Общероссийский математический портал

М. П. Шушпанов, О конечности 3-порожденной решетки с левомодулярным и разделяющим элементами среди порождающих, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 5, 92–94

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-5-92-94>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:29:46

Краткое сообщение, представленное Л.Н. Шевриным

М.П. ШУШПАНОВ

О КОНЕЧНОСТИ 3-ПОРОЖДЕННОЙ РЕШЕТКИ С ЛЕВОМОДУЛЯРНЫМ И РАЗДЕЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТАМИ СРЕДИ ПОРОЖДАЮЩИХ

Аннотация. Доказано, что 3-порожденная решетка с левомодулярным и разделяющим порождающими содержит не более сорока семи элементов, указанная оценка точная.

Ключевые слова: решетка, левомодулярный элемент, разделяющий элемент, определяющее соотношение.

УДК: 512.565

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-5-92-94

Одним из продуктивных методов исследования решеток явилось рассмотрение в них элементов, обладающих свойствами, “локализуемыми” понятие модулярности. Такая локализация осуществляется по единой схеме: в квазитождестве, выражающем закон модулярности, квантор всеобщности применяется только к двум элементам из трех, и оставшийся свободным третий элемент, для которого оказывается истинным сконструированное таким образом высказывание, и получает соответствующее название.

Определение 1 ([1]). Элемент a решетки L называется *левомодулярным*, если

$$\forall x, y \in L : x \leq y \rightarrow x \vee (a \wedge y) = (x \vee a) \wedge y.$$

Применение квантора всеобщности к другим двум парам элементов в квазитождестве модулярности дает понятия правомодулярного и коправомодулярного элементов. Не будем на этом останавливаться, поскольку в данной работе элементы с этими свойствами не рассматриваются.

Определение 2 ([1]). Элемент a решетки L называется *разделяющим*, если

$$\forall x, y \in L : (a \wedge x = a \wedge y) \& (a \vee x = a \vee y) \rightarrow x = y.$$

В [2] отмечено, что левомодулярность элемента a решетки L эквивалентна условию

$$\forall x, y \in L : (x \leq y) \& (a \wedge x = a \wedge y) \& (a \vee x = a \vee y) \rightarrow x = y.$$

В силу этого каждый разделяющий элемент левомодулярен.

Поступила в редакцию 24.10.2018, после доработки 24.10.2018. Принята к публикации 19.12.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках проекта повышения конкурентоспособности (Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.А03.21.0006).

Рис. 1.

В [3] показано, что 3-порожденная решетка, все три порождающих элемента которой левомодулярны, модулярна и, следовательно, конечна. Из результатов [4] следует, что 3-порожденная решетка, у которой только два порождающих элемента левомодулярны, может уже не быть конечной (и, тем более, модулярной). В связи с этим естественны вопросы, какие комбинации свойств левомодулярности, правомодулярности и коправомодулярности порождающих элементов обеспечивают ее конечность. Решению этих вопросов посвящены работы [5]–[7]. В данной работе (в отличие от [4]) свойство левомодулярности для одного из порождающих элементов заменено на более сильное свойство “быть разделяющим”.

Пусть L — решетка с элементами a , b и c . Для краткости записей будем использовать следующие обозначения ее элементов:

$$t = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a); \quad s = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a);$$

$$a_1 = (a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c); \quad b_1 = (b \vee (c \wedge a)) \wedge (c \vee a);$$

$$c_1 = (c \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee b); \quad c_2 = (c \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge b);$$

$$a_2 = (a \vee c_2) \wedge c_1; \quad b_2 = (b \vee c_2) \wedge c_1.$$

Теорема. Решетка, представленная на рис. 1, порождена элементами a , b и c , причем a левомодулярен, а b разделяющий. Любая решетка, порожденная тремя элементами, один из которых левомодулярен, а другой разделяющий, является гомоморфным образом решетки, изображенной на рис. 1.

Для доказательства прямого утверждения необходимо проверить, что в изображенной решетке элемент a левомодулярен, а элемент b разделяющий. Ввиду наличия в изображенной решетке симметрии относительно элементов a и b достаточно проверить, что элемент a разделяющий, т. е. проверить импликацию

$$\forall x, y \in L : (a \wedge x = a \wedge y) \& (a \vee x = a \vee y) \rightarrow x = y.$$

Не равных между собой элементов, удовлетворяющих посылке утверждения, в решетке, изображенной на рис. 1, нет, поэтому элемент a разделяющий.

Доказательство обратного утверждения теоремы проводится тем же методом, что и доказательства аналогичных утверждений в [5]–[7]: найдена система из двадцати четырех определяющих соотношений для порождающих элементов a , b и c , которые задают решетку, изображенную на рис. 1. Далее показывается, что каждое из этих соотношений выполнено, если элемент a левомодулярен, а элемент b разделяющий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Stern M. *Semimodular lattices. Theory and applications* (Cambridge Univ. Press, 1999).
- [2] Bhatta S.P. *A characterization of neutral elements by the exclusion of sublattices*, Discr. Math. **309** (6), 1691–1702 (2009).
- [3] Шушпанов М.П. *Решетки, порожденные модулярными элементами*, Изв. вузов. Матем., № 12, 84–86 (2015).
- [4] Gein A.G., Shushpanov M.P. *Free 3-generated lattices with two semi-normal generators*, Order **35** (2), 247–252 (2018).
- [5] Гейн А.Г., Шушпанов М.П. *Достаточные условия модулярности решетки с порождающими элементами, обладающими свойствами типа модулярности*, Сиб. матем. журн. **56** (4), 798–804 (2015).
- [6] Shushpanov M.P. *On 3-generated lattices with a completely modular element among generators*, Algebra Univ. **78** (3), 377–387 (2017).
- [7] Шушпанов М.П. *Конечность 3-порожденной решетки с полунормальным и кополунормальным элементами среди порождающих*, Алгебра и логика **57** (3), 362–376 (2018).

Михаил Павлович Шушпанов

Уральский федеральный университет,
пр. Ленина, д. 51, г. Екатеринбург, 620000, Россия,
e-mail: Mikhail.Shushpanov@gmail.com

M.P. Shushpanov

On finiteness of 3-generated lattice with left modular and separating elements among generators

Abstract. We prove that a 3-generated lattice with modular and separating generators contains at most forty seven elements. This estimate is stated to be sharp.

Keywords: lattice, left modular element, separating element, defining relation.

Mikhail Pavlovich Shushpanov

Ural Federal University,
51 Lenina Ave., Ekaterinburg, 620000 Russia,
e-mail: Mikhail.Shushpanov@gmail.com