Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Авсянкин, Об обратимости операторов типа свертки в пространствах Морри,
Изв. вузов. Матем., 2019, номер 6, 3–10

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-3-10>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:54:02

О.Г. АВСЯНКИН

ОБ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ТИПА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

Аннотация. Рассматриваются интегральные операторы свертки в пространствах Морри. Для таких операторов получены необходимые и достаточные условия обратимости. Также исследована банахова алгебра, порожденная всеми операторами свертки с суммируемыми ядрами и тождественным оператором. Для этой алгебры построено символическое исчисление, в терминах которого получен критерий обратимости операторов.

Ключевые слова: пространство Морри, оператор свертки, символ, обратимость, банахова алгебра.

УДК: 517.968

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-3-10

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия появилось немало работ, посвященных пространствам типа Морри и операторам, действующим в этих пространствах (например, обзорные статьи В.И. Буренкова [1], [2] и цитированные в них источники). Исследования этих пространств восходят к работе Ч. Морри [3] и активно продолжаются в наши дни. При этом большой интерес был проявлен к изучению в пространствах типа Морри классических интегральных операторов, таких как максимальный оператор, оператор Харди, потенциал Рисса, сингулярный интегральный оператор ([2]). Однако другой важный класс операторов — интегральные операторы свертки — в пространствах Морри изучен мало. В этой связи в первую очередь следует упомянуть работы [4] и [5], в которых были рассмотрены операторы свертки в обобщенных пространствах типа Морри и установлен аналог неравенства Юнга для сверток в этих пространствах. В статье [6] была исследована компактность в пространстве Морри произведений операторов свертки и операторов умножения на существенно ограниченные функции.

Данная работа продолжает изучение операторов свертки в пространствах Морри и посвящена вопросу обратимости операторов свертки в этих пространствах. Подчеркнем, что в пространствах Морри нет “хороших” плотных множеств (как множество всех бесконечно дифференцируемых финитных функций), что не позволяет применять некоторые стандартные приемы, используемые в случае L_p -пространств. Чтобы обойти эту трудность, используется алгебраический подход, позволивший получить необходимые и достаточные условия

Поступила в редакцию 04.05.2018, после доработки 11.09.2018. Принята к публикации 19.12.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 18-01-00094-А и № 18-51-06005-Аз_а.

обратимости оператора, являющегося суммой тождественного оператора и оператора свертки. В заключительной части работы исследована банахова алгебра, порожденная всеми операторами свертки с суммируемыми ядрами и тождественным оператором. Следуя схеме статьи [7], для этой алгебры построено символическое исчисление, в терминах которого получен критерий обратимости операторов.

Ниже использованы следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, $\dot{\mathbb{R}}^n$ — компактификация $\mathbb{R}^n$ одной бесконечно удаленной точкой; $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi \cdot x} dx$ — преобразование Фурье функции f .

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — измеримое множество. Тогда $L_p(X)$ — пространство (классов) измеримых комплекснозначных функций с нормой

$$\|f\|_{L_p(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty; \quad \|f\|_{L_\infty(X)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|.$$

В случае $X = \mathbb{R}^n$ будем использовать обозначение $\|\cdot\|_p$ вместо $\|\cdot\|_{L_p(X)}$. Далее, будем говорить, что $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_p(K)$ для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \equiv \|f\|_{p,\lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\|f\|_{L_p(\mathbb{B}(x,r))}}{r^\lambda} < \infty, \quad (1)$$

где $\mathbb{B}(x, r)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x .

Относительно обычных линейных операций и нормы, определяемой формулой (1), множество $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ образует банахово пространство, которое называют пространством Морри.

Пространства Морри $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ являются нетривиальными, т. е. состоят не только из функций, эквивалентных нулю на $\mathbb{R}^n$, тогда и только тогда, когда $0 \leq \lambda \leq n/p$. При $\lambda = 0$ и $\lambda = n/p$ пространства Морри совпадают с L_p -пространствами, а именно:

$$L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n), \quad L_{p,n/p}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2)$$

В пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим оператор свертки

$$(H\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Сверткам в пространствах типа Морри посвящены работы [4], [5], где, в частности, было получено

Предложение ([4]). Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \lambda \leq n/p$ и $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда оператор H ограничен в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, причем для любой функции $\varphi \in L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$\|H\varphi\|_{p,\lambda} \leq \|h\|_1 \|\varphi\|_{p,\lambda}. \quad (4)$$

Так как вопросы обратимости операторов свертки в L_p -пространствах хорошо изучены (например, [8], [9]), то, учитывая равенства (2), в дальнейшем исключаем из рассмотрения случаи $\lambda = 0$ и $\lambda = n/p$.

Обозначим через $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$ множество всех ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$. Так как пространство $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ является банаховым,

то множество $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$ относительно стандартной операторной нормы, обычных операций сложения, умножения и умножения на комплексные числа образует банахову алгебру. В дальнейшем будем писать $\|\cdot\|$ вместо $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))}$. Из неравенства (4) следует $\|cI + H\| \leq |c| + \|h\|_1$.

2. КРИТЕРИЙ ОБРАТИМОСТИ

Пусть $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < n/p$. Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ множество, состоящее из всех операторов вида $cI + H$, где $c \in \mathbb{C}$, I — тождественный оператор, а H — оператор вида (3). Заметим, что операция умножения замкнута на множестве $\mathfrak{A}_0$, причем произведением операторов свертки H_1 и H_2 вида (3) является оператор свертки H с ядром $h = h_1 * h_2$. Легко проверить, что относительно обычных операций умножения, сложения, умножения операторов на комплексные числа и нормы, определяемой равенством

$$\|cI + H\|_{\mathfrak{A}_0} = |c| + \|h\|_1, \quad (5)$$

множество $\mathfrak{A}_0$ образует банахову алгебру. Эта алгебра коммутативна, поскольку $h_1 * h_2 = h_2 * h_1$ для любых $h_1, h_2 \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Далее, обозначим через $\mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ расширенное винеровское кольцо, т.е. множество всех функций вида $c + \widehat{f}(\xi)$, где $c \in \mathbb{C}$, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Известно, что это множество, снабженное поточечными алгебраическими операциями и нормой

$$\|c + \widehat{f}\|_{\mathcal{W}} = |c| + \|f\|_1, \quad (6)$$

является коммутативной банаховой алгеброй.

Лемма 1. *Отображение*

$$\mathcal{F} : \mathfrak{A}_0 \rightarrow \mathcal{W}(\mathbb{R}^n), \quad cI + H \rightarrow c + \widehat{h}(\xi)$$

является изометрическим изоморфизмом.

Доказательство. Очевидно, отображение $\mathcal{F}$ является биективным и линейным. Так как справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((c_1I + H_1)(c_2I + H_2)) &= c_1c_2 + c_1\widehat{h}_2(\xi) + c_2\widehat{h}_1(\xi) + \widehat{h_1 * h_2}(\xi) = \\ &= (c_1 + \widehat{h}_1(\xi))(c_2 + \widehat{h}_2(\xi)) = \mathcal{F}(c_1I + H_1) \mathcal{F}(c_2I + H_2), \end{aligned}$$

то $\mathcal{F}$ является изоморфизмом. Наконец, в силу (5) и (6) отображение $\mathcal{F}$ изометрично. $\square$

Функцию $c + \widehat{h}(\xi)$ будем называть символом оператора $cI + H$.

Обозначим через $\mathcal{M}(\mathfrak{A}_0)$ и $\mathcal{M}(\mathcal{W}(\mathbb{R}^n))$ пространства максимальных идеалов банаховых алгебр $\mathfrak{A}_0$ и $\mathcal{W}(\mathbb{R}^n)$ соответственно. Так как эти алгебры изометрически изоморфны, то пространства $\mathcal{M}(\mathfrak{A}_0)$ и $\mathcal{M}(\mathcal{W}(\mathbb{R}^n))$ гомеоморфны. Известно ([10], с. 20), что пространство $\mathcal{M}(\mathcal{W}(\mathbb{R}^n))$ гомеоморфно компакту $\dot{\mathbb{R}}^n$. Следовательно, пространство $\mathcal{M}(\mathfrak{A}_0)$ также гомеоморфно компакту $\dot{\mathbb{R}}^n$. При этом каждой точке $\xi_0 \in \dot{\mathbb{R}}^n$ соответствует максимальный идеал, состоящий из всех операторов $cI + H$ таких, что $c + \widehat{h}(\xi_0) = 0$. Это позволяет сразу получить критерий обратимости оператора $cI + H$ в алгебре $\mathfrak{A}_0$.

Лемма 2. *Для того чтобы оператор $cI + H$ был обратим в алгебре $\mathfrak{A}_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$c + \widehat{h}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}^n. \quad (7)$$

Доказательство. Условие (7) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор $cI + H$ не принадлежал ни одному максимальному идеалу алгебры $\mathfrak{A}_0$, а это равносильно его обратимости в алгебре $\mathfrak{A}_0$. $\square$

Из леммы 2 следует, что условие (7) является достаточным для обратимости оператора $cI + H$ в алгебре $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$. Доказать необходимость значительно сложнее, поскольку из обратимости оператора $cI + H$ в $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, вообще говоря, не следует $(cI + H)^{-1} \in \mathfrak{A}_0$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, содержащую все операторы $cI + H$, где $c \in \mathbb{C}$, H — оператор вида (3). Эта алгебра представляет собой замыкание в равномерной операторной топологии множества $\mathfrak{A}_0$. Заметим, что алгебра $\mathfrak{A}$ коммутативна. Действительно, операторы из $\mathfrak{A}_0$ коммутируют между собой. Для произвольных операторов из алгебры $\mathfrak{A}$ коммутативность проверяется с помощью приближения операторами из множества $\mathfrak{A}_0$.

Лемма 3. Пусть H — оператор вида (3). Если оператор $cI + H$ обратим в $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, то оператор $(cI + H)^{-1}$ принадлежит алгебре $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Предположим, что оператор $cI + H$ не имеет обратного в алгебре $\mathfrak{A}$. Рассмотрим оператор $\bar{c}I + \tilde{H}$, где

$$(\tilde{H}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{h(y-x)}\varphi(y)dy \quad (8)$$

(здесь черта означает комплексное сопряжение). Заметим, что символом оператора $\bar{c}I + \tilde{H}$ является функция

$$\bar{c} + \widehat{(\overline{h(-x)})}(\xi) = \overline{c + \widehat{h}(\xi)}.$$

Так как оператор $cI + H$ не обратим в алгебре $\mathfrak{A}$, то оператор $B = (cI + H)(\bar{c}I + \tilde{H})$ также не обратим в $\mathfrak{A}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим оператор $B_\varepsilon = \varepsilon I + B$, символом которого является функция

$$\sigma_\varepsilon(\xi) = \varepsilon + (c + \widehat{h}(\xi))\overline{(c + \widehat{h}(\xi))} = \varepsilon + |c + \widehat{h}(\xi)|^2.$$

Ясно, что $\sigma_\varepsilon(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда по лемме 2 оператор B_ε обратим в алгебре $\mathfrak{A}_0$, а значит, и в алгебре $\mathfrak{A}$.

Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Положим $B_{\varepsilon_k} = \varepsilon_k I + B$. Так как $\|B_{\varepsilon_k} - B\| = \varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, операторы B_{ε_k} обратимы, а оператор B не обратим в алгебре $\mathfrak{A}$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|B_{\varepsilon_k}^{-1}\| = +\infty \quad (9)$$

(например, [11], с. 123). Положив $D_{\varepsilon_k} = B_{\varepsilon_k}^{-1}/\|B_{\varepsilon_k}^{-1}\|$, имеем $\|D_{\varepsilon_k}\| = 1$. Поскольку $D_{\varepsilon_k} \in \mathfrak{A}_0$ и $\bar{c}I + \tilde{H}$ — ненулевой оператор, то

$$\inf_k \|(\bar{c}I + \tilde{H})D_{\varepsilon_k}\| > 0. \quad (10)$$

С другой стороны, учитывая, что существует оператор $(cI + H)^{-1}$, запишем

$$\begin{aligned} \|(\bar{c}I + \tilde{H})D_{\varepsilon_k}\| &= \|(cI + H)^{-1}(cI + H)(\bar{c}I + \tilde{H})D_{\varepsilon_k}\| \leq \\ &\leq \|(cI + H)^{-1}\| \|(cI + H)(\bar{c}I + \tilde{H})D_{\varepsilon_k}\| = \|(cI + H)^{-1}\| \|(B_{\varepsilon_k} - \varepsilon_k I)D_{\varepsilon_k}\| \leq \\ &\leq \|(cI + H)^{-1}\| (\|B_{\varepsilon_k} D_{\varepsilon_k}\| + \varepsilon_k) = \|(cI + H)^{-1}\| (\|B_{\varepsilon_k}^{-1}\|^{-1} + \varepsilon_k). \end{aligned}$$

Тогда в силу (9) $\|(\bar{c}I + \tilde{H})D_{\varepsilon_k}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, что противоречит неравенству (10). $\square$

Теорема 1. Пусть H — оператор вида (3). Для того чтобы оператор $cI + H$ был обратим в $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (7).

Доказательство. Пусть оператор $cI + H$ обратим в $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$. Тогда в силу леммы 2 $(cI + H)^{-1} \in \mathfrak{A}$. Покажем, что $(cI + H)^{-1} \in \mathfrak{A}_0$. Предположим, что оператор $cI + H$ не имеет обратного в алгебре $\mathfrak{A}_0$. Следовательно, он принадлежит некоторому максимальному идеалу $\mathcal{M}$ алгебры $\mathfrak{A}_0$. Обозначим через $\overline{\mathcal{M}}$ замыкание идеала $\mathcal{M}$ по операторной норме. Так как алгебра $\mathfrak{A}_0$ плотно вложена в $\mathfrak{A}$, то $\overline{\mathcal{M}}$ является идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Нетрудно видеть, что $\overline{\mathcal{M}} \neq \mathfrak{A}$. Так как $cI + H \in \overline{\mathcal{M}}$, то оператор $cI + H$ не может быть обратимым в алгебре $\mathfrak{A}$. Полученное противоречие доказывает, что $(cI + H)^{-1} \in \mathfrak{A}_0$.

Таким образом, оператор $cI + H$ обратим в $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$ тогда и только тогда, когда он обратим в алгебре $\mathfrak{A}_0$, что в силу леммы 2 равносильно условию (7). $\square$

3. АЛГЕБРА ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ

Распространим понятие символа на всю алгебру $\mathfrak{A}$. Для этого потребуется

Лемма 4. Если функция $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ является ядром оператора H вида (3), то

$$\|c + \widehat{h}\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq \|cI + H\|. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \|c + \widehat{h}\|_{C(\mathbb{R}^n)}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, что $|c + \widehat{h}(\xi_0)| > \alpha - \varepsilon$. Рассмотрим оператор $cI + H - (c + \widehat{h}(\xi_0))I$, символом которого является функция $\widehat{h}(\xi) - \widehat{h}(\xi_0)$. Поскольку эта функция обращается в нуль в точке ξ_0 , то в силу теоремы 1 оператор $cI + H - (c + \widehat{h}(\xi_0))I$ не обратим. Следовательно, число $c + \widehat{h}(\xi_0)$ принадлежит спектру оператора $cI + H$. Тогда

$$\alpha - \varepsilon < |c + \widehat{h}(\xi_0)| \leq r(cI + H),$$

где $r(cI + H)$ — спектральный радиус оператора $cI + H$. В силу произвольности ε заключаем, что $\alpha \leq r(cI + H)$. Учитывая $r(cI + H) \leq \|cI + H\|$, получаем неравенство (11). $\square$

Определим понятие символа для произвольного оператора из алгебры $\mathfrak{A}$. Для операторов из множества $\mathfrak{A}_0$ это сделано выше. Пусть $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_0$. Тогда найдется такая последовательность $\{c_s I + H_s\}_{s=1}^{\infty}$, что $\|A - (c_s I + H_s)\| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. В силу неравенства (11) последовательность $\{c_s + \widehat{h}_s(\xi)\}_{s=1}^{\infty}$ символов операторов $c_s I + H_s$ сходится по $\sup$ -норме к некоторой функции $\sigma_A(\xi) \in C(\mathbb{R}^n)$, которую будем называть *символом* оператора A . Оценка (11) распространяется по непрерывности на всю алгебру $\mathfrak{A}$, т. е. для любого оператора $A \in \mathfrak{A}$ справедливо неравенство $\|\sigma_A\|_{C(\mathbb{R}^n)} \leq \|A\|$.

Теорема 2. Пространство максимальных идеалов $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$, снабженное топологией Гельфанда, гомеоморфно компакту $\mathbb{R}^n$. При соответствующем отождествлении пространств $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ и $\mathbb{R}^n$ преобразование Гельфанда оператора $A \in \mathfrak{A}$ совпадает с его символом $\sigma_A(\xi)$.

Доказательство. Разобьем доказательство на три этапа.

1) Пусть ξ_0 — произвольная точка компакта $\mathbb{R}^n$. Покажем, что множество $\mathcal{M}_{\xi_0}$ всех операторов из алгебры $\mathfrak{A}$, символы которых обращаются в нуль в точке ξ_0 , является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Для этого определим на $\mathfrak{A}$ функционал f_{ξ_0} равенством $f_{\xi_0}(A) = \sigma_A(\xi_0)$. Нетрудно видеть, что f_{ξ_0} является характером алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда его ядро

$$\text{Ker } f_{\xi_0} = \{A \in \mathfrak{A} : \sigma_A(\xi_0) = 0\} = \mathcal{M}_{\xi_0}$$

является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}$.

2) Докажем, что максимальными идеалами указанного типа исчерпываются все максимальные идеалы алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}$ и $f_{\mathcal{M}}$ — соответствующий ему характер.

Вначале покажем, что существует такая точка $\xi_0 \in \dot{\mathbb{R}}^n$, что для любого оператора $cI + H \in \mathcal{M}$ справедливо равенство

$$0 = f_{\mathcal{M}}(cI + H) = \sigma_{cI+H}(\xi_0).$$

Предположим, что это не так, т.е. для любой точки $\xi_0 \in \dot{\mathbb{R}}^n$ найдется такой оператор $c_0I + H_0 \in \mathcal{M}$, что

$$0 = f_{\mathcal{M}}(c_0I + H_0) \neq \sigma_{c_0I+H_0}(\xi_0).$$

Рассмотрим окрестность U_{ξ_0} точки ξ_0 такую, что $|\sigma_{c_0I+H_0}(\xi)| > 0$ для всех $\xi \in U_{\xi_0}$. Множество $\{U_{\xi}\}$ всех таких окрестностей образует открытое покрытие компакта $\dot{\mathbb{R}}^n$. Выберем из него конечное подпокрытие $\{U_{\xi_j}\}_{j=1}^N$. При этом для каждого значения $j = 1, 2, \dots, N$ имеется такой оператор $c_jI + H_j \in \mathcal{M}$, что

$$\sigma_{c_jI+H_j}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in U_{\xi_j}.$$

Рассмотрим оператор

$$B = \sum_{j=1}^N (c_jI + H_j)(\bar{c}_jI + \tilde{H}_j),$$

где $\tilde{H}_j$ — оператор вида (8). Символом оператора B является функция

$$\sigma_B(\xi) = \sum_{j=1}^N |c_j + \hat{h}_j(\xi)|^2.$$

Очевидно, $\sigma_B(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}}^n$. Так как $B \in \mathfrak{A}_0$, то по лемме 2 оператор B обратим в $\mathfrak{A}_0$ и тем более обратим в алгебре $\mathfrak{A}$. Это противоречит включению $B \in \mathcal{M}$.

Для произвольного оператора $cI + H$ справедливо

$$f_{\mathcal{M}}(cI + H) = \sigma_{cI+H}(\xi_0), \tag{12}$$

где ξ_0 — точка, определенная выше. Действительно, положим $f_{\mathcal{M}}(cI + H) = z_0$, где $z_0 \in \mathbb{C}$, и рассмотрим оператор $B = cI + H - z_0I$. Поскольку $f_{\mathcal{M}}(B) = 0$, то $B \in \mathcal{M}$. Тогда по доказанному выше $\sigma_{cI+H}(\xi_0) - z_0 = 0$, т.е. имеет место равенство (12).

Таким образом, доказано существование точки $\xi_0 \in \dot{\mathbb{R}}^n$ такой, что для любого оператора $cI + H$ выполнено равенство (12). Поскольку множество $\mathfrak{A}_0$ плотно в алгебре $\mathfrak{A}$, то для любого оператора $A \in \mathfrak{A}$ справедливо равенство

$$f_{\mathcal{M}}(A) = \sigma_A(\xi_0). \tag{13}$$

Отсюда $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\xi_0}$.

3) Выше показано, что отображение

$$\pi : \mathcal{M}(\mathfrak{A}) \rightarrow \dot{\mathbb{R}}^n, \quad \mathcal{M}_{\xi} \rightarrow \xi,$$

является биективным. Учитывая определение топологии Гельфанда (например, [10], с. 36), заключаем, что это отображение является гомеоморфизмом.

Далее, преобразование Гельфанда оператора A — это функция $\hat{A}$, определяемая на пространстве $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ равенством $\hat{A}(\mathcal{M}_{\xi}) = f_{\mathcal{M}_{\xi}}(A)$, где $f_{\mathcal{M}_{\xi}}$ — характер, соответствующий максимальному идеалу $\mathcal{M}_{\xi}$. Отождествляя пространства $\mathcal{M}(\mathfrak{A})$, $\dot{\mathbb{R}}^n$ и используя (13), получаем $\hat{A}(\xi) \equiv \sigma_A(\xi)$. $\square$

Теорема 3. Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Для того чтобы оператор A был обратим в алгебре $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sigma_A(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (14)$$

Доказательство. Если оператор $A \in \mathfrak{A}$ обратим в алгебре $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$, то $A^{-1} \in \mathfrak{A}$. Действительно, для оператора $A = cI + H$ это установлено в лемме 3. Если $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_0$, то найдется последовательность обратимых операторов $\{c_s I + H_s\}$, сходящаяся к A по операторной норме. Тогда $\|A^{-1} - (c_s I + H_s)^{-1}\| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Так как $(c_s I + H_s)^{-1} \in \mathfrak{A}$, то $A^{-1} \in \mathfrak{A}$. Таким образом, оператор $A \in \mathfrak{A}$ обратим в $\mathcal{L}(L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n))$ тогда и только тогда, когда он обратим в алгебре $\mathfrak{A}$. В силу теоремы 2 обратимость оператора A в алгебре $\mathfrak{A}$ эквивалентна условию (14). $\square$

В заключение отметим, что для операторов свертки в L_p -пространствах основные результаты данной работы известны ([8]). При этом подчеркнем, что наш метод исследования отличается от методов статьи [8], что связано со спецификой пространств Морри.

Автор выражает глубокую признательность профессору В.И. Буренкову за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Burenkov V.I. *Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces*. I, Eurasian Math. J. **3** (3), 11–32 (2012).
- [2] Burenkov V.I. *Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces*. II, Eurasian Math. J. **4** (1), 21–45 (2013).
- [3] Morrey C.B. *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126–166 (1938).
- [4] Буренков В.И., Тарарыкова Т.В. *Аналог неравенства Юнга для сверток функций для общих пространств типа Морри*, в сб. “Функциональные пространства, теория приближ., смежные вопр. анализа” к 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского. Тр. МИАН **293**, 113–132 (М., 2016).
- [5] Burenkov V.I., Tararykova T.V. *Young’s inequality for convolutions in Morrey-type spaces*, Eurasian Math. J. **7** (2), 92–99 (2016).
- [6] Авсянкин О.Г. *О компактности операторов типа свертки в пространствах Морри*, Матем. заметки **102** (4), 483–489 (2017).
- [7] Авсянкин О.Г. *Об интегральных операторах типа Вольтерра с однородными ядрами в весовых L_p -пространствах*, Изв. вузов. Матем., № 11, 3–12 (2017).
- [8] Симоненко И.Б. *Операторы типа свертки в конусах*, Матем. сб. **74** (2), 298–314 (1967).
- [9] Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения* (Наука, М., 1971).
- [10] Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилев Г.Е. *Коммутативные нормированные кольца* (Физматгиз, М., 1960).
- [11] Шилев Г.Е. *Математический анализ (функции одного переменного)*. Ч. 3 (Наука, М., 1970).

Олег Геннадиевич Авсянкин

Южный федеральный университет,

ул. Милычакова, д. 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, Россия,

e-mail: avsyanki@math.rsu.ru

*O.G. Avsyankin***On invertibility of convolution type operators in Morrey spaces**

Abstract. We consider integral convolution operators in the Morrey spaces. For these operators we obtain the necessary and sufficient conditions of their invertibility. Moreover, we study the Banach algebra generated by all convolution operators with summable kernels and identity operator. For this algebra we construct the symbolic calculus, in terms of which we obtain the invertibility criterion of convolution operators.

Keywords: Morrey space, convolution operator, symbol, invertibility, Banach algebra.

Oleg Gennadievich Avsyankin

Southern Federal University,

8a Mi'chakova str., Rostov-on-Don, 344090 Russia,

e-mail: avsyanki@math.rsu.ru