Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кульжумиева, Ж. А. Сартабанов, Интегрирование линейного уравнения с оператором дифференцирования по главной диагонали пространства независимых переменных и постоянными на ней коэффициентами, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 6, 34–47

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-34-47>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 08:57:02

А.А. КУЛЬЖУМИЕВА, Ж.А. САРТАБАНОВ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛИ ПРОСТРАНСТВА НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ПОСТОЯННЫМИ НА НЕЙ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Рассматривается линейное уравнение n -го порядка с оператором дифференцирования по направлению главной диагонали пространства независимых переменных и с переменными, но постоянными на диагонали коэффициентами. Устанавливаются условия на переменные собственные значения, которые дают возможность при интегрировании рассматриваемого уравнения реализовать известные методы по обыкновенным дифференциальным уравнениям. На этой основе определяются структуры решений однородного уравнения. Приводятся условия существования многопериодических решений уравнений, связанные с переменными собственными значениями и начальными функциями. Дано интегральное представление многопериодического решения неоднородного уравнения. Введены понятия переменной частоты и переменного периода.

Ключевые слова: линейное уравнение, дифференциальный оператор, собственные значения, многопериодическое решение.

УДК: 517.925

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-34-47

1. Постановка задачи

Известно, что многие волновые процессы описываются уравнениями в частных производных первого порядка. Линейные уравнения, описывающие бегущие волны, квазилинейные уравнения Хопфа для скорости волн и нелинейные уравнения эйконала волнового фронта являются яркими примерами уравнений в частных производных первого порядка, связанных с колебательными процессами в сплошной среде.

В данной статье исследуется вопрос о существовании многопериодических (периодических по всем независимым переменным с рационально независимыми периодами) решений уравнения с линейным оператором дифференцирования по направлениям определенного векторного поля. В данном случае векторы поля сонаправлены с главной диагональю пространства независимых переменных. К системам уравнений с оператором дифференцирования по векторным полям можно привести и уравнение Хопфа, и уравнение Якоби (в частном случае — уравнение эйконала волнового фронта), которые являются модельными в теории и приложении уравнений в частных производных, описывающих волновые процессы. Общая теория этих уравнений прозрачно изложена в работах [1]–[3]. Векторные поля этих систем, соответствующих уравнениям Хопфа и эйконала волнового фронта, являются квазилинейными. Системы с оператором дифференцирования по таким векторным полям рассмотрены в [4], где шире исследованы проблемы многопериодических решений таких

систем. В нашей работе ограничиваемся рассмотрением проблем, когда оператор дифференцирования и уравнение являются линейными, причем коэффициенты последнего будут постоянными на диагонали пространства независимых переменных.

Простыми из волновых процессов являются периодические процессы, как по временным, так и по пространственным переменным. Обычно многочастотные относительно времени колебательные процессы с рационально несоизмеримым частотным базисом порождают многомерность времени, а математические модели этих процессов приводят к исследованию уравнений с дифференциальным оператором D_e .

Оператор дифференцирования D_e функции $x = x(\tau, t)$ переменных $\tau \in (-\infty, +\infty) = R$ и $t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$ определяется соотношением $D_e x = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial x}{\partial t_m}$. Следовательно, положив $e = (1, \dots, 1) - m$ -вектор, $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$, оператор D_e можно представить в виде

$$D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \quad (1)$$

где $\langle, \rangle$ — знак скалярного произведения.

Такой оператор (1) назовем оператором дифференцирования по диагонали $t = e\tau$.

Функцию $u(\sigma)$, определенную при $\sigma \in R^m$, назовем постоянной на диагонали $t = e\tau$, если она зависит только от переменной $\sigma = t - e\tau$. Если функция $u(\sigma)$ дифференцируема, то легко проверить, что $D_e u(\sigma) = 0$, $\sigma \in R^m$.

Оператор дифференцирования порядка α вида D_e^α определяется соотношением $D_e^\alpha = D_e (D_e^{\alpha-1})$, $\alpha \in N$, N — множество натуральных чисел, $D_e^0 = I$ — тождественный оператор.

Рассмотрим линейное уравнение с оператором D_e и постоянными на диагонали коэффициентами вида

$$D_e^n x + a_1(\sigma) D_e^{n-1} x + \dots + a_n(\sigma) x = f(\tau, t, \sigma), \quad (2)$$

где $\sigma = t - e\tau \in R^m$, коэффициенты $a_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, и функция $f(\tau, t, \sigma)$ обладают свойством $C_{\tau, t, \sigma}^{(0, e, e)}(R \times R^m \times R^m)$, смысл которого заключается в гладкости их по $(\tau, t, \sigma) \in R \times R^m \times R^m$ порядка $(0, e, e)$, $e = (1, \dots, 1)$.

Кроме того, предположим, что эти функции многопериодические по (τ, t, σ) с вектор-периодом (θ, ω, ω) , где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, $\theta = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$ — рационально несоизмеримые положительные постоянные.

Таким образом, эти свойства параметров уравнения (2) представим в виде

$$a_j(\sigma + k\omega) = a_j(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad k \in Z^m, \quad (3)$$

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, \sigma + k\omega) = f(\tau, t, \sigma) \in C_{\tau, t, \sigma}^{(0, e, e)}(R \times R^m \times R^m), \quad k \in Z^m, \quad (4)$$

где $k = (k_1, \dots, k_m) \in Z \times \dots \times Z = Z^m$, Z — множество целых чисел, $k\omega = (k_1\omega_1, \dots, k_m\omega_m)$ — кратный период.

Поставим вопрос о выяснении а) условий, при которых уравнение (2) было бы интегрируемо на основе метода Эйлера, известного в случае линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и б) условий существования многопериодических решений таких уравнений.

Исследование вопросов многопериодических решений систем D_e уравнений в частных производных первого порядка с одинаковой главной частью берет свое начало в трудах [4], [5]. На их основе дальнейшие качественные исследования продолжены в работе [6]. В [7] исследован вопрос существования периодического решения линейной системы D_e -уравнений методом приведения к каноническому виду. Исследование с приведением к каноническому виду линейных систем во взаимосвязи с линейным уравнением высшего порядка проведено в [8], а в [9] рассмотрен вопрос о приводимости, когда система распадается на r линейных

уравнений. В [10] предложен метод исследования проблем многопериодических решений линейных систем на основе результатов изучения многопериодичности их полного интеграла. В [11] установлено условие существования и единственности периодического решения квазилинейной системы уравнений с оператором дифференцирования по направлению главной диагонали. По постановке вопроса данное исследование примыкает к [4]–[12] и является их существенным дополнением.

2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

С этой целью сначала рассмотрим линейное однородное уравнение

$$D_e^n x + a_1(\sigma) D_e^{n-1} x + \dots + a_n(\sigma) x = 0. \quad (5)$$

Решение $x = x(\tau, \sigma)$ уравнения (5) будем искать в виде

$$x = e^{\lambda(\sigma)\tau} \quad (6)$$

с дифференцируемой неизвестной пока функцией $\lambda = \lambda(\sigma)$.

Подставив соотношение (6) в уравнение (5), получим относительно λ линейное алгебраическое уравнение n -го порядка вида

$$\lambda^n + a_1(\sigma)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(\sigma) = 0, \quad \sigma = t - e\tau \in R^m. \quad (7)$$

Предположим, что характеристический многочлен

$$h(\sigma, \lambda) = \lambda^n + a_1(\sigma)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(\sigma) \quad (8)$$

можно представить в виде

$$h(\sigma, \lambda) = [\lambda - \lambda_1(\sigma)]^{n_1} \dots [\lambda - \lambda_r(\sigma)]^{n_r}, \quad (9)$$

где каждый характеристический корень $\lambda_j(\sigma)$ знакоопределенный, т.е. либо отрицательнозначный, либо тождественно нуль, либо положительнозначный:

$$(\lambda_j(\sigma) < 0, \sigma \in R^m) \vee (\lambda_j(\sigma) = 0, \sigma \in R^m) \vee (\lambda_j(\sigma) > 0, \sigma \in R^m), \quad (10)$$

корни $\lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_r(\sigma)$ различные:

$$\lambda_\alpha(\sigma) \neq \lambda_\beta(\sigma), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha = \overline{1, r}, \quad \beta = \overline{1, r}, \quad \sigma \in R^m, \quad (11)$$

и их кратности $n_1, \dots, n_r$ постоянные, причем

$$n_1 + \dots + n_r = n. \quad (12)$$

Если корни $\lambda_1^\pm = \mu_1(\sigma) \pm i\nu_1(\sigma), \dots, \lambda_{r_0}^\pm = \mu_{r_0}(\sigma) \pm i\nu_{r_0}(\sigma)$ комплекснозначные:

$$\operatorname{Im} \lambda_\alpha^\pm(\sigma) = \nu_\alpha(\sigma) \neq 0, \quad \sigma \in R^m, \quad (13)$$

то предполагается, что их реальные части $\operatorname{Re} \lambda_\alpha^\pm(\sigma) = \mu_\alpha(\sigma)$ и мнимые части $\operatorname{Im} \lambda_\alpha^\pm(\sigma) = \nu_\alpha(\sigma)$ в отдельности знакоопределенные

$$\begin{aligned} &(\mu_\alpha(\sigma) < 0, \sigma \in R^m) \vee (\mu_\alpha(\sigma) = 0, \sigma \in R^m) \vee (\mu_\alpha(\sigma) > 0, \sigma \in R^m), \\ &(\nu_\alpha(\sigma) < 0, \sigma \in R^m) \vee (\nu_\alpha(\sigma) > 0, \sigma \in R^m), \quad \alpha = \overline{1, r_0}, \end{aligned} \quad (14)$$

и они разделены между собой либо совпадают всюду

$$\begin{aligned} &(\mu_\alpha(\sigma) \neq \mu_\beta(\sigma), \alpha \neq \beta, \sigma \in R^m) \vee (\mu_\alpha(\sigma) = \mu_\beta(\sigma), \alpha \neq \beta, \sigma \in R^m), \\ &(\nu_\alpha(\sigma) \neq \nu_\beta(\sigma), \alpha \neq \beta, \sigma \in R^m) \vee (\nu_\alpha(\sigma) = \nu_\beta(\sigma), \alpha \neq \beta, \sigma \in R^m), \end{aligned} \quad (15)$$

где $\vee$ — квантор “или”.

Заметим, что корни, полученные сдвигом аргумента одного корня на кратный период, не порождают другие корни характеристического уравнения (7).

Действительно, если имеем

$$\lambda_1(\sigma + k\omega) = \lambda_2(\sigma),$$

то в точке σ корень $\lambda_2(\sigma)$ имеет кратность $n_1 + n_2$ порядка. Это противоречит условию (12) о кратностях корней.

Следовательно, каждый корень $\lambda_j(\sigma)$ является ω -периодическим.

Пользуясь теоремой о неявной функции, можно показать, что $\lambda_j(\sigma)$ является гладкой по $\sigma \in R^m$.

Таким образом, в силу условий (3) и (9)–(12) корни $\lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, r}$, обладают свойствами

$$\lambda_j(\sigma + k\omega) = \lambda_j(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad k \in Z^m. \quad (16)$$

Приняв кратность α действия оператора D_e за его степень и исходя из представления (9) характеристического многочлена (8), уравнение (5) представим в виде произведения степеней линейных дифференциальных операторов:

$$[D_e - \lambda_r(\sigma)]^{n_r} \dots [D_e - \lambda_1(\sigma)]^{n_1} x = 0. \quad (17)$$

Характеристическое уравнение (7) в силу условия (9) расщепляется на уравнения

$$[\lambda - \lambda_k(\sigma)]^{n_k} = 0, \quad k = \overline{1, r}.$$

Оказывается, что в соответствии с ними уравнение (17) также распадается на уравнения

$$[D_e - \lambda_k(\sigma)]^{n_k} x = 0, \quad k = \overline{1, r}. \quad (18)$$

Действительно, в силу коммутативности операторов $D_e - \lambda_\alpha(\sigma)$ и $D_e - \lambda_\beta(\sigma)$ легко убедиться, что решение каждого уравнения (18) является решением уравнения (17).

Таким образом, интегрирование уравнения (5) при условиях (9)–(15) сводится к решению уравнений (18) со свойством (16).

Перед интегрированием системы (18) будет доказана

Лемма. Уравнение вида

$$[D_e - \gamma(\sigma)]^n x = 0 \quad (19)$$

с натуральной степенью n и дифференцируемой ω -периодической действительной функцией $\gamma(\sigma)$:

$$\gamma(\sigma + k\omega) = \gamma(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad k \in Z^m, \quad (20)$$

имеет решение

$$x = \sum_{j=1}^n u_j(\sigma) \tau^{j-1} e^{\gamma(\sigma)\tau} \quad (21)$$

с произвольными дифференцируемыми функциями $u_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, $\sigma \in R^m$, причем из ω -периодичности их следует ω -периодичность решения (21) по σ .

Доказательство Интегрирование уравнения (19) эквивалентно интегрированию цепочки уравнений

$$\begin{aligned} [D_e - \gamma(\sigma)] x &= x_1, \quad [D_e - \gamma(\sigma)] x_1 = x_2, \quad \dots, \\ [D_e - \gamma(\sigma)] x_{n-2} &= x_{n-1}, \quad [D_e - \gamma(\sigma)] x_{n-1} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Интегрируем систему уравнений (22), начиная с последнего. Тогда имеем

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= c_n(\sigma) e^{\gamma(\sigma)\tau}, \quad x_{n-2} = \left[c_{n-1}(\sigma) + \frac{\tau}{1!} c_n(\sigma) \right] e^{\gamma(\sigma)\tau}, \\ x_{n-3} &= \left[c_{n-2}(\sigma) + \frac{\tau}{1!} c_{n-1}(\sigma) + \frac{\tau^2}{2!} c_n(\sigma) \right] e^{\gamma(\sigma)\tau}, \quad \dots, \\ x_1 &= \left[c_2(\sigma) + \frac{\tau}{1!} c_3(\sigma) + \dots + \frac{\tau^{n-2}}{(n-2)!} c_n(\sigma) \right] e^{\gamma(\sigma)\tau}, \end{aligned}$$

$$x = \left[c_1(\sigma) + \frac{\tau}{1!} c_2(\sigma) + \dots + \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} c_n(\sigma) \right] e^{\gamma(\sigma)\tau} \quad (23)$$

с произвольными дифференцируемыми функциями $c_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$. Из представления (23), положив $\frac{1}{(j-1)!} c_j(\sigma) = u_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, получим формулу (21). В силу условия гладкости (20) функции $\gamma(\sigma) = \gamma(t - e\tau)$ легко проверить, что соотношения (23) дифференцируемы и являются решениями системы (22). При $u_j(\sigma + k\omega) = u_j(\sigma)$, $k \in Z^m$, из (21) следует ω -периодичность общего решения x уравнения (19).

Следствие. Сопряженным двум комплексным дифференцируемым функциям

$$\gamma = \gamma^+(\sigma) = \mu(\sigma) + i\nu(\sigma), \quad \gamma = \gamma^-(\sigma) = \mu(\sigma) - i\nu(\sigma)$$

соответствуют два решения уравнения (19) вида

$$x^+ = \sum_{j=1}^n u_j(\sigma) \tau^{j-1} \cos[\nu(\sigma)\tau] e^{\mu(\sigma)\tau}, \quad (24)$$

$$x^- = \sum_{j=1}^n v_j(\sigma) \tau^{j-1} \sin[\nu(\sigma)\tau] e^{\mu(\sigma)\tau} \quad (25)$$

с произвольными дифференцируемыми функциями $u_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, и $v_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$.

Доказательство. Действительно, подставив $\gamma = \gamma(\sigma)$ в формулу (21), в силу формулы Эйлера получим решение $x = x^+ + ix^-$ вида

$$e^{[\mu(\sigma) + i\nu(\sigma)]\tau} = e^{\mu(\sigma)\tau} \{ \cos[\nu(\sigma)\tau] + i \sin[\nu(\sigma)\tau] \}.$$

Очевидно, что в случае комплекснозначного решения x его действительная часть $\operatorname{Re} x = x^+$ и мнимая часть $\operatorname{Im} x = x^-$ в отдельности являются решениями, причем замена $\gamma(\sigma) = \mu(\sigma) - i\nu(\sigma)$ порождает решение, которое отличается от решения (25) только отрицательным знаком. Так как линейная комбинация $c_1(\sigma)x^+ + c_2(\sigma)x^-$ с произвольными дифференцируемыми функциями $c_1(\sigma)$ и $c_2(\sigma)$ является также решением уравнения (19), то это свойство решений позволяет рассмотреть решения (24) и (25) с различными дифференцируемыми коэффициентами $u_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, и $v_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$. $\square$

Таким образом, из леммы в случае действительной функции $\gamma(\sigma)$ следует, что общее решение x уравнения (19) является линейной комбинацией линейно независимых функций

$$x_1 = e^{\gamma(\sigma)\tau}, \quad x_2 = \tau e^{\gamma(\sigma)\tau}, \quad \dots, \quad x_n = \tau^{n-1} e^{\gamma(\sigma)\tau}, \quad (26)$$

а в случае комплекснозначной функции $\gamma(\sigma) = \gamma^+(\sigma) = \mu(\sigma) + i\nu(\sigma)$ или $\gamma(\sigma) = \gamma^-(\sigma) = \mu(\sigma) - i\nu(\sigma)$ решение x согласно следствию леммы представимо линейно относительно функций

$$\begin{aligned} x_{11} &= e^{\mu(\sigma)\tau} \cos \nu(\sigma)\tau, \quad x_{12} = \tau e^{\mu(\sigma)\tau} \cos \nu(\sigma)\tau, \quad \dots, \quad x_{1n} = \tau^{n-1} e^{\mu(\sigma)\tau} \cos \nu(\sigma)\tau, \\ x_{21} &= e^{\mu(\sigma)\tau} \sin \nu(\sigma)\tau, \quad x_{22} = \tau e^{\mu(\sigma)\tau} \sin \nu(\sigma)\tau, \quad \dots, \quad x_{2n} = \tau^{n-1} e^{\mu(\sigma)\tau} \sin \nu(\sigma)\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

Отметим, что каждая из этих функций (26) и (27) является решением уравнения (5).

Теперь допустим, что первые $2r_0$ корней $\lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_{2r_0}(\sigma)$ характеристического уравнения (7) комплексные, а остальные $r - 2r_0 = r_1$ корней $\lambda_{2r_0+1}(\sigma), \dots, \lambda_r(\sigma)$ действительные, причем будем считать выполненными предположения (9)–(15).

Тогда решение x системы уравнений (18), эквивалентной уравнению (5), согласно лемме и ее следствию линейно выражается через функцию видов (26) и (27), которые определяются

соотношениями:

$$x_{\alpha j}^+(\tau, \sigma) = \tau^{j-1} e^{\mu_\alpha(\sigma)\tau} \cos \nu_\alpha(\sigma)\tau, \quad x_{\alpha j}^-(\tau, \sigma) = \tau^{j-1} e^{\mu_\alpha(\sigma)\tau} \sin \nu_\alpha(\sigma)\tau, \quad (28)$$

$$\alpha = \overline{1, r_0}, \quad j = \overline{1, n_\alpha}, \quad \tau \in R, \quad \sigma \in R^m,$$

$$x_{\beta j}(\tau, \sigma) = \tau^{j-1} e^{\lambda_\beta(\sigma)\tau}, \quad \beta = \overline{2r_0+1, r}, \quad j = \overline{1, n_\beta}, \quad (29)$$

где $\lambda_\alpha = \mu_\alpha + i\nu_\alpha$, $\alpha = \overline{1, r_0}$, $\lambda_{\alpha+\gamma} = \mu_\gamma - i\nu_\gamma$, $\gamma = \overline{1, r_0}$.

Следовательно, общее решение $x(\tau, \sigma)$ уравнения (5) через функции (28) и (29) представляется в виде

$$x(\tau, \sigma) = \sum_{\alpha=1}^{r_0} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \left[u_{\alpha j}(\sigma) x_{\alpha j}^+(\tau, \sigma) + v_{\alpha j}(\sigma) x_{\alpha j}^-(\tau, \sigma) \right] + \sum_{\beta=2r_0+1}^r \sum_{l=1}^{n_\beta} w_{\beta l}(\sigma) x_{\beta l}(\tau, \sigma), \quad \tau \in R, \quad \sigma \in R^m, \quad (30)$$

с произвольно дифференцируемыми коэффициентами $u_{\alpha j}(\sigma)$, $v_{\alpha j}(\sigma)$, $w_{\beta l}(\sigma)$, $j = \overline{1, n_\alpha}$, $\beta = \overline{2r_0+1, r}$.

Теорема 1. При условиях (3) и (9)–(15) общее решение линейного однородного уравнения (5) с оператором (1) представляется формулами (28)–(30).

3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Задача о существовании решения x уравнения (5), удовлетворяющего условиям

$$x|_{\tau=0} = x_1^0(t), \quad D_e x|_{\tau=0} = x_2^0(t), \quad \dots, \quad D_e^{n-1} x|_{\tau=0} = x_n^0(t) \quad (31)$$

с заданными в R^m дифференцируемыми функциями $x_j^0(t)$, $j = \overline{1, n}$, называется начальной задачей для уравнения (5).

В силу требований (9)–(15) решения (28)–(29) линейно независимы. Следовательно, задача (5), (31) разрешима единственным образом на основе общего решения (30) по методике, известной из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для построения решения задачи (5), (31) составляются решения $x_j(\tau, \sigma)$, $j = \overline{1, n}$, с начальными условиями $D_e^{i-1} x_j|_{\tau=0} = 0$ при $i \neq j$ и $D_e^{i-1} x_j|_{\tau=0} = 1$ при $i = j$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Тогда общее решение (30) уравнения (5) через эти решения можно представить в виде

$$x(\tau, \sigma) = \sum_{j=1}^n u_j(\sigma) x_j(\tau, \sigma) \quad (32)$$

с произвольно дифференцируемыми функциями $u_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$.

На основе представления (30) решение задачи (5), (31) выражается формулой

$$x(\tau, \sigma) = \sum_{j=1}^n x_j^0(\sigma) x_j(\tau, \sigma). \quad (33)$$

Решение (33) можно назвать общим решением уравнения (5) в форме Коши.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Как видно из постановки задачи (5), (31) и структуры общего решения в форме Коши (33), задача интегрирования уравнения (5) тесно связана с матричной функцией

$$X(\tau, \sigma) = \begin{pmatrix} x_1(\tau, \sigma) & \dots & x_n(\tau, \sigma) \\ D_e x_1(\tau, \sigma) & \dots & D_e x_n(\tau, \sigma) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_e^{n-1} x_1(\tau, \sigma) & \dots & D_e^{n-1} x_n(\tau, \sigma) \end{pmatrix}, \quad (34)$$

обращающейся в единичную матрицу E при $\tau = 0$, причем в силу линейной независимости решений $x_j(\tau, \sigma)$, $j = \overline{1, n}$, имеем $\det X(\tau, \sigma) \neq 0$.

Эта связь полезна при интегрировании неоднородного уравнения (2) методом вариации произвольных постоянных, обобщенным на рассматриваемый случай.

Действительно, заменив произвольные функции $u_j(\sigma)$, зависящие только от $\sigma \in R^m$, на неизвестные функции $\xi_j(\tau, t, \sigma)$, $j = \overline{1, n}$, в (32), решение x неоднородного уравнения (2) будем искать в виде

$$x(\tau, t, \sigma) = \sum_{j=1}^n \xi_j(\tau, t, \sigma) x_j(\tau, \sigma).$$

Согласно этому методу функции $\xi_j(\tau, t, \sigma)$, $j = \overline{1, n}$, определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j(\tau, \sigma) D_e \xi_j(\tau, t, \sigma) &= 0, \quad \sum_{j=1}^n D_e x_j(\tau, \sigma) D_e \xi_j(\tau, t, \sigma) = 0, \quad \dots, \\ \sum_{j=1}^n D_e^{n-2} x_j(\tau, \sigma) D_e \xi_j(\tau, t, \sigma) &= 0, \quad \sum_{j=1}^n D_e^{n-1} x_j(\tau, \sigma) D_e \xi_j(\tau, t, \sigma) = f(\tau, t, \sigma), \end{aligned} \quad (35)$$

а само решение x и результаты $D_e x, \dots, D_e^{n-1} x$ повторных действий оператора D_e определяются соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n x_j(\tau, \sigma) \xi_j(\tau, t, \sigma), \quad D_e x = \sum_{j=1}^n D_e x_j(\tau, \sigma) \xi_j(\tau, t, \sigma), \quad \dots, \\ D_e^{n-1} x &= \sum_{j=1}^n D_e^{n-1} x_j(\tau, \sigma) \xi_j(\tau, t, \sigma). \end{aligned} \quad (36)$$

Если положим $\xi(\tau, \sigma) = (\xi_1(\tau, t, \sigma), \dots, \xi_n(\tau, t, \sigma))$ и $\bar{f}(\tau, t, \sigma) = (0, \dots, 0, f(\tau, t, \sigma))$, то системы (35) и (36) можно представить в удобной векторно-матричной форме:

$$X(\tau, \sigma) D_e \xi(\tau, t, \sigma) = \bar{f}(\tau, t, \sigma), \quad (37)$$

$$\hat{x}(\tau, t, \sigma) = X(\tau, \sigma) \xi(\tau, t, \sigma), \quad (38)$$

где вектор-функция $\hat{x}(\tau, t, \sigma) = (x(\tau, t, \sigma), D_e x(\tau, t, \sigma), \dots, D_e^{n-1} x(\tau, t, \sigma))$.

Теперь из уравнения (37) имеем

$$D_e \xi(\tau, t, \sigma) = X^{-1}(\tau, \sigma) \bar{f}(\tau, t, \sigma). \quad (39)$$

Интегрируем уравнение (39) вдоль характеристики $\tau = s$, $t = \sigma + es$ по s от 0 до τ , а затем переходим в пространство переменных (τ, t) по формуле $\sigma = t - e\tau$. Получим

$$\xi(\tau, t, \sigma) = u(\sigma) + \int_0^\tau X^{-1}(s, \sigma) f(s, t - e\tau + es, \sigma) ds, \quad (40)$$

где $\sigma = t - e\tau$, $u(\sigma)$ — произвольная дифференцируемая вектор-функция с компонентами $u_1(\sigma), \dots, u_n(\sigma)$.

Подставив выражение (40) в уравнение (38), получим

$$\hat{x}(\tau, t, \sigma) = X(\tau, \sigma) \int_0^\tau X^{-1}(s, \sigma) \bar{f}(s, t - e\tau + es, \sigma) ds + X(\tau, \sigma) u(\sigma), \quad (41)$$

где второе слагаемое

$$\tilde{x}(\tau, \sigma) = X(\tau, \sigma) u(\sigma) \quad (42)$$

равенства (41) представляет вектор-функцию $\tilde{x}(\tau, \sigma) = (x(\tau, \sigma), D_e x(\tau, \sigma), \dots, D_e^{n-1} x(\tau, \sigma))$, построенную общим решением (32) однородного уравнения (5). Тогда первое слагаемое

$$\check{x}(\tau, t, \sigma) = X(\tau, \sigma) \int_0^\tau X^{-1}(s, \sigma) \bar{f}(s, t - e\tau + es, \sigma) ds \quad (43)$$

в силу линейности уравнения (2) порождается некоторым его частным решением $\check{x}(\tau, t, \sigma)$: $\check{x}(\tau, t, \sigma) = (\check{x}(\tau, t, \sigma), D_e \check{x}(\tau, t, \sigma), \dots, D_e^{n-1} \check{x}(\tau, t, \sigma))$. Следовательно, из соотношений (41)–(43) имеем

$$\hat{x}(\tau, t, \sigma) = \tilde{x}(\tau, \sigma) + \check{x}(\tau, t, \sigma). \quad (44)$$

Таким образом, первой компонентой

$$x(\tau, t, \sigma) = \sum_{j=1}^n u_j(\sigma) x_j(\tau, \sigma) + \check{x}(\tau, t, \sigma) \quad (45)$$

вектор-функции (44) определяется общее решение неоднородного уравнения (2).

Теорема 2. При условиях (3), (4) и (9)–(15) общее решение неоднородного уравнения (2) представляется формулами (34) и (42)–(45).

Решение задачи Коши с начальным условием (31) для уравнения (2) на основе формулы (45) можно представить в виде

$$x(\tau, t, \sigma) = \sum_{j=1}^n x_j^0(\sigma) x_j(\tau, \sigma) + \check{x}(\tau, t, \sigma). \quad (46)$$

В этом легко можно убедиться непосредственной проверкой.

Соотношение (46) — это общее решение в форме Коши для уравнения (2).

5. МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Многопериодические решения исследуемых однородных уравнений относятся к их ограниченным решениям, которые согласно структуре общего решения появляются при

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) = \mu_j(\sigma) = 0, \quad \sigma \in R^m, \quad j = \overline{1, n}.$$

В связи с этим рассмотрим два случая: а) когда уравнение имеет нулевой характеристический корень $\lambda = 0$ и б) когда уравнение имеет сопряженные чисто мнимые корни $\lambda = \pm i\nu(\sigma) \neq 0, \sigma \in R^m$.

В случае а) рассмотрим уравнение

$$D_e^n x = 0, \quad (47)$$

которое получим в силу системы (18) и исследуем его периодическое по τ и ω -периодическое по σ решение $x = x^*(\tau, \sigma)$.

Общее решение $x(\tau, \sigma)$ уравнения (47) имеет вид

$$x(\tau, \sigma) = \sum_{j=1}^n c_j(\sigma) \tau^{j-1} \quad (48)$$

с произвольно дифференцируемыми функциями $c_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$.

Из представления (48) следует, что искомое решение $x_*(\tau, \sigma)$ уравнения (47) имеет вид

$$x_*(\tau, \sigma) = u(\sigma), \quad u(\sigma + k\omega) = u(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad k \in Z^m.$$

В случае b) из системы (18) имеем уравнение

$$[D_e - i\nu(\sigma)]^n [D_e + i\nu(\sigma)]^n x = [D_e^2 + \nu^2(\sigma)]^n x = 0, \quad (49)$$

которое интегрируется по цепочке уравнений

$$\begin{aligned} [D_e^2 + \nu^2(\sigma)]^n x &= x_1, \quad [D_e^2 + \nu^2(\sigma)]^n x_1 = x_2, \quad \dots, \\ [D_e^2 + \nu^2(\sigma)]^n x_{n-2} &= x_{n-1}, \quad [D_e^2 + \nu^2(\sigma)]^n x_{n-1} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Отсюда легко иметь ограниченные решения последнего уравнения в виде

$$x_{n-1} = c_{n-1}^+(\sigma) \cos \nu(\sigma)\tau + c_{n-1}^-(\sigma) \sin \nu(\sigma)\tau,$$

которые по τ являются периодическими с переменным периодом $\theta = 2\pi/\nu(\sigma)$ и переменной частотой $\nu(\sigma)$, где $c_{n-1}^\pm(\sigma)$ — ω -периодические дифференцируемые функции.

Последующее уравнение имеет общее решение

$$x_{n-2} = c_{n-2}^+(\sigma) \cos \nu(\sigma)\tau + c_{n-2}^-(\sigma) \sin \nu(\sigma)\tau + \tau \left[-\frac{1}{2\nu} c_{n-1}^-(\sigma) \cos \nu(\sigma)\tau + \frac{1}{2\nu} c_{n-1}^+(\sigma) \sin \nu(\sigma)\tau \right],$$

из которого имеем ограниченные решения при $c_{n-1}^+(\sigma) = c_{n-1}^-(\sigma) = 0$, $\sigma \in R^m$, а $c_{n-2}^\pm(\sigma)$ — произвольные дифференцируемые ω -периодические функции.

Таким образом, предпоследнее уравнение системы (50) имеет ограниченные решения вида

$$x_{n-2} = c_{n-2}^+(\sigma) \cos \nu(\sigma)\tau + c_{n-2}^-(\sigma) \sin \nu(\sigma)\tau,$$

которые $(2\pi/\nu(\sigma), \omega)$ -периодические по $(\tau, \sigma) \in R \times R^m$.

Продолжив этот процесс по построению ограниченных решений, доходим до первого уравнения системы (50) и получим решение вида

$$x^*(\tau, \sigma) = u^+(\sigma) \cos \nu(\sigma)\tau + u^-(\sigma) \sin \nu(\sigma)\tau, \quad u^\pm(\sigma + k\omega) = u^\pm(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m). \quad (51)$$

Заметим, что $\sigma = t - e\tau$ при интегрировании уравнений (47) и (49) ведет себя как параметр. Следовательно, период решений $\theta^* = \theta^*(\sigma)$ будет периодической функцией по σ с периодом ω :

$$\theta^*(\sigma) = 2\pi/\nu(\sigma), \quad \nu(\sigma + k\omega) = \nu(\sigma) \in C_\sigma^{(e)}(R^m), \quad k \in Z^m. \quad (52)$$

Частота $\nu(\sigma)$ на главной диагонали $t = e\tau$ обращается в постоянную $\nu(0) = \nu_0$, следовательно, период $\theta(0) = 2\pi/\nu_0 = \theta_0$ также постоянен.

Отметим, что однородное уравнение (5) может иметь несколько чисто мнимых корней $\lambda_\alpha(\sigma) = \pm i\nu_\alpha(\sigma)$ с кратностью n_α , $\alpha = \overline{1, r_*}$, $r_* \leq r \leq n$. Соответственно с каждым случаем $\alpha = \overline{1, r_*}$, $r_* \leq r \leq n$, будем иметь ограниченные, точнее $(\theta_\alpha^*(\sigma), \omega)$ -периодические по (τ, σ) решения $x_\alpha^*(\tau, \sigma)$ согласно формулам (49)–(52).

Таким образом, справедлива

Теорема 3. При условиях (1) и (9)–(15) однородное уравнение (5) может иметь много-периодические по (τ, σ) с периодом $(\theta_\alpha^*(\sigma), \omega)$ решения, если среди корней характеристического многочлена (8) существуют нулевой и чисто мнимые корни, причем они по σ имеют период ω , а в случае чисто мнимых корней по τ периоды θ_α^* , $\alpha = \overline{1, r_*}$, могут быть функциями переменной σ , периодическими с тем же периодом ω .

В дальнейшем предположим, что в случае существования чисто мнимых корней $\pm i\nu_\alpha(\sigma)$ характеристического уравнения (7) имеет место условие

$$2\pi/\nu_\alpha(\sigma) = \theta_\alpha^*(\sigma) \neq \theta, \quad \alpha = \overline{1, r_*}, \quad \sigma \in R^m, \quad (53)$$

где θ — период вектор-функции $f(\tau, t, \sigma)$ по τ .

Следовательно, линейно независимые решения

$$x_1(\tau, \sigma), \dots, x_n(\tau, \sigma), D_e^{i-1}x_j|_{\tau=0} = 0, \quad i \neq j, \quad D_e^{i-1}x_j|_{\tau=0} = 1, \quad i = j \quad (i, j = \overline{1, n}), \quad (54)$$

однородного уравнения (5) в силу условия (53) не являются θ -периодическими по τ при любых значениях $\sigma \in R^m$. В частности, имеем

$$x_j(\theta, t) \neq x_j(0, t), \quad j = \overline{1, n}, \quad t \in R^m. \quad (55)$$

Значит, матрица $X(\tau, \sigma)$, определенная соотношением (34) на основе решений (54), также обладает свойством (55), которое можно представить в виде

$$\det [X(\theta, t) - E] \neq 0, \quad t \in R^m. \quad (56)$$

Очевидно, условия (53) и (56) эквивалентные, при которых отсутствуют θ -периодические по τ решения однородного уравнения (5), кроме нулевого. В связи с этим в дальнейшем предположим выполненным условие (56).

Приступим к изучению многопериодических решений неоднородного уравнения (2). Исследуем (θ, ω, ω) -периодические по (τ, t, σ) решения уравнения (2):

$$x(\tau + \theta, t + k\omega, \sigma + k\omega) = x(\tau, t, \sigma), \quad k \in Z^m. \quad (57)$$

С этой целью от уравнения (2) переходим к системе уравнений

$$D_e y = A(\sigma)y + \bar{f}(\tau, t, \sigma), \quad (58)$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $y_1 = x$, $y_2 = D_e y_1, \dots, y_n = D_e y_{n-1}$,

$$A(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$\bar{f}(\tau, t, \sigma) = (0, \dots, 0, f(\tau, t, \sigma))$, $a_j = a_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$.

Тогда нетрудно убедиться, что матрица $X(\tau, \sigma)$, определенная соотношением (34), удовлетворяет уравнению

$$D_e x = A(\sigma)x \quad (59)$$

с начальным условием $X(0, t) = E$, а вектор-функция $y = \hat{x}(\tau, t, \sigma)$, определенная равенством (41), представляет собой общее решение уравнения (58)

$$y(\tau, t, \sigma) = X(\tau, \sigma)u(\sigma) + X(\tau, \sigma) \int_0^\tau X^{-1}(s, \sigma) \bar{f}(s, t - e\tau + es, \sigma) ds. \quad (60)$$

Таким образом, задача (2), (57) о (θ, ω, ω) -периодических по (τ, t, σ) решениях уравнения (2) сводится к вопросу о таких решениях системы (58).

В дальнейшем предположим, что уравнение (5) и, следовательно, однородная линейная система (59) не имеют (θ, ω, ω) -периодических по (τ, t, σ) решений, кроме нулевого.

Следовательно, матричное решение $X(\tau, \sigma)$ обладает свойством (56).

Очевидно, для того чтобы решение (60) было ω -периодическим по σ , необходимо и достаточно, чтобы начальная вектор-функция $u(\sigma)$ была ω -периодической дифференцируемой функцией. Этим же условием обеспечивается ω -периодичность решения (60) и по вектору t .

Теперь остается вопрос о выборе ω -периодической вектор-функции $u(\sigma)$ так, чтобы решение (60) было θ -периодическим по τ .

На основе (60) имеем решение $y(\tau + \theta, t, \sigma)$, полученное сдвигом τ на период θ :

$$y(\tau + \theta, t, \sigma) = X(\tau + \theta, \sigma) \left[u(\sigma) + \int_0^{\tau+\theta} X^{-1}(s, \sigma) \bar{f}(s, t - e\tau - e\theta + es, \sigma) ds \right]. \quad (61)$$

Далее решения (60) и (61) предположив равными, т. е. допустив существование θ -периодического решения

$$y(\tau + \theta, t, \sigma) = y(\tau, t, \sigma),$$

при $u(\sigma) = u^*(\sigma)$ имеем

$$\begin{aligned} X^{-1}(\tau + \theta, \sigma)y(\tau, t, \sigma) &= u^*(\sigma) + \int_0^{\tau+\theta} X^{-1}(s, \sigma)\bar{f}(s, t - e\tau - e\theta + es, \sigma)ds, \\ X^{-1}(\tau, \sigma)y(\tau, t, \sigma) &= u^*(\sigma) - \int_{\tau}^0 X^{-1}(s, \sigma)\bar{f}(s, t - e\tau + es, \sigma)ds. \end{aligned}$$

Отсюда, освобождаясь от $u^*(\sigma)$, получим

$$[X^{-1}(\tau + \theta, \sigma) - X^{-1}(\tau, \sigma)]y(\tau, t, \sigma) = \int_{\tau}^{\tau+\theta} X^{-1}(s, \sigma)\bar{f}_{\theta}(s, t - e\tau + es, \sigma)ds, \quad (62)$$

где

$$\bar{f}_{\theta}(s, \sigma + es, \sigma) = \begin{cases} \bar{f}(s, \sigma + es, \sigma), & \tau \xrightarrow{s} 0; \\ \bar{f}(s, \sigma - e\tau + es, \sigma), & 0 \xrightarrow{s} \tau + \theta, \end{cases}$$

для всех $\sigma \in R^m$.

Матрица $X(\tau, \sigma)$ обладает свойством

$$X(\tau + \theta, \sigma) = X(\tau, \sigma)X(\theta, \sigma). \quad (63)$$

Следовательно, $X^{-1}(\tau + \theta, \sigma) = X^{-1}(\theta, \sigma)X^{-1}(\tau, \sigma)$. Тогда согласно условию (56) имеем

$$X^{-1}(\tau + \theta, \sigma) - X^{-1}(\tau, \sigma) = [X^{-1}(\theta, \sigma) - E]X^{-1}(\tau, \sigma). \quad (64)$$

Таким образом, θ -периодическое по τ решение $y(\tau, t, \sigma)$ уравнения (57) в силу (62) и (64) имеет вид

$$y(\tau, t, \sigma) = X(\tau, \sigma) [X^{-1}(\theta, \sigma) - E]^{-1} \int_{\tau}^{\tau+\theta} X^{-1}(s, \sigma)\bar{f}_{\theta}(s, t - e\tau + es, \sigma)ds. \quad (65)$$

Очевидно, первая компонента $y_1(\tau, t, \sigma) = x(\tau, t, \sigma)$ вектор-функции (65) является (θ, ω, ω) -периодическим решением уравнения (2).

Если существует (θ, ω, ω) -периодическое решение $y(\tau, t, \sigma)$ уравнения (57), то в силу условия (56) оно является единственным. В противном случае разность двух различных многопериодических решений уравнения (57) является не нулевым многопериодическим решением однородного уравнения (58), которое противоречит условию (56) о существовании только нулевого многопериодического решения.

Так как вопросы существования (θ, ω, ω) -периодических решений уравнения (2) и системы (57) эквивалентны, то будет верна

Теорема 4. Если при выполнении условий (3), (4), (9)–(15) и (56) существует (θ, ω, ω) -периодическое решение $y(\tau, t, \sigma)$ системы (57), то его можно представить в виде (65) и оно является единственным, причем его первая компонента $y_1(\tau, t, \sigma) = x(\tau, t, \sigma)$ является единственным (θ, ω, ω) -периодическим решением неоднородного линейного уравнения (2) с оператором (1).

Теперь выясним условия существования (θ, ω, ω) -периодического решения уравнения (2), а следовательно, системы (57). Очевидно, что этот вопрос связан с существованием начальной ω -периодической дифференцируемой функции $u^*(\sigma)$, определяющей решение

$$y^*(\tau, t, \sigma) = X(\tau, \sigma)u^*(t - e\tau) + X(\tau, \sigma) \int_0^\tau X^{-1}(s, \sigma)\bar{f}(s, t - e\tau + es, \sigma)ds. \quad (66)$$

Далее, пользуясь свойством (63), заменив s на $s + \theta$ под интегралом из (66), получим решение

$$\begin{aligned} y^*(\tau + \theta, t, \sigma) &= X(\tau + \theta, \sigma)u^*(t - e\tau - e\theta) + X(\tau + \theta, \sigma) \int_0^{\tau+\theta} X^{-1}(s, \sigma)\bar{f}(s, t - e\tau + es, \sigma)ds = \\ &= X(\tau, \sigma)X(\theta, \sigma)u^*(t - e\tau - e\theta) + X(\tau, \sigma) \int_{-\theta}^\tau X^{-1}(s + \theta, \sigma)\bar{f}(s + \theta, t - e\tau + es, \sigma)ds = \\ &= X(\tau, \sigma)X(\theta, \sigma)u^*(t - e\tau - e\theta) + X(\tau, \sigma)X(\theta, \sigma) \int_{-\theta}^\tau X^{-1}(\theta, \sigma)X^{-1}(s, \sigma)\bar{f}(s, t - e\tau + es, \sigma)ds = \\ &= X(\tau, \sigma) \left[X(\theta, \sigma)u^*(t - e\tau - e\theta) + \left(\int_{-\theta}^0 + \int_0^\tau \right) X^{-1}(s, \sigma)\bar{f}(s, t - e\tau + es, \sigma)ds \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

Определив разность $y^*(\tau + \theta, t, \sigma) - y^*(\tau, t, \sigma)$ из соотношений (66) и (67), умножив на $X^{-1}(\tau, \sigma)$ слева и положив $\tau = 0$, имеем функционально-разностное уравнение

$$u^*(t) = X(\theta, \sigma)u^*(t - e\theta) + \varphi(t), \quad \varphi(t) = \int_{-\theta}^0 X^{-1}(s, \sigma)\bar{f}(s, t + es, \sigma)ds, \quad (68)$$

с условием

$$u^*(t + k\omega) = u^*(t) \in C_t^{(e)}(R^m), \quad k \in Z^m. \quad (68_*)$$

Таким образом, получим следующий результат.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (3), (4), (9)–(15) и (56). Тогда для того чтобы уравнение (2), а следовательно, система (57) имела (θ, ω, ω) -периодическое решение $y^*(\tau, t, \sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы задача (68)–(68_{*}) была однозначно разрешима.

Наконец, приводим достаточные условия существования (θ, ω, ω) -периодического решения системы (57).

Условие некритичности вида

$$|X(\tau, \sigma)X^{-1}(s, \sigma)| \leq \epsilon e^{-\delta(\tau-s)}, \quad t \geq s, \quad (69)$$

с постоянными $\epsilon \geq 1$, $\delta > 0$ будет выполнено, когда все собственные значения $\lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, имеют отрицательные действительные части. Тогда в силу свойства (63) для натурального l

$$X^l(\theta, \sigma) = X(\tau + l\theta, \sigma)X^{-1}(\tau, \sigma). \quad (70)$$

Следовательно, из соотношений (69) и (70) имеем оценку

$$|X^l(\theta, \sigma)| \leq \epsilon e^{-\delta l\theta}, \quad l > 0. \quad (71)$$

Используя метод итераций l раз, из уравнения (68) получим

$$\begin{aligned} u^*(t) &= X^2(\theta, \sigma)u^*(t - 2e\theta) + X(\theta, \sigma)\varphi(t - e\theta) + \varphi(t) = \\ &= \dots = X^l(\theta, \sigma)u^*(t - le\theta) + \sum_{\beta=0}^{l-1} X^\beta(\theta, \sigma)\varphi(t - \beta e\theta). \end{aligned}$$

Учитывая ограниченность многопериодической непрерывной функции $u^*(t)$ и оценку (71), переходя к пределу при $l \rightarrow +\infty$, отсюда имеем решение

$$u^*(t) = \sum_{\beta=0}^{\infty} X^\beta(\theta, \sigma)\varphi(t - \beta e\theta) \quad (72)$$

функционально-разностного уравнения (68).

Очевидно, решение (72) является (ω, ω) -периодическим по (t, σ) , непрерывно дифференцируемым по ним и единственным. Тогда согласно теореме 5 можем утверждать, что система (57) имеет единственное многопериодическое решение.

Таким образом, справедлива

Теорема 6. Пусть выполнены условия (3), (4), (9)–(15), (56) и (69). Тогда система (57), а следовательно, уравнение (2) имеет единственное (θ, ω, ω) -периодическое решение.

В заключение отметим, что данное исследование по вопросу интегрирования рассматриваемого линейного уравнения, установления условий существования его многопериодических решений, определения интегрального представления многопериодических решений и разработки новых элементов методики исследования этих задач являются существенным дополнением к теории многопериодических систем уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения (Удм.ГУ, Ижевск, 2000).
- [2] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (Наука, Москва, 1978).
- [3] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения (Наука, Москва, 1980).
- [4] Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных (Наука, Алма-Ата, 1979).
- [5] Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений (Наука, Алма-Ата, 1970).
- [6] Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем (РИЦ ЗКГУ, Уральск, 2013).
- [7] Кульжумиева А.А. Исследование периодических решений приводимых к каноническому виду систем с линейным дифференциальным оператором по многомерному времени, Евразийский матем. журн. (2), 69–73 (2008).
- [8] Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. О приводимости линейной D_e -системы с постоянными на диагонали коэффициентами к D_e -системе с жордановой матрицей в случае эквивалентности ее одному уравнению высшего порядка, Вестн. КарГУ, Сер. Матем. (4), 88–94 (2016).
- [9] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. Reduction of linear homogeneous D_e -systems to the jordan canonical form, Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем. **315** (5), 5–12 (2017).
- [10] Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A. On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables, Eurasian Math. J. **8** (1), 67–75 (2017).
- [11] Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Построение периодического решения квазилинейной системы, Вестн. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева **121** (6), 25–29 (2017).
- [12] Сартабанов Ж.А., Кульжумиева А.А. Приводимость линейных многопериодических уравнений с оператором дифференцирования по диагонали, Матем. журн. **67** (1), 139–150 (2018) (Ин-т матем. и матем. моделирования, Алматы).

Айман Амангельдиевна Кульжумиева,

*Западно-Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова,
пр. Достык, д. 162, г. Уральск, 090000, Республика Казахстан,*

e-mail: aiman-80@mail.ru

Жайшылык Алмаганбетович Сартабанов,

*Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова,
пр. А. Молдагуловой, д. 34, г. Актобе, 030000, Республика Казахстан,*

e-mail: sartabanov42@mail.ru

A.A. Kulzhumiyeva and Zh.A. Sartabanov

Integration of linear equation with differentiation operator by main diagonal of a space of independent variables with constant on it coefficients

Abstract. We consider the n -th order linear equation with differentiation operator in the direction of the main diagonal of the space of independent variables and with variables but constants coefficients on the diagonal. The conditions on variable eigenvalues gave the possibility, when integrating the equation, to realize known methods for ordinary differential equations are established. On this basis, the structures of solutions of the homogeneous equation are determined. The conditions for existence of multiperiodic solutions of the equations related to variable eigenvalues and initial functions are given. The integral representation of a multiperiodic solution of nonhomogeneous equation is given. The concepts of variable frequency and variable period are introduced.

Keywords: linear equation, differential operator, eigenvalues, multiperiodic solution.

Aiman Amangeldievna Kulzhumiyeva

*M. Utemisov West-Kazakhstan State University,
162 Dostyk Ave., Uralsk, 090000 Republic of Kazakhstan,*

e-mail: aiman-80@mail.ru

Zhaishylyk Almagambetovich Sartabanov

*K. Zhubanov Aktobe Regional State University,
34 A. Moldagulova Ave., Aktobe, 030000 Republic of Kazakhstan,*

e-mail: sartabanov42@mail.ru