Общероссийский математический портал

Л. Б. Миронова, Применение метода Римана к одной системе в трехмерном пространстве, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 6, 48–57

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-48-57>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:57:26

Л.Б. МИРОНОВА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИМАНА К ОДНОЙ СИСТЕМЕ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Для системы трех уравнений второго порядка доказаны существование и единственность решений задачи Коши и задачи с условиями на характеристиках и свободной поверхности, построены решения указанных задач в терминах матрицы Римана.

Ключевые слова: гиперболическая система, метод Римана, матрица Римана, задача Коши, характеристики.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-48-57

Введение. Система уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(x_1, \dots, x_n) u_k + f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

исследовалась многими авторами (например, [1]–[3] и литература при этих статьях). Система (1) представляет интерес, в частности, с точки зрения применения получаемых результатов к изучению важных в теоретическом и практическом отношении дифференциальных уравнений смешанного типа. Наибольшее число публикаций относится к случаю, когда в (1) $n = 2$.

В работе [4] предложен вариант метода Римана для системы дифференциальных уравнений с кратными характеристиками, в терминах матрицы Римана построены решения задач Коши и Гурса. В статье [5] метод Римана применяется для исследования задач для одной системы уравнений с двумя независимыми переменными с кратными характеристиками. Системы гиперболических дифференциальных уравнений в последнее время исследовались рядом авторов в различных направлениях [6]–[10].

В ряде работ В.И. Жегалова и его учеников был разработан метод Римана для класса уравнений с доминирующими частными производными

$$(D_1 + D_2)u = f(x_1, \dots, x_n), \quad (2)$$

где

$$D_1 \equiv \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}},$$

а D_2 — линейный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий лишь производные, получаемые из D_1 отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования [11]–[16]. Уравнение (2) имеет приложения в теориях фильтрации жидкости в

трещиноватых средах, поглощения влаги корнями растений, колебаний стержней с учетом эффектов поперечной инерции, распространения волн в диспергирующих средах.

Отметим также работы Р.К. Романовского, Е.В. Воробьевой, М.В. Мендзив, Ю.А. Медведева, в которых исследованы начально-краевые задачи и задачи оптимального управления для гиперболических систем (в том числе с использованием определенных В.К. Романовским матриц Римана), устойчивость и экспоненциальная дихотомия решений [17]–[21].

В данной статье метод Римана применяется для исследования задачи Коши и задачи с условиями на характеристической и свободной части границы (смешанная задача) для системы уравнений с тремя независимыми переменными

$$\begin{aligned} u_{xx} &= a_1(x, y, z)v_x + b_1(x, y, z)w_x + c_1(x, y, z)u + d_1(x, y, z)v + e_1(x, y, z)w + f_1(x, y, z), \\ v_{yy} &= a_2(x, y, z)u_y + b_2(x, y, z)w_y + c_2(x, y, z)u + d_2(x, y, z)v + e_2(x, y, z)w + f_2(x, y, z), \\ w_{zz} &= a_3(x, y, z)u_z + b_3(x, y, z)v_z + c_3(x, y, z)u + d_3(x, y, z)v + e_3(x, y, z)w + f_3(x, y, z). \end{aligned} \quad (3)$$

Считаем, что в замыкании рассматриваемой области D пространства (x, y, z) выполняются включения $a_i, b_i \in C^2$, $c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1$, $i = \overline{1, n}$. Решение (3) класса $u, v, w \in C^1(D)$, $u_{xx}, v_{yy}, w_{zz} \in C(D)$ назовем регулярным в D .

К системе (3) подстановками

$$\begin{aligned} u^* &= \exp\left(\frac{1}{2} \int_{x_0}^x a_1^*(\alpha, y, z) d\alpha\right) u, \quad v^* = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{y_0}^y b_2^*(x, \beta, z) d\beta\right) v, \\ w^* &= \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z c_3^*(x, y, \gamma) d\gamma\right) w \end{aligned}$$

сводится система со старшими производными вида

$$\begin{aligned} u_{xx}^* &= a_1^*(x, y, z)u_x^* + b_1^*(x, y, z)v_x^* + c_1^*(x, y, z)w_x^* + d_1^*(x, y, z)u^* + \\ &\quad + e_1^*(x, y, z)v^* + f_1^*(x, y, z)w^* + g_1^*(x, y, z), \\ v_{yy}^* &= a_2^*(x, y, z)u_y^* + b_2^*(x, y, z)v_y^* + c_2^*(x, y, z)w_y^* + d_2^*(x, y, z)u^* + \\ &\quad + e_2^*(x, y, z)v^* + f_2^*(x, y, z)w^* + g_2^*(x, y, z), \\ w_{zz}^* &= a_3^*(x, y, z)u_z^* + b_3^*(x, y, z)v_z^* + c_3^*(x, y, z)w_z^* + d_3^*(x, y, z)u^* + \\ &\quad + e_3^*(x, y, z)v^* + f_3^*(x, y, z)w^* + g_3^*(x, y, z). \end{aligned}$$

1. Задача Коши. Пусть $S: z = \sigma(x, y)$ — поверхность класса C^2 в пространстве (x, y, z) , причем S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Пусть для определенности $\sigma'_x < 0$, $\sigma'_y < 0$. Проведем через точку $P(x_0, y_0, z_0)$ плоскости $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, которые пересекают поверхность S по кривым BC , CA и AB соответственно. Плоскости $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ и поверхность S определяют область D , граница которой состоит из двумерных многообразий APC , BSP , BPA и ACB . Ориентацию D считаем положительной.

Задача Коши: найти регулярное в D решение системы (3), удовлетворяющее на поверхности S условиям

$$\begin{aligned} u|_S &= u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_{10}(x, y), \quad v|_S = v_0(x, y), \\ \frac{\partial v}{\partial n}|_S &= v_{10}(x, y), \quad w|_S = w_0(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_S = w_{10}(x, y). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , $u_0, v_0, w_0 \in C^2$, $u_{10}, v_{10}, w_{10} \in C^1$.

Отметим, что поверхность S можно задать уравнениями $y = \sigma^*(x, z)$, $x = \sigma^{**}(y, z)$. Очевидно, условия (4) могут быть записаны в следующих формах:

$$\begin{aligned} u|_S &= u_0^*(x, z), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_{10}^*(x, z), \quad v|_S = v_0^*(x, z), \\ \frac{\partial v}{\partial n}|_S &= v_{10}^*(x, z), \quad w|_S = w_0^*(x, z), \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_S = w_{10}^*(x, z); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u|_S &= u_0^{**}(y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = u_{10}^{**}(y, z), \quad v|_S = v_0^{**}(y, z), \\ \frac{\partial v}{\partial n}|_S &= v_{10}^{**}(y, z), \quad w|_S = w_0^{**}(y, z), \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_S = w_{10}^{**}(y, z). \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим $w_1(x, y, \sigma(x, y)) = \bar{w}_1(x, y)$, $v_1(x, \sigma^*(x, z), z) = \bar{v}_1^*(x, z)$, $u_1(\sigma^{**}(y, z), y, z) = \bar{u}_1^{**}(y, z)$.

Условия (4) (или эквивалентные им (5), (6)) позволяют определить значения частных производных первого порядка функций u , v , w на S . Действительно, например, для w имеем на поверхности S равенства

$$w_x + w_z \sigma_x = w_{0x}, \quad w_y + w_z \sigma_y = w_{0y}, \quad w_x n_1 + w_y n_2 + w_z n_3 = w_{10}. \quad (7)$$

Определитель системы (7)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sigma_x \\ 0 & 1 & \sigma_y \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как первые две строки определителя образуют координаты векторов, касательных к S , а третья образована координатами $\vec{n}$. Поэтому величина $\bar{w}_1(x, y)$ известна в силу (4). Аналогично, будут известными величины $\bar{v}_1^*(x, z)$, $\bar{u}_1^{**}(y, z)$.

Докажем существование и единственность решения задачи Коши (3), (4). Преобразуем (3) к виду

$$\begin{aligned} u_x &= u_1 + a_1 v + b_1 w, \quad u_{1x} = c_1 u + (d_1 - a_{1x})v + (e_1 - b_{1x})w + f_1, \\ v_y &= a_2 u + v_1 + b_2 w, \quad v_{1y} = (c_2 - a_{2y})u + d_2 v + (e_2 - b_{2y})w + f_2, \\ w_z &= a_3 u + b_3 v + w_1, \quad w_{1z} = (c_3 - a_{3z})u + (d_3 - b_{3z})v + e_3 w + f_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим $d_{10} = d_1 - a_{1x}$, $e_{10} = e_1 - b_{1x}$, $c_{20} = c_2 - a_{2y}$, $e_{20} = e_2 - b_{2y}$, $c_{30} = c_3 - a_{3z}$, $d_{30} = d_3 - b_{3z}$. Сведем систему (8) с учетом условий (4)–(6) к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0^{**}(y, z) + \int_{\sigma^{**}(y, z)}^x (u_1 + a_1 v + b_1 w)(\alpha, y, z) d\alpha, \\ u_1(x, y, z) &= \bar{u}_1^{**}(y, z) + \int_{\sigma^{**}(y, z)}^x (c_1 u + d_{10} v + e_{10} w + f_1)(\alpha, y, z) d\alpha, \\ v(x, y, z) &= v_0^*(x, z) + \int_{\sigma^*(x, z)}^y (v_1 + a_2 u + b_2 w)(x, \beta, z) d\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_1(x, y, z) &= \bar{v}_1^*(x, z) + \int_{\sigma^*(x, z)}^y (c_{20}u + d_2v + e_{20}w + f_2)(x, \beta, z) d\beta, \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y) + \int_{\sigma(x, y)}^z (w_1 + a_3u + b_3v)(x, y, \gamma) d\gamma, \\
 w_1(x, y, z) &= \bar{w}_1(x, y) + \int_{\sigma(x, y)}^z (c_{30}u + d_{30}v + e_3w + f_3)(x, y, \gamma) d\gamma.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Решение системы интегральных уравнений Вольтерра (9) существует и единственно в классе непрерывных функций.

Докажем эквивалентность задачи Коши (3), (4) и системы (9). Очевидно, система (9) — следствие (3), (4). Обратно, дифференцируя первое уравнение системы (9), получаем $u_x = u_1$. Кроме того, $u|_S = u_0^{**}(y, z)$, что эквивалентно выполнению условия $u|_S = u_0(x, y)$. Дифференцируем теперь второе уравнение системы (9) по x , в результате получаем первое уравнение (3). При этом $u_1|_S = \bar{u}_1^{**}(y, z)$. Аналогично получаем оставшиеся два уравнения системы (3) и граничные условия $v|_S = v_0^*(x, z)$, $w|_S = w_0(x, y)$, $v_1|_S = \bar{v}_1^*(x, z)$, $w_1|_S = \bar{w}_1(x, y)$. По известным значениям $u_1|_S$, $v|_S$, $w|_S$ определяется $u_x|_S$. На S справедливы соотношения

$$u_y + u_x \sigma_y^{**} = u_{0y}^{**}, \quad u_z + u_x \sigma_z^{**} = u_{0z}^{**}, \quad u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3 = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S,$$

из которых по известным $u|_S$, $u_x|_S$ определяются u_y , u_z на S , а следовательно, и

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = u_{10}.$$

Аналогично получаем предписанные (4) значения $\partial v / \partial n|_S$, $\partial w / \partial n|_S$. Эквивалентность задачи Коши и системы (9) доказана.

Теорема 1. Если в замыкании области D выполняются включения $a_i, b_i \in C^2$, $c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1$, $i = \overline{1, 3}$, то решение задачи Коши (3), (4) существует и единственно.

2. Смешанная задача. Пусть область $D_0 = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$ представляет собой характеристический параллелепипед в пространстве (x, y, z) с отсеченным нехарактеристической поверхностью S : $z = \sigma(x, y)$ класса C^2 трехгранным углом с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0) (рис. 1). Для определенности полагаем $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$, $z_0 \geq 0$, $\sigma'_x < 0$, $\sigma'_y < 0$. Обозначим через X, Y, Z грани D_0 при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно.

Требуется найти регулярное в D_0 решение (3), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}
 u|_{S \cup \bar{X}} &= u_0(y, z), \quad v|_{S \cup \bar{Y}} = v_0(x, z), \quad w|_{S \cup \bar{Z}} = w_0(x, y), \\
 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S &= u_{10}(y, z), \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_S = v_{10}(x, z), \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_S = w_{10}(x, y), \\
 (u_x - a_1v - b_1w)|_{\bar{X}} &= \varphi_1(y, z), \quad (v_y - a_2u - b_2w)|_{\bar{Y}} = \varphi_2(x, z), \\
 (w_z - a_3u - b_3v)|_{\bar{Z}} &= \varphi_3(x, y),
 \end{aligned} \tag{10}$$

$\vec{n}$ — внешняя нормаль к S , $u_0 \in C^1(S \cup \bar{X})$, $u_{10} \in C^2(S \cup \bar{X})$, $\varphi_1 \in C^1(\bar{X})$, $v_0 \in C^1(S \cup \bar{Y})$, $v_{10} \in C^2(S \cup \bar{Y})$, $\varphi_2 \in C^1(\bar{Y})$, $w_0 \in C^1(S \cup \bar{Z})$, $w_{10} \in C^2(S \cup \bar{Z})$, $\varphi_3 \in C^1(\bar{Z})$. Кроме того, должны выполняться условия согласования $u_x \in C(S \cup \bar{X})$, $v_y \in C(S \cup \bar{Y})$, $w_z \in C(S \cup \bar{Z})$.

Рис. 1.

Пусть многообразия $S \cup \overline{X}$, $S \cup \overline{Y}$, $S \cup \overline{Z}$ имеют соответственно уравнения $x = \sigma_1(y, z)$, $y = \sigma_2(x, z)$, $z = \sigma_3(x, y)$. Обозначим

$$\chi_1(y, z) = \begin{cases} \varphi_1(y, z) & \text{на } \overline{X}; \\ (u_x - a_1v - b_1w)(\sigma_1(y, z), y, z) & \text{на } S, \end{cases}$$

$$\chi_2(x, z) = \begin{cases} \varphi_2(x, z) & \text{на } \overline{Y}; \\ (v_y - a_2u - b_2w)(x, \sigma_2(x, z), z) & \text{на } S, \end{cases}$$

$$\chi_3(x, y) = \begin{cases} \varphi_3(x, y) & \text{на } \overline{Z}; \\ (w_z - a_3u - b_3v)(x, y, \sigma_3(x, y)) & \text{на } S. \end{cases}$$

Докажем существование и единственность решения смешанной задачи (3), (10). Сведем систему (8) с условиями (10) к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(y, z) + \int_{\sigma_1(y, z)}^x (u_1 + a_1v + b_1w)(\alpha, y, z) d\alpha, \\ u_1(x, y, z) &= \chi_1(y, z) + \int_{\sigma_1(y, z)}^x (c_1u + d_{10}v + e_{10}w + f_1)(\alpha, y, z) d\alpha, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, z) + \int_{\sigma_2(x, z)}^y (v_1 + a_2u + b_2w)(x, \beta, z) d\beta, \\ v_1(x, y, z) &= \chi_2(x, z) + \int_{\sigma_2(x, z)}^y (c_{20}u + d_2v + e_{20}w + f_2)(x, \beta, z) d\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(x, y, z) &= w_0(x, y) + \int_{\sigma_3(x, y)}^z (w_1 + a_3 u + b_3 v)(x, y, \gamma) d\gamma, \\
 w_1(x, y, z) &= \chi_3(x, y) + \int_{\sigma_3(x, y)}^z (c_{30} u + d_{30} v + e_3 w + f_3)(x, y, \gamma) d\gamma.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Решение системы (11) существует и единственно в классе непрерывных функций. Эквивалентность смешанной задачи и системы (11) доказывается так же, как и в случае задачи Коши.

Теорема 2. Если в замыкании области D_0 выполняются включения $a_i, b_i \in C^2, c_i, d_i, e_i, f_i \in C^1, i = \overline{1, 3}$, то решение смешанной задачи (3), (10) существует и единственно.

3. Построение решений задач в терминах матрицы Римана. Перейдем к выводу формул для решений задачи Коши и смешанной задачи в терминах матрицы Римана. Перепишем (8) в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{U}) &= \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{A}_1 \mathbf{U}_x + \mathbf{A}_2 \mathbf{U}_y + \mathbf{A}_3 \mathbf{U}_z - \mathbf{B} \mathbf{U}, \\
 \mathbf{U} &= \text{colon}(u, u_1, v, v_1, w, w_1),
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{A}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ c_1 & 0 & d_{10} & 0 & e_{10} & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 & b_2 & 0 \\ c_{20} & 0 & d_2 & 0 & e_{20} & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 1 \\ c_{30} & 0 & d_{30} & 0 & e_3 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = \text{colon}(0, f_1, 0, f_2, 0, f_3).$$

Введем матрицу Римана $\mathbf{R} = \text{colon}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{R}_5, \mathbf{R}_6)$, где $\mathbf{R}_i(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4}, r_{i5}, r_{i6}), i = \overline{1, 6}$, являются решениями систем

$$\begin{aligned}
 r_{i1}(x, y, z) &= \delta_{i1} - \int_{\xi}^x (c_1 r_{i2} + a_2 r_{i3} + c_{20} r_{i4} + a_3 r_{i5} + c_{30} r_{i6})(\alpha, y, z) d\alpha, \\
 r_{i2}(x, y, z) &= \delta_{i2} - \int_{\xi}^x r_{i1}(\alpha, y, z) d\alpha, \\
 r_{i3}(x, y, z) &= \delta_{i3} - \int_{\eta}^y (a_1 r_{i1} + d_{10} r_{i2} + d_2 r_{i4} + b_3 r_{i5} + d_{30} r_{i6})(x, \beta, z) d\beta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{i4}(x, y, z) &= \delta_{i4} - \int_{\eta}^y r_{i3}(x, \beta, z) d\beta, \\
r_{i5}(x, y, z) &= \delta_{i5} - \int_{\zeta}^z (b_1 r_{i1} + e_{10} r_{i2} + b_2 r_{i3} + e_{20} r_{i4} + e_3 r_{i6})(x, y, \gamma) d\gamma, \\
r_{i6}(x, y, z) &= \delta_{i6} - \int_{\zeta}^z r_{i5}(x, y, \gamma) d\gamma,
\end{aligned} \tag{13}$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Решения систем (13) при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. По первой тройке аргументов (x, y, z) матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряженной к (12) системе $L^*(\mathbf{V}) = 0$, $L^*(\mathbf{V}) \equiv -(\mathbf{VA}_1)_x - (\mathbf{VA}_2)_y - (\mathbf{VA}_3)_z - \mathbf{VB}$.

Справедливо тождество

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U}) = (\mathbf{RA}_1\mathbf{U})_x + (\mathbf{RA}_2\mathbf{U})_y + (\mathbf{RA}_3\mathbf{U})_z, \tag{14}$$

которое может быть проверено непосредственно. Интегрированием (14) получим решения задачи Коши и смешанной задачи.

Построим решение задачи Коши. Рассмотрим точку $M(\xi, \eta, \zeta) \in D$. Пусть для определенности $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\zeta > 0$, $\sigma_x(x, y) < 0$, $\sigma_y(x, y) < 0$. Проведем через M плоскости $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, пересекающие поверхность S по кривым B_1C_1 , C_1A_1 и A_1B_1 соответственно. Плоскости $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ и поверхность S определяют область $D_1 \subset D$, граница которой состоит из двумерных многообразий A_1MC_1 , B_1C_1M , B_1MA_1 и $A_1C_1B_1$.

Первая строка (14) дает

$$r_{12}f_1 + r_{14}f_2 + r_{16}f_3 = (r_{11}u + r_{12}u_1)_x + (r_{13}v + r_{14}v_1)_y + (r_{15}w + r_{16}w_1)_z, \tag{15}$$

где $r_{1j} = r_{1j}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, остальные функции зависят от (x, y, z) . В силу (13)

$$\begin{aligned}
r_{11}(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) &\equiv 1, \quad r_{12}(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) = r_{13}(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) = \\
&= r_{14}(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) = r_{15}(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) = r_{16}(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Интегрируем (15) по области D_1

$$\begin{aligned}
&\iint_{MB_1C_1} (r_{11}u + r_{12}u_1)(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\beta \wedge d\gamma + \iint_{C_1A_1M} (r_{13}v + r_{14}v_1)(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma \wedge d\alpha + \\
&+ \iint_{MA_1B_1} (r_{15}w + r_{16}w_1)(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) d\alpha \wedge d\beta + \iint_{B_1A_1C_1} (r_{11}u + r_{12}u_1)(x, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\beta \wedge d\gamma + \\
&+ (r_{13}v + r_{14}v_1)(\alpha, y, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma \wedge d\alpha + (r_{15}w + r_{16}w_1)(\alpha, \beta, z, \xi, \eta, \zeta) d\alpha \wedge d\beta = \\
&= \iiint_{D_1} (r_{12}f_1 + r_{14}f_2 + r_{16}f_3)(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\alpha d\beta d\gamma.
\end{aligned}$$

С учетом (16) получаем

$$\iint_{MB_1C_1} u(\xi, \beta, \gamma) d\beta \wedge d\gamma = h_1(\xi, \eta, \zeta), \tag{17}$$

$h_1(\xi, \eta, \zeta)$ выражается через $\mathbf{R}$ и данные Коши (4). Дифференцирование (17) в рассматриваемом случае дает

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 h_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta \partial \zeta}. \tag{18}$$

Аналогично, используя третью и пятую строки (14), получаем выражения для $v(\xi, \eta, \zeta)$ и $w(\xi, \eta, \zeta)$:

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 h_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 h_3(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (19)$$

При этом надо в (18) заменить r_{1j} на r_{3j} и r_{5j} соответственно. Используя вторую, четвертую и шестую строки (14) можно определить u_1, v_1, w_1 .

Заметим, что значения $u|_S, u_1|_S, v|_S, v_1|_S, w|_S, w_1|_S$, требуемые для получения $u(\xi, \eta, \zeta), v(\xi, \eta, \zeta), w(\xi, \eta, \zeta)$ по формулам (18), (19), определяются из (4). Обратно, функции u, v, w , определяемые по (18), (19), и, определяемые из аналогичных формул, функции u_1, v_1, w_1 удовлетворяют на S условиям

$$\begin{aligned} u|_S &= u_0(x, y), \quad v|_S = v_0(x, y), \quad w|_S = w_0(x, y), \\ u_1|_S &= u_x(x, y, \sigma(x, y)) - a_1(x, y, \sigma(x, y))v_0(x, y) - b_1(x, y, \sigma(x, y))w_0(x, y), \\ v_1|_S &= v_y(x, y, \sigma(x, y)) - a_2(x, y, \sigma(x, y))u_0(x, y) - b_2(x, y, \sigma(x, y))w_0(x, y), \\ w_1|_S &= w_z(x, y, \sigma(x, y)) - a_3(x, y, \sigma(x, y))u_0(x, y) - b_3(x, y, \sigma(x, y))v_0(x, y). \end{aligned} \quad (20)$$

Чтобы доказать, что найденные функции u, v, w удовлетворяют (4), осталось показать, что по (20) могут быть восстановлены значения $\partial u / \partial n|_S, \partial v / \partial n|_S, \partial w / \partial n|_S$. Знание $v|_S, w|_S$ и $u_1|_S$ позволяет определить из (20) $u_x(x, y, \sigma(x, y))$. На S справедливы соотношения

$$u_x + u_z \sigma_x = u_{0x}, \quad u_y + u_z \sigma_y = u_{0y}, \quad u_x n_1 + u_y n_2 + u_z n_3 = \frac{\partial u}{\partial n}. \quad (21)$$

Первые два уравнения (21) позволяют выразить u_y и u_z на S через u_{0x}, u_{0y} и $u_x(x, y, \sigma(x, y)) = u_x|_S$, а третье может восстановить значение $\partial u / \partial n|_S = u_{10}(x, y)$. Аналогично рассуждаем и относительно функций v и w .

Таким образом, формулы (18), (19) действительно определяют решение задачи Коши.

Перейдем к построению решения смешанной задачи. Рассмотрим точку $M(\xi, \eta, \zeta) \in D_0$. Проведем через M плоскости $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$. Эти плоскости определяют область $D_1 \subset D$, граница которой состоит из двумерных многообразий $S = ABC, AEPFB \subset \bar{X}, ACGQE \subset \bar{Y}, CBFTG \subset \bar{Z}, GTMQ \subset \{(x, y, z) | x = \xi\}, PMTF \subset \{(x, y, z) | y = \eta\}, EQMP \subset \{(x, y, z) | z = \zeta\}$.

Интегрируем (15) по области D_1

$$\begin{aligned} & \iint_{GTMQ} (r_{11}u + r_{12}u_1)(\xi, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\beta \wedge d\gamma + \iint_{TFPM} (r_{13}v + r_{14}v_1)(\alpha, \eta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma \wedge d\alpha + \\ & + \iint_{EQMP} (r_{15}w + r_{16}w_1)(\alpha, \beta, \zeta, \xi, \eta, \zeta) d\alpha \wedge d\beta + \iint_{AEPFB} (r_{11}u + r_{12}u_1)(x, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\beta \wedge d\gamma + \\ & + \iint_{ACGQE} (r_{13}v + r_{14}v_1)(\alpha, y, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma \wedge d\alpha + \iint_{BFTGC} (r_{15}w + r_{16}w_1)(\alpha, \beta, z, \xi, \eta, \zeta) d\alpha \wedge d\beta + \\ & + \iint_{ABC} (r_{11}u + r_{12}u_1)(x, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\beta \wedge d\gamma + (r_{13}v + r_{14}v_1)(\alpha, y, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\gamma \wedge d\alpha + \\ & + (r_{15}w + r_{16}w_1)(\alpha, \beta, z, \xi, \eta, \zeta) d\alpha \wedge d\beta = \iiint_{D_1} (r_{12}f_1 + r_{14}f_2 + r_{16}f_3)(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta) d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned}$$

С учетом (16) получаем

$$\iint_{GTMQ} u(\xi, \beta, \gamma) d\beta \wedge d\gamma = p_1(\xi, \eta, \zeta), \quad (22)$$

где $p_1(\xi, \eta, \zeta)$ выражается через $\mathbf{R}$ и граничные условия (10). Очевидно,

$$\iint_{GTMQ} u(\xi, \beta, \gamma) d\beta \wedge d\gamma = \int_{y_0}^{\eta} \int_{z_0}^{\zeta} u(\xi, \beta, \gamma) d\gamma d\beta.$$

Дифференцирование (22) дает

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 p_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta \partial \zeta}. \quad (23)$$

Аналогично, используя третью и пятую строки (14), получаем

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 p_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 p_3(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (24)$$

При этом в (18) r_{1j} заменяются на r_{3j} и r_{5j} соответственно. То, что формулы (23)–(24) дают решение смешанной задачи, проверяется точно так же, как и в случае задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бицадзе А.В. *О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений с частными производными*, Матем. моделирование **6** (6), 22–31 (1994).
- [2] Чекмарев Т.В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными*, Дифференц. уравнения **18** (9), 1614–1622 (1982).
- [3] Плещинская И.Е. *Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными*, Дифференц. уравнения **23** (9), 1634–1637 (1987).
- [4] Миронова Л.Б. *О методе Римана в R^n для одной системы с кратными характеристиками*, Изв. вузов. Матем., № 1, 34–39 (2006).
- [5] Жегалов В.И., Миронова Л.Б. *Об одной системе уравнений с двукратными старшими частными производными*, Изв. вузов. Матем., № 3, 12–21 (2007).
- [6] Жегалов В.И. *Задача с нормальными производными в граничных условиях для системы дифференциальных уравнений*, Изв. вузов. Матем., № 8, 70–72 (2008).
- [7] Воронова Ю.Г. *О задаче Коши для линейных гиперболических систем уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа*, Уфимский матем. журн. **2** (2), 20–26 (2010).
- [8] Жибер А.В., Костригина О.С. *Задача Гурса для нелинейных гиперболических систем уравнений с интегралами первого и второго порядка*, Уфимский матем. журн. **3** (3), 67–79 (2011).
- [9] Созонтова Е.А. *О характеристических задачах с нормальными производными для системы гиперболического типа*, Изв. вузов. Матем., № 10, 43–54 (2013).
- [10] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. *Задача Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа порядка n с некртными характеристиками*, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **21** (4), 752–759 (2017).
- [11] Жегалов В.И. *Трёхмерный аналог задачи Гурса*, Неклассические задачи и уравнения смешанного типа, Новосибирск, 94–98 (1990).
- [12] Жегалов В.И., Севастьянов В.А. *Задача Гурса в четырёхмерном пространстве*, Дифференц. уравнения **32** (10), 1429–1430 (1996).
- [13] Жегалов В.И. *О трёхмерной функции Римана*, Сиб. матем. журн. **38** (5), 1074–1079 (1997).
- [14] Миронов А.Н. *О построении функции Римана для одного уравнения четвертого порядка*, Дифференц. уравнения **37** (12), 1698–1701 (2001).
- [15] Уткина Е.А. *К общему случаю задачи Гурса*, Изв. вузов. Матем., № 8, 57–62 (2005).
- [16] Миронов А.Н. *Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в R^n* , Сиб. матем. журн. **47** (3), 584–594 (2006).
- [17] Романовский Р.К. *О матрицах Римана первого и второго рода*, Матем. сб. **127** (4), 494–501 (1985).
- [18] Романовский Р.К. *Экспоненциально расщепляемые гиперболические системы с двумя независимыми переменными*, Матем. сб. **133** (3), 341–355 (1987).
- [19] Воробьева Е.В., Романовский Р.К. *Метод характеристик для гиперболических краевых задач на плоскости*, Сиб. матем. журн. **41** (3), 531–540 (2000).

- [20] Романовский Р.К., Мендзив М.В. *Устойчивость решений задачи Коши для гиперболической системы на плоскости с периодическими по времени коэффициентами*, Сиб. матем. журн. **48** (5), 1134–1141 (2007).
- [21] Романовский Р.К., Медведев Ю.А. *Оптимальное двустороннее граничное управление теплопереносом в стержне. Гиперболическая модель*, Изв. вузов. Матем., № 6, 54–60 (2016).

Любовь Борисовна Миронова

Елабужский институт (филиал) Казанского федерального университета,
ул. Казанская, д. 89, г. Елабуга, 423604, Россия,

e-mail: lbmironova@yandex.ru

L.B. Mironova

Application of Riemann method to one system in three-dimensional space

Abstract. For a system of three equations of the second order we prove existence and uniqueness of solutions to the Cauchy problem and to problem with conditions on characteristics and a free surface. We construct solutions to these problems in terms of the Riemann matrix.

Keywords: hyperbolic system, Riemann method, Cauchy problem, characteristics.

Lyubov' Borisovna Mironova

*Elabuga Institute of Kazan Federal University,
89 Kazanskaya str., Elabuga, 423600 Russia,*

e-mail: lbmironova@yandex.ru