Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. З. Джамалов, Р. Р. Ашуров, Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 6, 11–22

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-11-22>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:20:52

С.З. ДЖАМАЛОВ, Р.Р. АШУРОВ

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ПЕРВОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка. Для этой задачи методами “ ε -регуляризации”, априорных оценок и последовательных приближений доказаны теоремы существования и единственности решения в определенном классе функций.

Ключевые слова: многомерное уравнение смешанного типа первого рода второго порядка, линейная обратная задача, корректность решения, методы “ ε -регуляризации”, априорная оценка и последовательное приближение.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-11-22

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе А.В. Бицадзе [1] показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения С.А. Чаплыгина были предложены в работе Ф.И. Франкля при изучении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [2]. Близкие по постановке задачи для уравнения смешанного типа первого рода имеются в работах [3]–[5]. В этих работах для уравнения смешанного типа первого рода изучены задачи по однозначной разрешимости и гладкости решения некоторых прямых нелокальных краевых задач периодического типа.

Нелокальными принято называть такие задачи, в которых задаются соотношения, связывающие значение искомого решения и, возможно, его производных в граничных и внутренних точках области. В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными условиями и обратных задач.

Обратными задачами в теории уравнений с частными производными принято называть такие задачи, в которых вместе с решением дифференциального уравнения требуется определить также тот или иной коэффициент(ы) самого уравнения либо правую часть (внешнее воздействие), либо и коэффициент(ы), и правую часть. Отметим, что интерес к исследованию обратных задач для уравнений математической физики обусловлен важностью их

Поступила в редакцию 10.05.2018, после доработки 10.05.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ОТ-ФА-88 и с научным грантом MRU-ОТ-1/2017.

приложений в различных разделах механики, сейсмологии, медицинской томографии и геофизики [6]–[8]. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов. Более полный список работ, посвященных данной тематике, можно найти в работах [6]–[9]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для неклассических уравнений математической физики, в частности, для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода.

В работах К.Б. Сабитова и его учеников [10], [11] впервые методами спектрального анализа изучены обратные задачи с локальными и нелокальными условиями для уравнений смешанного типа по определению правой части в плоскости. В этих работах установлен критерий единственности решения, а также доказаны теоремы существования и устойчивости решения. Далее в работах [12], [13] в трехмерном пространстве для уравнения смешанного типа как первого, так и второго рода второго порядка изучены некоторые линейные обратные задачи с нелокальными краевыми условиями. В этих работах методами функционального анализа доказаны теоремы однозначной разрешимости некоторых обратных задач по определению правой части в определенных классах.

В данной работе для исследования разрешимости обратных задач для многомерного уравнения смешанного типа первого рода предлагается метод, который основан на сведении обратной задачи к прямым нелокальным краевым задачам для бесконечных нагруженных систем дифференциальных уравнений смешанного типа. Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах значения тех или иных функционалов от решения уравнения [9], [14].

Доказывается однозначная разрешимость обратной задачи для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка.

Пусть $\Omega = \prod_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i)$ — n -мерный параллелепипед евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\alpha_1 < 0 < \beta_1$, $0 < \alpha_i < \beta_i < +\infty$, $i = 2, 3, \dots, n$. Обозначим через $Q = \Omega \times (0, T) \times (0, 1) = Q_1 \times (0, 1) = \{(x, t, y); x \in \Omega, 0 < t < T < +\infty, 0 < y < 1\}$ область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \partial Q_1 \times [0, 1]$, $\partial Q_1 = \partial \Omega \times [0, T]$.

В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu \equiv K(x)u_{tt} - (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} - a(x, t)u_{yy} + \alpha(x, t)u_t + c(x, t)u = \psi(x, t, y). \quad (1)$$

Здесь $x_1 \cdot K(x) > 0$ при $x_1 \neq 0$, где $x_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$. Всюду в работе по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n и будем считать, что все функции, встречающиеся в статье, вещественнозначные и достаточно гладкие.

Пусть $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ и для любых i, j и k имеют место равенства $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $x \in \Omega$, $a_{ij}(\alpha_k) = a_{ij}(\beta_k)$. Кроме того, пусть для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$ выполнено одно из двух условий:

- (а) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2$, где $a_0 = \text{const} > 0$,
- (б) $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a_1|\xi|^2$, где $a_1 = \text{const} < 0$.

В дальнейшем изучим случай (а); случай (б) изучается аналогично.

Через $W_2^l(Q)$ ($1 \leq l$ — натуральное число) обозначим пространство С.Л. Соболева со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(Q) = L_2(Q)$ — пространство квадратично суммируемых функций.

При получении различных априорных оценок часто используем неравенство Коши с σ :

$$\forall u, v > 0, \forall \sigma > 0 \quad u \cdot v \leq \frac{\sigma u^2}{2} + \frac{v^2}{2\sigma}.$$

Для производных порядка p удобно принять обозначение: $D_z^p u = \frac{\partial^p u}{\partial z^p}$; при этом $D_z^0 u = u$.

В данной работе исследуется нелокальная краевая задача для уравнения (1); при этом неизвестными являются как само решение, так и слагаемое в правой части уравнения. Именно, предположим, что правая часть имеет вид: $\psi(x, t, y) = g(x, t, y) + h(x, t) \cdot f(x, t, y)$, где $g(x, t, y)$ и $f(x, t, y)$ — заданные функции, а функция $h(x, t)$ подлежит определению. При этом для нахождения функции $h(x, t)$ к обычной постановке нелокальной задачи добавляется еще одно условие.

Сформулируем **линейную обратную задачу**.

Найти пару функций $(u(x, t, y), h(x, t))$, удовлетворяющих уравнению (1) в области Q , таких, что функция $u(x, t, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$D_{x_i}^p u|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u|_{x_i=\beta_i}, \quad (3)$$

$$u(x, t, 0) = u(x, t, 1) = 0 \quad (4)$$

при $p = 0, 1$, $\gamma - \text{const} \neq 0$, дополнительному условию

$$u(x, t, \ell_0) = \phi(x, t), \quad 0 < \ell_0 < 1, \quad (5)$$

и вместе с функций $h(x, t)$ принадлежит классу

$$U = \{(u, h) \mid (1 + D_y)u \in W_2^2(Q); h \in W_2^2(Q_1)\}.$$

Пусть коэффициенты уравнения (1) — достаточно гладкие функции и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части и заданной функции $\phi(x, t)$.

Условие 1. Периодичность: $\alpha(x, 0) = \alpha(x, T)$, $c(x, 0) = c(x, T)$, $a(x, 0) = a(x, T)$;

граничное условие: $D_y^p f(x, t, 1) = D_y^p f(x, t, 0) = 0$, $p = 0, 2$;

нелокальное условие: $\gamma g(x, 0, y) = g(x, T, y)$; $\gamma f(x, 0, y) = f(x, T, y)$;

гладкость: $f(x, t, \ell_0) = f_0(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(Q_1)$, $f \in C_{x,t,y}^{0,1,4}(Q)$; $|f_0(x, t)| \geq \eta$, $0 < \eta < 1$;

$g(x, t, \ell_0) = g_0(x, t) \in W_2^1(Q_1)$, $(1 + D_y)g \in W_2^1(Q)$.

Условие 2. $\phi(x, t) \in W_2^3(Q_1)$; $\gamma \cdot D_t^q \phi|_{t=0} = D_t^q \phi|_{t=T}$, $q = 0, 1, 2$; $D_{x_i}^p \phi|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p \phi|_{x_i=\beta_i}$, $p = 0, 1$.

Для доказательства разрешимости задачи (1)–(5) сначала используем метод Фурье. Решение задачи (1)–(5) ищем в виде

$$u(x, t, y) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s(x, t) Y_s(y), \quad (6)$$

где функции $Y_s(y) = \{\sqrt{2} \sin \mu_s y\}$, $\mu_s = (\pi s)^2$, $s = 1, 2, 3, \dots$, являются решениями спектральной задачи Штурма–Лиувилля с условиями Дирихле, а функции $u_s(x, t)$, $s = 1, 2, 3, \dots$, подлежат определению. Известно, что система собственных функций $\{Y_s(y)\}$ образует полный ортонормированный базис в пространстве $L_2(0, 1)$.

Для формулировки основного результата необходимо выполнить некоторые построения.

Рассмотрим следы уравнения (1) при $y = \ell_0$:

$$\begin{aligned} Lu(x, t, \ell_0) \equiv & K(x)u_{tt}(x, t, \ell_0) - (a_{ij}(x)u_{x_j}(x, t, \ell_0))_{x_i} - \\ & - a(x, t)u_{yy}(x, t, \ell_0) + \alpha(x, t)u_t(x, t, \ell_0) + c(x, t)u(x, t, \ell_0) = \psi(x, t, \ell_0). \end{aligned}$$

Разложим функции $f(x, t, y)$ и $g(x, t, y)$ в ряд Фурье по системе $\{Y_s(y)\}$ и подставим в это уравнение. Учитывая условие (5) и $f_0 \neq 0$, определим неизвестную функцию $h(x, t)$ в виде формального ряда

$$h(x, t) = \frac{1}{f_0} \left[\Phi + a \cdot \sqrt{2} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s^2 u_s(x, t) \sin \mu_s \ell_0 \right],$$

где $\Phi = L_0 \phi - g_0$, $L_0 \phi = K \phi_{tt} + \alpha \phi_t - (a_{ij}(x) \phi_{x_i})_{x_j} + c \phi$, а для определения функции $u_s(x, t)$, $s = 1, 2, 3, \dots$, получим в области $Q_1 = \Omega \times (0, T)$ бесконечное число нагруженных систем уравнений смешанного типа второго порядка:

$$Lu_s \equiv L_0 u_s + a \mu_s^2 u_s = g_s + \frac{f_s}{f_0} \cdot \left[\Phi + a \cdot \sqrt{2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 u_m \sin \mu_m \ell_0 \right] \equiv F_s \quad (7)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\gamma D_t^p u_s|_{t=0} = D_t^p u_s|_{t=T}, \quad (8)$$

$$D_{x_i}^p u_s|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u_s|_{x_i=\beta_i}; \quad (9)$$

здесь

$$f_s(x, t) = \sqrt{2} \cdot \int_0^1 f(x, t, y) \sin \mu_s y dy, \quad g_s(x, t) = \sqrt{2} \cdot \int_0^1 g(x, t, y) \sin \mu_s y dy.$$

Основным результатом является

Теорема 1. Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов задачи (1)–(5); кроме того, пусть $2\alpha + \lambda K(x) \geq B_1 > 0$, $\lambda c - c_t \geq b_2 > 0$, $\lambda a - a_t \geq b_3 > 0$, где $\lambda = \frac{2}{T} \ln |\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, и существует положительное число σ такое, что для $b_0 = \min\{B_1, \lambda a_0, b_2 + b_3 \cdot \pi^4\}$ имеют место оценки $b_0 - 16\sigma = \delta_* > 0$, $B_1 - c(\sigma) > b_0 > 0$, где $c(\sigma) = \sigma^{-1} \max\{\lambda^2 |K(x)|, \lambda \|a_{ij}(x)\|_{C^1(\Omega)}\}$, $M_1 \cdot \|a\|_{C(Q_1)}^2 < 1/2$, где $M_1 = (1 + 5\lambda^2) \|f\|_{C_{x,t,y}^{0,1,4}(Q)}^2 (1 + \|f_0\|_{C^1(Q_1)}^2) / (\sigma \eta^4 \delta_*)$. Тогда функции

$$u(x, t, y) = \sqrt{2} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} u_s(x, t) \sin \mu_s y, \quad (10)$$

$$h(x, t) = \frac{1}{f_0} \left[\Phi + a \cdot \sqrt{2} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s^2 u_s(x, t) \sin \mu_s \ell_0 \right] \quad (11)$$

являются единственным решением линейной обратной задачи (1)–(5) из указанного класса U .

Доказательство теоремы 1 проведем по следующей схеме.

1. Покажем, что функция $u(x, t, y)$, определенная по формуле (10), удовлетворяет дополнительному условию (5).

2. Для доказательства однозначной разрешимости задачи (7)–(9) сначала исследуем однозначную разрешимость вспомогательной задачи, т. е. исследуем разрешимость семейства нагруженных уравнений третьего порядка с малым параметром.

3. С помощью этой вспомогательной задачи изучим однозначную разрешимость семейства нагруженных уравнений смешанного типа второго порядка (7)–(9).

4. Используя однозначную разрешимость задачи (7)–(9), покажем однозначную разрешимость линейной обратной задачи (1)–(5).

2. ВЫПОЛНЕНИЕ УСЛОВИЯ (5)

Покажем, что функция $u(x, t, y)$, определенная по формуле (10), удовлетворяет дополнительному условию (5), т. е. $u(x, t, \ell_0) = \phi(x, t)$. Исходя от противного, предположим, что $u(x, t, \ell_0) \neq \phi(x, t)$. Тогда, умножая (7)–(9) на $\sin \mu_s \ell_0$ и суммируя по s от 1 до ∞ , получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} L_0 u_s \sin \mu_s \ell_0 + a \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s^2 u_s \sin \mu_s \ell_0 &= \sum_{s=1}^{\infty} g_s \sin \mu_s \ell_0 + \frac{\sum_{s=1}^{\infty} f_s \sin \mu_s \ell_0}{f_0} \left[\Phi + a \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 u_m \sin \mu_m \ell_0 \right], \\ \gamma \cdot \sum_{s=1}^{\infty} D_t^p u_s(x, 0) \sin \mu_s \ell_0 &= \sum_{s=1}^{\infty} D_t^p u_s(x, T) \sin \mu_s \ell_0, \quad p = 0, 1, \\ \sum_{s=1}^{\infty} D_{x_i}^p u_s(\alpha_i, t) \sin \mu_s \ell_0 &= \sum_{s=1}^{\infty} D_{x_i}^p u_s(\beta_i, t) \sin \mu_s \ell_0, \quad p = 0, 1, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Затем, полагая $z(x, t) + \phi(x, t) = u(x, t, \ell_0) = \sqrt{2} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} u_s(x, t) \sin \mu_s \ell_0$, перепишем уравнение в виде

$$\begin{aligned} K(z + \phi)_{tt} - \left(a_{ij}(z + \phi)_{x_j} \right)_{x_i} + \alpha(z + \phi)_t + c(z + \phi) + \\ + a \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 u_m \sin \mu_m \ell_0 = g_0 + \frac{f_0}{f_0} \left[\Phi + a \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 u_m \sin \mu_m \ell_0 \right]. \end{aligned}$$

Далее, упрощая данное уравнение и учитывая условия 2 и определение функции ϕ , из приведенной выше задачи получим в области Q_1 нелокальную задачу для функции $z(x, t)$

$$K(x)z_{tt} - (a_{ij}(x)z_{x_j})_{x_i} + \alpha(x, t)z_t + c(x, t)z = 0, \quad (12)$$

$$\gamma D_t^p z|_{t=0} = D_t^p z|_{t=T}, \quad (13)$$

$$D_{x_i}^p z|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p z|_{x_i=\beta_i}. \quad (14)$$

Единственность решения задачи (12)–(14) доказана в работе [3]. Следовательно, $z(x, t) = 0$, т. е. $u(x, t, \ell_0) = \phi(x, t)$.

3. СЕМЕЙСТВО НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Разрешимость задачи (7)–(9) докажем методом “ ε -регуляризации”, а именно, в области Q_1 рассмотрим нелокальную задачу для бесконечной системы нагруженных уравнений третьего порядка с малым параметром

$$L_\varepsilon u_{s,\varepsilon} \equiv -\varepsilon \frac{\partial^3 u_{s,\varepsilon}}{\partial t^3} + L_0 u_{s,\varepsilon} + \mu_s^2 a u_{s,\varepsilon} = g_s + \frac{f_s}{f_0} \left[\Phi + a \cdot \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 u_{s,\varepsilon} \sin \mu_m \ell_0 \right] \equiv F_{s,\varepsilon}, \quad (15)$$

$$\gamma \cdot D_t^q u_{s,\varepsilon}|_{t=0} = D_t^q u_{s,\varepsilon}|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2, \quad (16)$$

$$D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}|_{x_i=\beta_i}, \quad p = 0, 1, \quad (17)$$

где $0 < \varepsilon$ — малое положительное число.

При доказательстве корректности задачи (15)–(17) понадобятся следующие обозначения и вспомогательные леммы.

Определим пространства вектор-функций $W_i(Q_1) = \{\vartheta = \{\vartheta_s\}_{s=1}^\infty : \vartheta_s \in W_2^i(Q_1); s = 1, 2, 3, \dots\}$ с конечной нормой

$$\langle \vartheta_s \rangle_i^2 = \sum_{s=1}^\infty (1 + \mu_s^2) \|\vartheta_s\|_{W_2^i(Q_1)}^2, \quad i = 0, 1, 2. \quad (18)$$

Очевидно, что пространство $W_i(Q_1)$ с нормой (18) является банаховым пространством. Из определения пространств $W_2^i(Q_1)$, $i = 0, 1, 2$, следует $W_2(Q_1) \subset W_1(Q_1) \subset W_0(Q_1)$. Символом $W(Q_1)$ обозначим класс вектор-функций $\{\vartheta_s(x, t)\}_{s=1}^\infty$ таких, что $\{\vartheta_s(x, t)\}_{s=1}^\infty \in W_2(Q_1)$, $\{\frac{\partial^3 \vartheta_s}{\partial t^3}\}_{s=1}^\infty \in W_0(Q_1)$, удовлетворяющих соответствующим условиям (16), (17).

Определение. Решением задачи (15)–(17) будем называть вектор-функцию $\{u_{s,\varepsilon}(x, t)\} \in W(Q_1)$, удовлетворяющую уравнению (15).

Разрешимость задачи (15)–(17) докажем методами последовательных приближений. Для этого рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(l)} \equiv -\varepsilon \frac{\partial^3 u_{s,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t^3} + L_0 u_{s,\varepsilon}^{(l)} + \mu_s^2 a u_{s,\varepsilon}^{(l)} = g_s + \frac{f_s}{f_0} \cdot \left[\Phi + a \cdot \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cdot \sum_{m=1}^\infty \mu_m^2 u_{m,\varepsilon}^{(l-1)} \sin \mu_m \ell_0 \right] \equiv F_{s,\varepsilon}^{(l-1)}; \quad (19)$$

$$\gamma \cdot D_t^q u_{s,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{t=0} = D_t^q u_{s,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2; \quad (20)$$

$$D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{x_i=\beta_i}, \quad p = 0, 1, \quad (21)$$

где $l = 1, 2, 3, \dots$, и докажем следующие априорные оценки.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи (19)–(21) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \frac{\varepsilon}{b_0 - 3\sigma} \left\langle u_{s,\varepsilon t t}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_1^2 \leq \text{const}(\widehat{l}), \\ \text{II)} \quad & \frac{\varepsilon}{\delta_*} \left\langle u_{s,\varepsilon t t t}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_2^2 \leq \text{const}(\widehat{l}), \end{aligned}$$

где символом $\text{const}(\widehat{l})$ здесь и далее обозначена постоянная, не зависящая от l .

Доказательство. I) Рассмотрим тождество

$$2(L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(l)}, \rho(t) u_{s,\varepsilon t}^{(l)})_0 = 2(F_{s,\varepsilon}^{(l-1)}, \rho(t) u_{s,\varepsilon t}^{(l)})_0, \quad (22)$$

где $\rho(t) = \exp(-\lambda t)$; константу $\lambda > 0$ выберем позже. Интегрируем по частям в левой части тождества (22). Например, со слагаемым $\rho u_{s,\varepsilon t t t}^{(l)} u_{s,\varepsilon t}^{(l)}$ поступим следующим образом: перекинем производную по t , в интеграле по области Q_1 остается $\rho(u_{s,\varepsilon t t}^{(l)})^2 + \lambda \rho u_{s,\varepsilon t t}^{(l)} u_{s,\varepsilon t}^{(l)}$, далее второе слагаемое перепишем сначала в виде $\lambda \rho [(u_{s,\varepsilon t}^{(l)})^2]_t$, а затем перебросим производную по t . Отметим, что “внеинтегральные слагаемые” в силу нелокальных условий с выбором $\gamma^2 = e^{\lambda T}$ обратятся в нуль. Слагаемое $2\rho K(x) u_{s,\varepsilon t t}^{(l)} u_{s,\varepsilon t}^{(l)}$ сначала перепишем в виде $\rho K(x) [(u_{s,\varepsilon t}^{(l)})^2]_t$, а затем повторим предыдущие рассуждения. Далее в слагаемом $-2\rho(a_{ij} u_{s,\varepsilon x_i}^{(l)} x_j u_{s,\varepsilon t}^{(l)})$ перекинем производную по x_j ; в интеграле по области Q_1 остается $I = 2\rho a_{ij} u_{s,\varepsilon x_i}^{(l)} u_{s,\varepsilon t x_j}^{(l)} = \rho a_{ij} u_{s,\varepsilon x_i}^{(l)} u_{s,\varepsilon t x_j}^{(l)} + \rho a_{ij} u_{s,\varepsilon x_i}^{(l)} u_{s,\varepsilon t x_j}^{(l)}$. Теперь в первом слагаемом перебросим производную по t ; тогда в интеграле по области Q_1 остается $I = \lambda \rho a_{ij} u_{s,\varepsilon x_i}^{(l)} u_{s,\varepsilon x_j}^{(l)}$,

а “внеинтегральные слагаемые” в силу условий леммы обратятся в нуль. Таким образом, получим

$$2 \int_{Q_1} F_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \cdot e^{-\lambda t} \cdot u_{s,\varepsilon t}^{(l)} dx dt = \varepsilon \left\| u_{s,\varepsilon t}^{(l)} \right\|_0^2 + \int_{Q_1} e^{-\lambda t} \cdot \left\{ (2\alpha + \lambda K) \cdot u_{s,\varepsilon t}^{2(l)} + \right. \\ \left. + \lambda a_{ij} u_{s,\varepsilon x_i}^{(l)} u_{s,\varepsilon x_j}^{(l)} + ((\lambda a - a_t)\mu_s^2 + (\lambda c - c_t)) \cdot u_{s,\varepsilon}^{2(l)} \right\} dx dt. \quad (23)$$

Для оценки снизу правой части (23) используем условие эллиптичности (а), оценку $\mu_s \geq \mu_1$ и условия на коэффициенты из теоремы 1. Тогда имеем

$$\left| 2 \int_{Q_1} F_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \cdot e^{-\lambda t} \cdot u_{s,\varepsilon t}^{(l)} dx dt \right| \geq \varepsilon \left\| u_{s,\varepsilon t}^{(l)} \right\|_0^2 + \int_{Q_1} e^{-\lambda t} \left\{ (2\alpha + \lambda K(x)) \cdot u_{s,\varepsilon t}^{2(l)} + \right. \\ \left. + \lambda a_0 u_{s,\varepsilon x}^{2(l)} + ((\lambda c - c_t) + \pi^4(\lambda a - a_t)) \cdot u_{s,\varepsilon}^{2(l)} \right\} dx dt \geq \varepsilon \left\| u_{s,\varepsilon t}^{(l)} \right\|_0^2 + \\ + \int_{Q_1} e^{-\lambda t} \left\{ B_1 u_{s,\varepsilon t}^{2(l)} + \lambda a_0 u_{s,\varepsilon x}^{2(l)} + (b_2 + \pi^4 b_3) u_{s,\varepsilon}^{2(l)} \right\} dx dt \geq \varepsilon \left\| u_{s,\varepsilon t}^{(l)} \right\|_0^2 + b_0 \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_1^2. \quad (24)$$

Применяя неравенство Коши с σ к тождеству (22), справа получим

$$\left| 2 \int_{Q_1} F_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \cdot e^{-\lambda t} \cdot u_{s,\varepsilon t}^{(l)} dx dt \right| = \left| 2 \left(g_s + \frac{f_s}{f_0} \cdot \left[\Phi + a \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 u_{m,\varepsilon}^{(l-1)} \sin \mu_m \ell_0 \right], e^{-\lambda t} u_{s,\varepsilon t}^{(l)} \right) \right|_0 \leq \\ \leq 3\sigma \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_1^2 + \frac{1}{\sigma} \cdot \left[\|g_s\|_0^2 + \frac{\|f_s\|_{C(Q_1)}^2}{\eta^2} \cdot (T_0 \|\varphi\|_{W_2^2(Q_1)}^2 + \|g_0\|_0^2) \right] + \\ + \frac{c_1 \|a\|_{C(Q_1)}^2}{\sigma \eta^2} \|f_s\|_{C(Q_1)}^2 \sum_{m=1}^{\infty} (1 + \mu_m^2) \left\| u_{m,\varepsilon}^{(l-1)} \right\|_1^2, \quad (25)$$

где $T_0 = 2 \max\{\|K\|_{C(Q_1)}, \|\alpha\|_{C(Q_1)}, \|c\|_{C(Q_1)}, \|a_{ij}\|_{C(\Omega)}\}$. Объединяя неравенства (24) и (25), получим

$$\varepsilon \left\| u_{s,\varepsilon t}^{(l)} \right\|_0^2 + (b_0 - 3\sigma) \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_1^2 \leq \frac{1}{\sigma} \cdot \left[\|g_s\|_0^2 + \frac{\|f_s\|_{C(Q_1)}^2}{\eta^2} \cdot (T_0 \|\varphi\|_{W_2^2(Q_1)}^2 + \|g_0\|_0^2) \right] + \\ + \frac{\|a\|_{C(Q_1)}^2}{\sigma \eta^2} \|f_s\|_{C(Q_1)}^2 \sum_{s=1}^{\infty} (1 + \mu_s^2) \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \right\|_1^2. \quad (26)$$

Учитывая оценку $|f_s| \leq \sqrt{2}\mu_s^{-4} \|f\|_{C_{x,t,y}^{0,1,4}(Q)}$, деля неравенства (26) на $b_0 - 3\sigma > 0$, затем умножая на $(1 + \mu_s^2)$ и суммируя по s от 1 до ∞ , получим первую рекуррентную формулу

$$\frac{\varepsilon}{b_0 - 3\sigma} \cdot \left\langle u_{s,\varepsilon t}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_1^2 \leq \frac{1}{\sigma(b_0 - 3\sigma)} \cdot \left[\langle g_s \rangle_0^2 + \frac{\|f\|_{C_{x,t,y}^{0,1,4}(Q)}^2}{\eta^2} \cdot (T_0 \|\varphi\|_{W_2^2(Q_1)}^2 + \|g_0\|_0^2) \right] + \\ + \frac{\|a\|_{C(Q_1)}^2}{\sigma \eta^2 (b_0 - 3\sigma)} \cdot \|f\|_{C_{x,t,y}^{0,1,4}(Q)}^2 \cdot \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \right\rangle_1^2 \quad (27)$$

(при этом учли, что $\sum_{m=1}^{\infty} (1 + \mu_m^2) \mu_m^{-4} \leq 1$).

Если обозначить $M_2 = ((b_0 - 3\sigma)\eta^2\sigma)^{-1}\|f\|_{C_{x,t,y}^{0,1,4}(Q)}^2 \leq M_1$, то в силу условия теоремы 1 второе слагаемое в правой части (27) имеет оценку

$$M_2 \cdot \|a\|_{C(Q_1)}^2 \cdot \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \right\rangle_1^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \right\rangle_1^2.$$

В силу этой оценки из рекуррентной формулы (27) получим справедливость оценки I). Действительно, для этого в качестве “нулевого приближения” возьмем функцию $\{u_{s,\varepsilon}^{(0)}\} \equiv \{0\}$. Тогда имеем

$$\frac{\varepsilon}{b_0 - 3\sigma} \cdot \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(1)} \right\rangle_0^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(1)} \right\rangle_1^2 \leq \frac{1}{\sigma(b_0 - 3\sigma)} \cdot \left[\langle g_s \rangle_0^2 + \frac{\|f\|_{C_{x,t,y}^{0,1,4}(Q)}^2}{\eta^2} \cdot (T_0 \|\varphi\|_{W_2^2(Q_1)}^2 + \|g_0\|_0^2) \right] \equiv A.$$

Продолжая этот процесс, получим первую априорную оценку для любой вектор-функции $\{u_{s,\varepsilon}^{(l)}\} \quad \forall l \geq 1$:

$$\frac{\varepsilon}{b_0 - 3\sigma} \cdot \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_1^2 \leq A \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^l} \right) \leq 2A \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{l+1} \right) \leq 2A.$$

Докажем справедливость оценки II). Для этого рассмотрим тождество

$$-2 \int_{Q_1} L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(l)} e^{-\lambda t} \ell u_{s,\varepsilon}^{(l)} dx dt = -2 \int_{Q_1} F_{s,\varepsilon}^{(l-1)} e^{-\lambda t} \ell u_{s,\varepsilon}^{(l)} dx dt, \quad (28)$$

где $\ell u_{s,\varepsilon}^{(l)} = u_{s,\varepsilon}^{(l)} - \lambda u_{s,\varepsilon}^{(l)} + \frac{\lambda}{2} u_{s,\varepsilon}^{(l)} - u_{s,\varepsilon}^{(l)}$ и число $\lambda > 0$ определено выше.

Аналогичные рассуждения, что и при доказательстве оценки I), основанные на интегрировании по частям (28), с учетом условий теоремы и краевых условий (20), (21) приведут к оценке

$$\begin{aligned} \left| 2(F_{s,\varepsilon}^{(l-1)}, e^{-\lambda t} \ell u_{s,\varepsilon}^{(l)})_0 \right| &\geq \varepsilon \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_0^2 + \int_{Q_1} e^{-\lambda t} \left\{ (2a + \lambda K) u_{s,\varepsilon}^{2(l)} + \lambda a_0 u_{s,\varepsilon}^{2(l)} + \lambda a_0 u_{s,\varepsilon}^{2(l)} \right\} dx dt + \\ &+ b_0 \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_1^2 - \sigma \left(\left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_0^2 + \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_0^2 \right) - c(\sigma) \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_0^2 - c_1(\sigma) \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_1^2, \quad (29) \end{aligned}$$

где

$$c(\sigma) = \sigma^{-1} \max\{\lambda^2 |K|, \lambda \|a_{ij}\|_{C^1(\Omega)}\},$$

$$c_1(\sigma) = \sigma^{-1} \max\{\|\alpha\|_{C^1(Q_1)}, \|a_{ij}\|_{C^1(\Omega)}, \|c\|_{C^1(Q_1)}, \|a\|_{C^1(Q_1)}\}.$$

Пусть существует положительное число σ такое, что $b_0 - \sigma > 0$ и $B_1 - c(\sigma) \geq b_0 > 0$, где $b_0 = \min\{B_1, \lambda a_0, b_2 + b_3 \cdot \pi^4\}$. Тогда из неравенства (29) слева получим оценку

$$\varepsilon \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_0^2 + (b_0 - \sigma) \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_1^2 \leq \left| 2(F_{s,\varepsilon}^{(l-1)}, e^{-\lambda t} \ell u_{s,\varepsilon}^{(l)})_0 \right| + c_1(\sigma) \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_1^2. \quad (30)$$

Применяя неравенство Коши с σ к тождеству (28) справа, получим неравенство

$$\begin{aligned} \left| -2(F_s(u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}), e^{-\lambda t} \ell u_{s,\varepsilon}^{(l)})_0 \right| &= \left| -2 \left(g_s + \frac{f_s}{f_0} \cdot \left[\Phi + a \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 u_{m,\varepsilon}^{(l-1)} \sin \mu_m \ell_0 \right], e^{-\lambda t} \ell u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right)_0 \right| \leq \\ &\leq 15\sigma \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_2^2 + \frac{1+5\lambda^2}{\sigma} \left\{ \|g_s\|_1^2 + \frac{\|f_0\|_{C^1(Q_1)}^2}{\eta^4} \|f_s\|_{C^1(Q_1)}^2 [T_1 \|\varphi\|_{W_2^3(Q_1)}^2 + \|g_0\|_{W_2^1(Q_1)}^2] \right\} + \\ &\quad + \frac{(1+5\lambda^2) \|f_0\|_{C(Q_1)}^2 \|f_s\|_{C^1(Q_1)}^2}{\sigma \eta^4} \|a\|_{C^1(Q_1)}^2 \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (1+\mu_s^2) \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \right\|_2^2, \quad (31) \end{aligned}$$

где $T_1 = \max\{\|K\|_{C^1(Q_1)}, \|\alpha\|_{C^1(Q_1)}, \|c\|_{C^1(Q_1)}, \|a_{ij}\|_{C^1(\Omega)}\}$.

Объединяя неравенства (30) и (31), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_0^2 + (b_0 - 16\sigma) \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\|_2^2 &\leq \left[\frac{1+5\lambda^2}{\sigma} + c_1(\sigma) \right] \times \\ &\times \left\{ \|g_s\|_1^2 + \frac{(1+\|f_0\|_{C^1(Q_1)}^2)}{\eta^4} \|f_s\|_{C^1(Q_1)}^2 [T_1 \|\varphi\|_{W_2^3(Q_1)}^2 + \|g_0\|_{W_2^1(Q_1)}^2] \right\} + \\ &+ \frac{(1+5\lambda^2)(1+\|f_0\|_{C(Q_1)}^2) \|f_s\|_{C^1(Q_1)}^2}{\sigma \eta^4} \|a\|_{C^1(Q_1)}^2 \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (1+\mu_s^2) \left\| u_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Так как $\delta_* = b_0 - 16\sigma > 0$, то, повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве оценки (27), получим

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\delta_*} \cdot \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_2^2 &\leq \left[\frac{1+5\lambda^2}{\sigma} + c_1(\sigma) \right] \cdot \frac{1}{\delta_*} \left\{ \langle g_s \rangle_1^2 + \frac{(1+\|f_0\|_{C^1(Q_1)}^2)}{\eta^4} \|f\|_{C_{x,t,y}^{0,1,4}(Q)}^2 \times \right. \\ &\times \left. [T_1 \|\varphi\|_{W_2^3(Q_1)}^2 + \|g_0\|_{W_2^1(Q_1)}^2] \right\} + \frac{(1+5\lambda^2)[1+\|f_0\|_{C^1(Q_1)}^2] \cdot \|f\|_{C_{x,t,y}^{0,1,4}(Q)}^2}{\delta_* \sigma \eta^4} \|a\|_{C^1(Q_1)}^2 \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \right\rangle_2^2. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить оценку II). $\square$

Введем новую вектор-функцию из $W(Q_1)$ по формуле $\{\vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)}\} = \{u_{s,\varepsilon}^{(l)}\} - \{u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}\}$, $\varepsilon > 0$, $l, s = 1, 2, 3, \dots$, и положим $\{\vartheta_{s,\varepsilon}^{(0)}\} = \{u_{s,\varepsilon}^{(0)}\}$.

Лемма 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для вектор-функции $\{\vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)}\} \in W(Q_1)$, $l = 1, 2, 3, \dots$, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \text{III)} \quad \frac{\varepsilon}{b_0 - 3\sigma} \cdot \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_1^2 &\leq A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}, \\ \text{IV)} \quad \frac{\varepsilon}{\delta_*} \cdot \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_2^2 &\leq A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Из (19)–(21) для вектор-функции $\{\vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)}\} \in W(Q_1)$ получим задачу

$$L_\varepsilon \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} = -\varepsilon \frac{\partial^3 \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t^3} + L_0 \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} + \mu_s^2 a \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} = \frac{a f_s}{f_0} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m^2 \vartheta_{m,\varepsilon}^{(l-1)} \sin \mu_m \ell_0 \equiv F_{s,\varepsilon}^{(l-1)},$$

$$\gamma \cdot D_t^q u_{s,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{t=0} = D_t^q u_{s,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{t=T}, \quad q = 0, 1, 2,$$

$$D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{x_i=\alpha_i} = D_{x_i}^p u_{s,\varepsilon}^{(l)} \Big|_{x_i=\beta_i}, \quad p = 0, 1,$$

где $l = 1, 2, 3, \dots$.

Следовательно, как и в доказательстве леммы 1, получим третью рекуррентную формулу

$$\frac{\varepsilon}{b_0 - 3\sigma} \cdot \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_1^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \right\rangle_1^2, \quad (32)$$

где $l = 2, 3, \dots$. Учитывая, что для $\{\vartheta_{s,\varepsilon}^{(1)}\} = \{u_{s,\varepsilon}^{(1)}\} - \{u_{s,\varepsilon}^{(0)}\} = \{u_{s,\varepsilon}^{(1)}\}$ оценка III) доказана в лемме 1, из рекуррентной формулы (32) получим эту оценку для любой вектор-функции $\{\vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)}\}$.

Аналогично доказывается оценка IV). $\square$

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача (15)–(17) однозначно разрешима в $W(Q_1)$.

Доказательство. Пусть $\widehat{L}_\varepsilon$ — оператор, соответствующий дифференциальному выражению (15) и условиям (16), (17). Обозначим через $\widehat{L}_\varepsilon^{-1}$ формальный обратный оператор. Определим в пространстве $W(Q_1)$ оператор

$$u_{s,\varepsilon}^{(l)} = \widehat{L}_\varepsilon^{-1} F_{s,\varepsilon}^{(l-1)} \equiv R u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}.$$

1. Покажем, что оператор R отображает пространство $W(Q_1)$ в себя. Пусть $\{u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}\} \in W(Q_1)$, тогда для решения задачи (19)–(21) справедливо утверждение леммы 1, т.е. справедлива оценка II), откуда для любых $l = 1, 2, 3, \dots$ получим $\{u_{s,\varepsilon}^{(l)}\} \in W(Q_1)$. Таким образом, $R : W(Q_1) \rightarrow W(Q_1)$.

2. Покажем, что R — сжимающий оператор. Пусть $\{u_{s,\varepsilon}^{(l)}\}, \{u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}\} \in W(Q_1)$. Рассмотрим новую вектор-функцию $\{\vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)}\} = \{u_{s,\varepsilon}^{(l)}\} - \{u_{s,\varepsilon}^{(l-1)}\}$, тогда для нее справедливо утверждение леммы 2, т.е. справедлива оценка IV). Из определения оператора R имеем $\vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} = R \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l-1)}$,

$$\frac{\varepsilon}{\delta_*} \cdot \left\langle \frac{\partial^3 \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)}}{\partial t^3} \right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_{s,\varepsilon}^{(l)} \right\rangle_2^2 \leq A \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{l-1}.$$

Таким образом, R — сжимающий оператор, значит, по известной теореме о сжимающих отображениях задача (15)–(17) имеет единственное решение $\{u_{s,\varepsilon}\}$, принадлежащее пространству $W(Q_1)$. При этом для любых s и $\varepsilon > 0$ имеем $u_{s,\varepsilon}^{(l)} \rightarrow u_{s,\varepsilon}$ сильно в $W(Q_1)$ при $l \rightarrow \infty$ ([15], с. 391). $\square$

4. СЕМЕЙСТВО НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Докажем однозначную разрешимость задачи (7)–(9). При этом уравнение третьего порядка (15) используем в качестве “ ε -регуляризирующего” уравнения для уравнения (7) [3], [16].

Пусть вектор-функция $\{u_{s,\varepsilon}\} \in W(Q_1)$ при $\varepsilon > 0$ является единственным решением задачи (15)–(17). Тогда для любого s справедливо неравенство II). По известной теореме о слабой компактности ([17]; [15], с. 210) из ограниченной в пространстве $W(Q_1)$ последовательности $\{u_{s,\varepsilon_j}\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность вектор-функций $\{u_{s,\varepsilon_j}\} : u_{s,\varepsilon_j} \rightarrow u_s$ слабо в $W(Q_1)$ при $\varepsilon_j \rightarrow 0$.

Покажем, что предельная вектор-функция $\{u_s(x, t)\}$ удовлетворяет системе уравнений (7). Действительно, так как подпоследовательность $\{u_{s, \varepsilon_j}\}$ сходится слабо в $W(Q_1)$, $\frac{\partial^3 u_{s, \varepsilon_j}}{\partial t^3} \in L_2(Q_1)$, а оператор L линеен, то для каждого $s = 1, 2, 3, \dots$ имеем

$$Lu_s - F_s = \varepsilon_j \cdot \frac{\partial^3 u_{s, \varepsilon_j}}{\partial t^3} + L(u_{s, \varepsilon_j} - u_s).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_j \rightarrow 0$, получаем $Lu_s = F_s$ при каждом s и почти всюду в Q_1 . Следовательно, доказана разрешимость задачи (7)–(9).

Вектор-функция $\{u_s(x, t)\}$ будет единственным решением задачи (7)–(9) из $W_2(Q_1)$. Действительно, пусть существуют $\{u_s^1(x, t)\}$, $\{u_s^2(x, t)\}$ — два решения задачи (7)–(9). Тогда вектор-функция $\{u_s\} = \{u_s^1(x, t)\} - \{u_s^2(x, t)\}$ будет решением задачи (7)–(9). Чтобы доказать единственность решения задачи (7)–(9), рассмотрим следующее тождество:

$$2 \left(Lu_s - F_s, \exp(-\lambda t) \frac{\partial}{\partial t} u_s \right)_0 = 0. \quad (33)$$

Применяя метод априорных оценок [3] к тождеству (33), при выполнении условий теоремы 1 получаем в $W_2(Q_1)$ равенство $\langle u_s \rangle_1 = 0$. Отсюда при каждом s имеем $u_s(x, t) = 0$, т. е. решение задачи (7)–(9) единственно.

5. РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Так как выполнены все условия теоремы 1, то система собственных функций $\{\sqrt{2} \sin \mu_s y\}$ фундаментальна в пространстве $L_2(0, 1)$ и в нем образует ортонормированный базис. Используя равенства Парсеваля–Стеклова $\|u\|_U^2 = \|(1 + D_y)u\|_{W_2^2(Q)}^2 = \sum_{s=1}^{\infty} (1 + \mu_s^2) \|u_s\|_{W_2^2(Q_1)}^2$ для решения задачи (7)–(9), получим единственное решение задачи (1)–(5) из указанного класса U ([15], с. 64). $\square$

Авторы выражают глубокую благодарность академику АНРУз Шавкату Арифжановичу Алимову за обсуждения результатов работы и ценные советы в подготовке данной статьи, а также благодарят рецензента за ряд замечаний, которые способствовали ее улучшению.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бицадзе А.В. *Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа*, ДАН СССР **122** (2), 167–170 (1953).
- [2] Франкль Ф.И. *Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения*, Прикл. матем. и механ. **20** (2), 196–202 (1956).
- [3] Джамалов С.З. *Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа*, Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. науки **21** (4), 1–14 (2017).
- [4] Кальменов Т.Ш. *О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа*, Дифференц. уравнения **14** (3), 546–548 (1978).
- [5] Цыбиков Б.Н. *О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа* (в кн.: Неклассические уравнения математической физики, Новосибирск, 201–206 (1986)).
- [6] Аниконов Ю.Е. *Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений* (Наука, Новосибирск, 1978).
- [7] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи* (Сиб. науч. изд-во, Новосибирск, 2009).
- [8] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. *Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений* (Наука, Новосибирск, 1969).
- [9] Кожанов А.И. *Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **44** (4), 694–716 (2004).

- [10] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Обратная задача для вырождающегося парабола-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием*, Изв. вузов. Матем., № 1, 46–59 (2015).
- [11] Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. *Обратная задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе, связанная с поиском элементов правой части*, Изв. вузов. Матем., № 2, 44–57 (2017).
- [12] Джамалов С.З. *Об одной линейной обратной задаче для уравнения смешанного типа первого рода второго порядка в трехмерном пространстве*, Узб. матем. журн. **2**, 58–65 (2017).
- [13] Джамалов С.З. *Линейная обратная задача для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка с нелокальными граничными условиями в трехмерном пространстве*, Вестн. КРАУНЦ **17** (1), 7–13 (2017).
- [14] Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их приложения*, Дифференц. уравнения **19** (1), 86–94 (1983).
- [15] Треногин В.А. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1980).
- [16] Врагов В.Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики* (НГУ, Новосибирск, 1983).
- [17] Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики* (Наука, М., 1973).

Сирожиддин Зухриддинович Джамалов

Институт математики АНРУз,

ул. Мирзо Улугбека, д. 81, Академгородок, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;

Филиал Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина в г. Ташкенте,

ул. Дурмон йули, д.34, г. Ташкент, 100125, Республика Узбекистан,

e-mail: siroj63@mail.ru

Равшан Ражабович Ашуров

Институт математики АНРУз,

ул. Мирзо Улугбека, д. 81, Академгородок, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан,

Национальный Университет Республики Узбекистан им. М. Улугбека,

ул. Университетская, д.4, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: ashurovr@gmail.com

S.Z. Dzhamalov and R.R. Ashurov

On one linear inverse problem for multidimensional equation of the mixed type of the first kind and of the second order

Abstract. In the present work we consider the problems of correctness of a linear inverse problem for the multidimensional equation of the mixed type of the first kind and of the second order. For this problem, the theorems on existence and uniqueness of the solution are proved in a certain class by “ ε -regularization”, a priori estimations and of successive approximations methods.

Keywords: multidimensional equation of mixed type of first kind, second order, linear inverse problem, correctness of solution, “ ε -regularization”, a priori estimation successive approximation method.

Sirozhiddin Zhukhriddinovich Dzhamalov

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,

81 Mirzo Ulugbek str., Akademgorodok, Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;

Gubkin Russian State University of Oil and Gas of Tashkent,

34 Durmon yuli str., Tashkent, 100125 Republic of Uzbekistan,

e-mail: siroj63@mail.ru

Ravshan Razhabovich Ashurov

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,

81 Mirzo Ulugbek str., Akademgorodok, Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;

National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek,

4 University str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,

e-mail: ashurovr@gmail.com