k(x, t) - v_{k-1}(x, t)\|_{C(U)} ds \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть $\|v_1(x, t) - v_0(x, t)\|_{C(U)} \leq \xi$, где $\xi = 2 \max \{\|v_0(x, t)\|_{C(U)}, \|v_1(x, t)\|_{C(U)}\}$, тогда из (23) имеем

$$\|v_{k+1}(x, t) - v_k(x, t)\|_{C(U)} \leq \xi K^k \max_s \left\{ \frac{|I_x|^s |I_t|^{k-s}}{s!(k-s)!} \right\}. \quad (24)$$

Преобразуя правую часть (24), получаем

$$\|v_{k+1}(x, t) - v_k(x, t)\|_{C(U)} \leq \xi \frac{K^k (|I_x| + |I_t|)^k}{k!}. \quad (25)$$

Так как числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{K^k(|I_x| + |I_t|)^k}{k!} \quad (26)$$

сходится, то и ряд (20), мажорируемый рядом (26), в силу оценки (25) сходится абсолютно и равномерно. Таким образом, последовательность $\{v_k(x, t)\}$ сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $v(x, t)$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в равенствах (11), получаем, что предельная функция $v(x, t)$ удовлетворяет интегральным соотношениям (10). Из непрерывности подинтегральных функций в (10) следует непрерывная дифференцируемость правой части первого и третьего уравнений в (10) по переменной t и правой части второго уравнения в (10) по переменной x . Таким образом, компоненты $v_i^1(x, t)$, где $i = 1, \dots, d$, первой блочной компоненты $v^1(x, t)$ предельной функции $v(x, t)$ непрерывно дифференцируемы по переменной t вдоль соответствующего характеристического направления $x_i(x, t, x^0, t^0)$. Вторая блочная компонента $v^2(x, t)$ предельной функции $v(x, t)$ непрерывно дифференцируема по переменной x и третья блочная компонента $v^3(x, t)$ непрерывно дифференцируема по переменной t . Покажем, что предельная функция является непрерывно дифференцируемой функцией в области U . Продифференцируем первое и третье уравнения системы (11) по переменной x , и в результате получим систему относительно неизвестной вектор-функции $\partial \tilde{v}_{k+1}(x, t)/\partial x$:

$$\begin{aligned} \partial_x v_{i,k+1}^1(x, t) &= \partial_{x_i} v_{i,k+1}^1(x^0, t^0) \partial_x x_i(t^0) + \int_{t^0}^t \left\{ \partial_{x_i} g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \partial_{v_{j,k}} g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) \partial_{x_i} v_{j,k} \right\} \partial_x x_i d\tau, \\ \partial_x v_{k+1}^3(x, t) &= \partial_x v_{k+1}^3(x, t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \partial_x g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) + \sum_{j=1}^n \partial_{v_{j,k}} g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) \partial_x v_{j,k} \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (27)$$

где $v_{j,k}$ — j -я компонента вектора $v_k = v_k(x, t) = (v_{1,k}, v_{2,k}, \dots, v_{n,k})^\top$. Исключая из системы (27) компоненту $\partial_x v_k^2(x, t) = (\partial_x v_{d+1,k}, \partial_x v_{d+2,k}, \dots, \partial_x v_{d+l,k})^\top$, используя второе уравнение из (11), перейдем к системе

$$\begin{aligned} \partial_x v_{i,k+1}^1(x, t) &= \partial_{x_i} v_{i,k+1}^1(x^0, t^0) \partial_x x_i(t^0) + \int_{t^0}^t \left\{ \partial_{x_i} g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) + \right. \\ &\quad + \sum_{j=d+1}^{d+l} \partial_{v_{j,k}} g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) g_j(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) + \sum_{j=1}^d \partial_{v_{j,k}} g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) \partial_{x_i} v_{j,k}(x_i, \tau) + \\ &\quad \left. + \sum_{j=d+l+1}^n \partial_{v_{j,k}} g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) \partial_{x_i} v_{j,k}(x_i, \tau) \right\} \partial_x x_i(t^0) d\tau, \\ \partial_x v_{k+1}^3(x, t) &= \partial_x v_{k+1}^3(x, t_0) + \int_{t_0}^t \left\{ \partial_x g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) + \sum_{j=d+1}^{d+l} \partial_{v_{j,k}} g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) \times \right. \\ &\quad \left. \times g_j(x, \tau, v_k(x, \tau)) + \sum_{j=1}^d \partial_{v_{j,k}} g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) \partial_x v_{j,k} + \sum_{j=d+l+1}^n \partial_{v_{j,k}} g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) \partial_x v_{j,k} \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (28)$$

где $g(x, t, v_k(x, t)) = (g_1(x, t, v_k(x, t)), g_2(x, t, v_k(x, t)), \dots, g_n(x, t, v_k(x, t)))^\top$. Обозначим

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{i,k}^1 &= \mathcal{G}_{i,k}^1(x, t, v_k(x, t)) = \left(\partial_{v_{1,k}} g_{i,k}^1, \partial_{v_{2,k}} g_{i,k}^1, \dots, \partial_{v_{n,k}} g_{i,k}^1 \right), \quad i = 1, \dots, d, \\ \mathcal{G}_k^3 &= \mathcal{G}_k^3(x, t, v_k(x, t)) = \left(\partial_{v_{1,k}} g_k^3, \partial_{v_{2,k}} g_k^3, \dots, \partial_{v_{n,k}} g_k^3 \right),\end{aligned}\tag{29}$$

где $g_{i,k}^1 = g_i^1(x, t, v_k)$ и $g_k^3 = g^3(x, t, v_k)$. Разобьем каждую вектор-строку $\mathcal{G}_{i,k}^1$ из (29) на три блока $\mathcal{G}_{i,k}^1 = (\mathcal{G}_{i,k,1}^1, \mathcal{G}_{i,k,2}^1, \mathcal{G}_{i,k,3}^1)$ размеров $(1 \times d)$, $(1 \times l)$ и $(1 \times p)$ соответственно. Матрицу $\mathcal{G}_k^3$ также разобьем на три блока $\mathcal{G}_k^3 = (\mathcal{G}_{1,k}^3, \mathcal{G}_{2,k}^3, \mathcal{G}_{3,k}^3)$ размеров $(p \times d)$, $(p \times l)$ и $(p \times p)$ соответственно. С учетом обозначений (29) система (28) примет вид

$$\begin{aligned}\partial_x v_{i,k+1}^1(x, t) &= \partial_x v_{i,k+1}^1(x^0, t^0) \partial_x x_i(t^0) + \int_{t^0}^t \{ \partial_{x_i} g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) + \\ &+ \mathcal{G}_{i,k,2}^1 g^2(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) + \mathcal{G}_{i,k,1}^1 \partial_{x_i} v_k^1(x_i, \tau) + \mathcal{G}_{i,k,3}^1 \partial_{x_i} v_k^3(x_i, \tau) \} \partial_x x_i d\tau, \\ \partial_x v_{k+1}^3(x, t) &= \partial_x v_{k+1}^3(x, t_0) + \int_{t_0}^t \{ \partial_x g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) + \mathcal{G}_{2,k}^3 g^2(x, \tau, v_k(x, \tau)) + \\ &+ \mathcal{G}_{1,k}^3 \partial_x v_k^1(x, \tau) + \mathcal{G}_{3,k}^3 \partial_x v_k^3(x, \tau) \} d\tau.\end{aligned}\tag{30}$$

Выясним при каких условиях производные $\partial_x \tilde{v}_k$ остаются ограниченными при любом значении k . Для этого необходимо преобразовать систему (30). Ввиду громоздкости выражений, получаемых в результате преобразования, здесь опишем только идею преобразования. Она состоит в следующем. Для любых двух элементов $\zeta(v_k)$ и $\eta(v_k)$, которые могут быть функциями, вектор-функциями, матриц-функциями, зависящими от переменной v_k , справедливо равенство $\zeta(v_k)\eta(v_k) = [\zeta(v_k) - \zeta(v_0)][\eta(v_k) - \eta(v_0)] + \zeta(v_0)[\eta(v_k) - \eta(v_0)] + [\zeta(v_k) - \zeta(v_0)]\eta(v_0) + \zeta(v_0)\eta(v_0)$. Применяя это равенство к каждому подинтегральному произведению из правой части системы (30) получим систему в преобразованном виде. Учитывая, что вектор-функция $g(x, t, v)$ и ее производная $\partial_x g(x, t, v)$ удовлетворяют условию Липшица по v от этой системы перейдем к оценке

$$\|\partial_x v_{k+1}(x, t) - \partial_x v(x^0, t^0)\|_{C(U)} \leq \tilde{K} \int_{t^0}^t \|\partial_x v_k(x, t) - \partial_x v(x^0, t^0)\|_{C(U)} d\tau + \tilde{M}|t - t^0|,\tag{31}$$

где $\tilde{K}$ и $\tilde{M}$ — некоторые постоянные величины. Обозначим $\delta = \|\partial_x v_0(x, t) - \partial_x v(x^0, t^0)\|_{C(U)}$, тогда из (31) получаем оценку, справедливую для всех значений k ,

$$\|\partial_x v_{k+1}(x, t) - \partial_x v(x^0, t^0)\|_{C(U)} \leq \delta \frac{\tilde{K}^k |t - t^0|^k}{k!} + \tilde{M} \sum_{p=1}^k \tilde{K}^{p-1} \frac{|t - t^0|^p}{p!}.\tag{32}$$

Из (32) следует неравенство

$$\|\partial_x v_{k+1}(x, t)\|_{C(U)} \leq \mathcal{N}, \quad \text{где } \mathcal{N} = \|\partial_x v(x^0, t^0)\|_{C(U)} + \delta \max_k \left\{ \frac{(\tilde{K}|I_t|)^k}{k!} \right\} + \frac{\tilde{M}}{\tilde{K}} (\exp(\tilde{K}|I_t|) - 1).\tag{33}$$

Таким образом, $\partial_x \tilde{v}_k(x, t)$ в силу (33) ограничены в области U . Отметим, что все элементы последовательности $\{\partial_x \tilde{v}_k(x, t)\}$ являются непрерывными функциями. Докажем, что эта последовательность равномерно сходится к некоторой непрерывной функции. Снова рассмотрим ряд, сходимость которого гарантирует сходимость последовательности $\{\partial_x \tilde{v}_k(x, t)\}$,

$$\partial_x \tilde{v}_0(x, t) + \sum_{k=0}^{\infty} (\partial_x \tilde{v}_{k+1}(x, t) - \partial_x \tilde{v}_k(x, t)). \quad (34)$$

Покажем, что ряд (34) сходится абсолютно и равномерно. Из (30) находим

$$\begin{aligned} \partial_x v_{i,k+1}^1(x, t) - \partial_x v_{i,k}^1(x, t) &= \int_{t_0}^t \left\{ \partial_{x_i} g_i^1(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) - \partial_{x_i} g_i^1(x_i, \tau, v_{k-1}(x_i, \tau)) + \right. \\ &+ \mathcal{G}_{i,k,2}^1 g^2(x_i, \tau, v_k(x_i, \tau)) - \mathcal{G}_{i,k-1,2}^1 g^2(x_i, \tau, v_{k-1}(x_i, \tau)) + \mathcal{G}_{i,k,1}^1 \partial_{x_i} v_k^1(x_i, \tau) - \\ &- \mathcal{G}_{i,k-1,1}^1 \partial_{x_i} v_{k-1}^1(x_i, \tau) + \mathcal{G}_{i,k,3}^1 \partial_{x_i} v_k^3(x_i, \tau) - \mathcal{G}_{i,k-1,3}^1 \partial_{x_i} v_{k-1}^3(x_i, \tau) \left. \right\} \partial_x x_i d\tau, \\ \partial_x v_{k+1}^3(x, t) - \partial_x v_k^3(x, t) &= \int_{t_0}^t \left\{ \partial_x g^3(x, \tau, v_k(x, \tau)) - \partial_x g^3(x, \tau, v_{k-1}(x, \tau)) + \right. \\ &+ \mathcal{G}_{2,k}^3 g^2(x, \tau, v_k(x, \tau)) - \mathcal{G}_{2,k-1}^3 g^2(x, \tau, v_{k-1}(x, \tau)) + \mathcal{G}_{1,k}^3 \partial_x v_k^1(x, \tau) - \\ &- \mathcal{G}_{1,k-1}^3 \partial_x v_{k-1}^1(x, \tau) + \mathcal{G}_{3,k}^3 \partial_x v_k^3(x, \tau) - \mathcal{G}_{3,k-1}^3 \partial_x v_{k-1}^3(x, \tau) \left. \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (35)$$

Преобразуя (35), пользуясь равенством $\zeta(v_k)\eta(v_k) - \zeta(v_{k-1})\eta(v_{k-1}) = [\zeta(v_k) - \zeta(v_{k-1})][\eta(v_k) - \eta(v_{k-1})] + \zeta(v_{k-1})[\eta(v_k) - \eta(v_{k-1})] + [\zeta(v_k) - \zeta(v_{k-1})]\eta(v_{k-1})$, справедливым для любых $\zeta(v_k)$ и $\eta(v_k)$, переходим к системе

$$\begin{aligned} \partial_x v_{i,k+1}^1(x, t) - \partial_x v_{i,k}^1(x, t) &= \int_{t_0}^t \left\{ \partial_{x_i} g_i^1(x_i, \tau, v_k) - \partial_{x_i} g_i^1(x_i, \tau, v_{k-1}) + (\mathcal{G}_{i,k,2}^1 - \mathcal{G}_{i,k-1,2}^1) \times \right. \\ &\times (g^2(x_i, \tau, v_k) - g^2(x_i, \tau, v_{k-1})) + \mathcal{G}_{i,k-1,2}^1 (g^2(x_i, \tau, v_k) - g^2(x_i, \tau, v_{k-1})) + \\ &+ (\mathcal{G}_{i,k,2}^1 - \mathcal{G}_{i,k-1,2}^1) g^2(x_i, \tau, v_{k-1}) + (\mathcal{G}_{i,k,1}^1 - \mathcal{G}_{i,k-1,1}^1) (\partial_{x_i} v_k^1 - \partial_{x_i} v_{k-1}^1) + \mathcal{G}_{i,k-1,1}^1 \times \\ &\times (\partial_{x_i} v_k^1 - \partial_{x_i} v_{k-1}^1) + (\mathcal{G}_{i,k,1}^1 - \mathcal{G}_{i,k-1,1}^1) \partial_{x_i} v_{k-1}^1 + (\mathcal{G}_{i,k,3}^1 - \mathcal{G}_{i,k-1,3}^1) \times \\ &\times (\partial_{x_i} v_k^3 - \partial_{x_i} v_{k-1}^3) + \mathcal{G}_{i,k-1,3}^1 (\partial_{x_i} v_k^3 - \partial_{x_i} v_{k-1}^3) + (\mathcal{G}_{i,k,3}^1 - \mathcal{G}_{i,k-1,3}^1) \partial_{x_i} v_{k-1}^3 \left. \right\} \partial_x x_i d\tau, \\ \partial_x v_{k+1}^3(x, t) - \partial_x v_k^3(x, t) &= \int_{t_0}^t \left\{ \partial_x g^3(x, \tau, v_k) - \partial_x g^3(x, \tau, v_{k-1}) + (\mathcal{G}_{2,k}^3 - \mathcal{G}_{2,k-1}^3) \times \right. \\ &\times (g^2(x, \tau, v_k) - g^2(x, \tau, v_{k-1})) + \mathcal{G}_{2,k-1}^3 (g^2(x, \tau, v_k) - g^2(x, \tau, v_{k-1})) + (\mathcal{G}_{2,k}^3 - \mathcal{G}_{2,k-1}^3) \times \\ &\times g^2(x, \tau, v_{k-1}) + (\mathcal{G}_{1,k}^3 - \mathcal{G}_{1,k-1}^3) (\partial_x v_k^1 - \partial_x v_{k-1}^1) + \mathcal{G}_{1,k-1}^3 (\partial_x v_k^1 - \partial_x v_{k-1}^1) + \\ &+ (\mathcal{G}_{1,k}^3 - \mathcal{G}_{1,k-1}^3) \partial_x v_{k-1}^1 + (\mathcal{G}_{3,k}^3 - \mathcal{G}_{3,k-1}^3) (\partial_x v_k^3 - \partial_x v_{k-1}^3) + \mathcal{G}_{3,k-1}^3 (\partial_x v_k^3 - \partial_x v_{k-1}^3) + \\ &+ (\mathcal{G}_{3,k}^3 - \mathcal{G}_{3,k-1}^3) \partial_x v_{k-1}^3 \left. \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

Поскольку вектор-функция $g(x, t, v)$ и ее производные $\partial_x g(x, t, v)$ и $\partial_{v_i} g(x, t, v)$, где $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условию Липшица по v ; вектор-функция $g^2(x, t, v)$ ограничена в

области $\mathcal{U}$; вектор-функции $\partial_x v_{k-1}^1(x, t)$ и $\partial_x v_{k-1}^3(x, t)$ ограничены в области U , то из (36) следует оценка

$$\begin{aligned} \|\partial_x \tilde{v}_{k+1} - \partial_x \tilde{v}_k\|_{C(U)} &\leq M_1 \int_{t_0}^t \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)} d\tau + M_2 \int_{t_0}^t \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)}^2 d\tau + \\ &+ M_3 \int_{t_0}^t \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)} \|\partial_x \tilde{v}_k - \partial_x \tilde{v}_{k-1}\|_{C(U)} d\tau + M_4 \int_{t_0}^t \|\partial_x \tilde{v}_k - \partial_x \tilde{v}_{k-1}\|_{C(U)} d\tau, \end{aligned} \quad (37)$$

где M_j — некоторые постоянные величины, $j = 1, \dots, 4$. Обозначим $\theta_k = \|v_k - v_{k-1}\|_{C(U)}$. Напомним, что θ_k есть k -й член сходящегося числового ряда (20). Из (37) получаем

$$\|\partial_x \tilde{v}_{k+1} - \partial_x \tilde{v}_k\|_{C(U)} \leq \mathcal{M}_1 \theta_k + \mathcal{M}_2 \int_{t_0}^t \|\partial_x \tilde{v}_k - \partial_x \tilde{v}_{k-1}\|_{C(U)} d\tau, \quad (38)$$

где $\mathcal{M}_1 = (M_1 + M_2 \theta_k) |I_t|$ и $\mathcal{M}_2 = M_3 \theta_k + M_4$.

Пусть $\beta = 2 \max \{ \|\partial_x \tilde{v}_1(x, t)\|_{C(U)}, \|\partial_x \tilde{v}_0(x, t)\|_{C(U)} \}$, тогда из (38) имеем

$$\|\partial_x \tilde{v}_{k+1} - \partial_x \tilde{v}_k\|_{C(U)} \leq \beta \frac{(\mathcal{M}_2 |I_t|)^k}{k!} + \mathcal{M}_1 \theta_k \sum_{\rho=0}^{k-1} \frac{(\mathcal{M}_2 |I_t|)^\rho}{\rho!}$$

или

$$\|\partial_x \tilde{v}_{k+1} - \partial_x \tilde{v}_k\|_{C(U)} \leq \beta \frac{(\mathcal{M}_2 |I_t|)^k}{k!} + \mathcal{M}_1 \theta_k \exp(\mathcal{M}_2 |I_t|). \quad (39)$$

Правая часть в (39) представляет собой k -й член сходящегося числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \beta \frac{(\mathcal{M}_2 |I_t|)^k}{k!} + \mathcal{M}_1 \theta_k \exp(\mathcal{M}_2 |I_t|) \right\}. \quad (40)$$

Следовательно, ряд (34), мажорируемый рядом (40), сходится абсолютно и равномерно. Таким образом, последовательность $\{\partial_x \tilde{v}_k(x, t)\}$ сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $\partial_x \tilde{v}(x, t)$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в равенствах (28) получаем, что предельная функция $\partial_x \tilde{v}(x, t)$ удовлетворяет интегральным соотношениям, получаемым в результате дифференцирования по переменной x первого и второго уравнений системы (10). Таким образом доказали, что предельная функция $v(x, t)$ непрерывно дифференцируема по переменной x в области U . Для того чтобы доказать непрерывную дифференцируемость функции $v(x, t)$ по переменной t необходимо продифференцировать первое и второе соотношения системы (28) по переменной t и выполнить аналогичные рассуждения. Итак, доказали существование классического решения задачи (6), (7). Переходя к переменной $u(x, t) = Q(x, t)v(x, t)$, тем самым доказываем существование классического решения задачи (1), (2). Докажем, что это решение является единственным. Предположим, что при сделанных в условиях теоремы предположениях, существует два различных решения задачи (6), (7), начально-краевые условия которых совпадают. Обозначим эти решения $v(x, t)$ и $v^*(x, t)$. Тогда вектор-функция $w(x, t) = v(x, t) - v^*(x, t)$ удовлетворяет начально-краевой задаче

$$\begin{aligned} \text{diag}\{E_d, O_l, E_p\} \partial_t w + \text{diag}\{J(x, t), E_l, O_p\} \partial_x w + \mathcal{C}w &= 0, \\ w(x, t_0) &= 0, \quad w(x_0, t) = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{i,j})_1^n$ и $\mathcal{C}_{i,j} = \int_0^1 \partial_{v_j} g_i(x, t, v^* + \lambda w) d\lambda$. В [10] с помощью интеграла энергии доказано, что смешанная задача (41) имеет только нулевое решение $w(x, t) \equiv 0$. Следовательно, задача (6), (7) и вместе с ней задача (1), (2) при сделанных в теореме предположениях имеют только единственное решение. Единственность нулевого решения смешанной задачи (41) также следует из полученной выше оценки решения (5), так как для линейной системы из (41) с нулевой правой частью и нулевыми начально-краевыми условиями постоянные величины γ , δ и M равны нулю. $\square$

Если в системе (1) матричный пучок $P(\lambda, x, t)$ изначально имеет каноническую форму (4), то, очевидно, что для существования классического решения смешанной задачи для такой системы, нет необходимости требовать выполнения условий теоремы 1. Матричные коэффициенты $A(x, t)$ и $B(x, t)$ в этом случае должны принадлежать пространству $C^1(U)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соболев С.Л. *Об одной новой задаче математической физики*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **18** (1), 3–50 (1954).
- [2] Демиденко Г.А., Успенский С.В. *Уравнения и системы не разрешенные относительно старшей производной* (Научн. кн., Новосибирск, 1998).
- [3] Рушинский В.М. *Пространственные линейные и нелинейные модели котлогенераторов*, Вопр. идентификации и моделир., 8–15 (1968).
- [4] Selva Soto M., Tischendorf C. *Numerical analysis of DAEs from coupled circuit and semiconductor simulation*, Appl. Numer. Math. **53** (2-4), 471–488 (2005).
- [5] Lucht W. *Partial differential-algebraic systems of second order with symmetric convection*, Appl. Numer. Math. **53** (2-4), 357–371 (2005).
- [6] Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики*. Т.2 (ГТТИ, М.-Л., 1933).
- [7] Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях с частными производными* (Гос. изд. техн.-теоретич. лит., Л., 1950).
- [8] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике* (Наука, М., 1978).
- [9] Гайдомак С.В. *О канонической структуре пучка вырожденных матриц-функций*, Изв. вузов. Матем. №2, 23–33 (2012).
- [10] Гайдомак С.В. *Трёхслойный разностный метод решения линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **49** (9), 1–15 (2009).

Светлана Валерьевна Свинина

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова

Сибирского отделения Российской академии наук,

ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,

e-mail: svinina@icc.ru

Андрей Кириллович Свинин

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова

Сибирского отделения Российской академии наук,

ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,

e-mail: svinin@icc.ru

S.V. Svinina and A.K. Svinin

On an initial-boundary value problem for a semilinear differential-algebraic system of partial differential equations of index $(1,0)$

Abstract. We consider a mixed problem for some semilinear differential-algebraic system of partial differential equations of index $(1,0)$ of the first order with a two-dimensional rectangular domain of definition. Using the method of characteristics and the method of successive approximations, the theorem of the existence and uniqueness of the classical solution of a mixed problem in the entire domain of definition is proved. It is shown that the solution and its first derivatives remain bounded in this region.

Keywords: differential-algebraic system, index of system, matrix pencil, method of characteristics

Svetlana Valeryevna Svinina

*Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,*

e-mail: svinina@icc.ru

Andrey Kirillovich Svinin

*Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,*

e-mail: svinin@icc.ru