Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Абдон Е. Чоке-Риверо, Резольвентная матрица усеченной матричной интерполяционной проблемы Неванлинны–Пика и ортогональные рациональные функции класса Стилтъяса, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 6, 65–79

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-65-79>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 11:27:36

АБДОН Е. ЧОКЕ-РИВЕРО

РЕЗОЛЬВЕНТНАЯ МАТРИЦА УСЕЧЕННОЙ МАТРИЧНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЫ НЕВАНЛИННЫ–ПИКА И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КЛАССА СТИЛТЬЕСА

Аннотация. Получено новое представление резольвентной матрицы и экстремальных решений усеченной матричной интерполяционной проблемы Неванлинны–Пика в классе функций Стилттьеса через ортогональные матричные рациональные функции на луче $[0, \infty)$.

Ключевые слова: усеченная интерполяционная матричная проблема Неванлинны–Пика, матричнозначные ортогональные рациональные функции, резольвентная матрица.

УДК: 517.518

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-65-79

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье выводится новое представление для резольвентной матрицы в усеченной матричной интерполяционной проблеме Неванлинны–Пика (УМИПНП) в классе функций Стилттьеса через ортогональные матричные рациональные функции (ОМРФ) на луче $[0, \infty)$. Как следствие этого представления получена новая форма для экстремальных решений в терминах ОМРФ на луче $[0, \infty)$. Автор следует стратегии работы [1], в которой получено представление для резольвентной матрицы усеченной матричной проблемы моментов Стилттьеса через ортогональные матричные многочлены. Интерполяционная задача Неванлинны–Пика в операторном и матричном случаях исследовалась в работах [2]–[7], в которых изучались в основном мультипликативная структура резольвентной матрицы, явление неопределенности и пошаговые алгоритмы решения интерполяционной задачи Неванлинны–Пика. Отметим, что работы [3], [4] основаны на статье [8], посвященной критериям неопределенности для матричной проблемы моментов Стилттьеса.

Цель данной работы — получить трехчленное рекуррентное соотношение для семейства ОМРФ и рациональных функций второго рода, ассоциированных с УМИПНП. Такое соотношение для другого (скалярного) семейства рациональных функций, соответствующего интерполяционной проблеме Неванлинны–Пика в некоторых подклассах класса Стилттьеса, изучалось в работах [9] и [10]. Вторая цель — найти приложения обсуждающихся в этой статье ОМРФ в области теории управления, сходные с приложениями скалярных и матричных многочленов ([11]–[14]). Заметим, что интерполяционный подход Неванлинны–Пика уже использовался для решения задач теории управления ([15]–[18] и ссылки в них).

Поступила в редакцию 14.05.2018, после доработки 05.07.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Исследования автора выполнены с частичной поддержкой SNI Conacyt, CIC-UMSNH и PROMEP México.

Статья организована следующим образом. В первом разделе, состоящем из пп. 1.1 и 1.2, описаны класс функций Стильеса, постановка УМИПНП и множество решений этой задачи. В разделе 2 рассматриваются ОМРФ на $[0, \infty)$ и соответствующие рациональные функции второго рода. Представлена скалярная версия этих матричных функций. Кроме того, здесь вводятся алгебраические тождества, играющие важную роль на протяжении всей работы. В разделе 3 дается аддитивное представление резольвентной матрицы для УМИПНП. В разделе 4 представлены экстремальные решения задачи в терминах ОМРФ на $[0, \infty)$ и соответствующие рациональные функции второго рода. Построен пример решения УМИПНП, включающий вычисление соответствующих ОМРФ и функций второго рода.

Вернемся к обозначениям и понятиям, использованным в работах предшественников. Пусть q и p — натуральные числа, $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел, символ $\mathbb{C}^{q \times q}$ — множество всех комплексных $q \times q$ матриц. Нуль-матрицу из множества $\mathbb{C}^{p \times q}$ обозначим через $0_{p \times q}$, нулевую матрицу и матрицу тождественного отображения в $\mathbb{C}^{q \times q}$ обозначим через 0_q и I_q соответственно. В случаях, когда размеры этих матриц ясны, соответствующие индексы опускаются.

1.1. *Функциональный класс Стильеса.* Пусть

$$\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in (0, +\infty)\} \text{ и } \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in (-\infty, 0)\}.$$

Определение 1.1. Множество $\mathcal{S}_q$ всех голоморфных функций $F : \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \mapsto \mathbb{C}^{q \times q}$ таких, что

- а) матрица $\operatorname{Im} F(z)$ является неотрицательной эрмитовой для всех $z \in \mathbb{C}^+$,
- б) матрица $F(x)$ неотрицательная эрмитова при всех $x \in (-\infty, 0)$,

называется классом функций Стильеса.

Определение 1.2. Обозначим через $\mathcal{M}_{\geq}^q([0, \infty))$ множество всех неотрицательных эрмитовых $q \times q$ -мер на борелевых подмножествах $[0, \infty)$.

В скалярном случае следующая лемма доказана в ([19] теорема А.4). Матричный случай сводится к скалярному с помощью процедуры, описанной в ([20], с.17).

Лемма 1.1. Для каждой функции класса Стильеса s существуют неотрицательная матрица γ и неотрицательная эрмитова мера $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q([0, \infty))$ такие, что интеграл $\int_0^\infty \sigma(dt)/(t+1)$ корректно определен и $s(z) = \gamma + \int_0^\infty \frac{\sigma(dt)}{t-z}$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Поставим усеченную матричную интерполяционную проблему Неванлинны–Пика в классе функций Стильеса. Даны конечная последовательность $\{s_j\}_{j=1}^n$ $q \times q$ -матриц и последовательность чисел $\{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$ такая, что $z_j \neq \bar{z}_k$ при $1 \leq j, k \leq n$. Требуется найти множество $\mathcal{F}_n$ всех функций s таких, что

$$s(z_j) = s_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

1.2. *Множество решений усеченной матричной интерполяционной проблемы Неванлинны–Пика в классе функций Стильеса.* Для описания множества решений УМИПНП используем обозначения, введенные Ю. Дюкаревым в [2]. Пусть

$$T_j := \operatorname{diag}(z_1^{-1}I_q, z_2^{-1}I_q, \dots, z_j^{-1}I_q), \quad v_j := \operatorname{column}(I_q, I_q, \dots, I_q), \quad (1.1)$$

$$R_j(z) := (I_{jq} - zT_j)^{-1}, \quad (1.2)$$

$$u_{1,j} := \operatorname{column}(s_1, s_2, \dots, s_j), \quad u_{2,j} := T_j^{-1}u_{1,j}, \quad (1.3)$$

$$K_{r,j} := T_j^{-1} \left(\frac{z_j^{r-1} s_j - \bar{z}_k^{r-1} s_k^*}{z_j - \bar{z}_k} \right) T_j^{*-1}, \quad r = 1, 2. \quad (1.4)$$

В [21] доказано, что необходимым и достаточным условием разрешимости УМИПНП является неотрицательность матриц $K_{1,j}$ и $K_{2,j}$.

Определение 1.3. Пусть $\{s_j, z_j\}_{j=1}^n$ — последовательность пар $q \times q$ -матриц s_j и комплексных чисел z_j из п. 1.1. Последовательность $\{s_j, z_j\}_{j=1}^n$ называется положительно определенной последовательностью Неванлинны–Пика, если матрицы $K_{1,j}$ и $K_{2,j}$ из (1.4) положительно определены.

В дальнейшем рассматриваем только положительно определенные последовательности Неванлинны–Пика. Этот случай называют также невырожденным.

Определение 1.4. Пусть $\{s_j, z_j\}_{j=1}^n$ — положительно определенная последовательность Неванлинны–Пика. Пусть $K_{r,j}$, $u_{r,j}$, v_j и R_j — те же, что в (1.4), (1.3) и (1.2) соответственно при $r = 1, 2$. Тогда $2q \times 2q$ -матричная рациональная функция

$$U^{(j)}(z) := \begin{pmatrix} \alpha^{(j)}(z) & \beta^{(j)}(z) \\ \gamma^{(j)}(z) & \delta^{(j)}(z) \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_j\}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.5)$$

с

$$\alpha^{(j)}(z) := I_q - z u_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) K_{1,j}^{-1} v_j, \quad \beta^{(j)}(z) := u_{2,j}^* R_j^*(\bar{z}) K_{2,j}^{-1} u_{2,j}, \quad (1.6)$$

$$\gamma^{(j)}(z) := -z v_j^* R_j^*(\bar{z}) K_{1,j}^{-1} v_j, \quad \delta^{(j)}(z) := I_q + z v_j^* R_j^*(\bar{z}) K_{2,j}^{-1} u_{2,j} \quad (1.7)$$

называется резольвентной матрицей (РМ) рассматриваемой задачи.

Резольвентная матрица (1.5) была введена Ю. Дюкаревым и В.Е. Кацнельсоном в работе [21] (см. также [2]). Множество решений УМИПНП получается с помощью дробно-линейного преобразования ([2], теорема 2)

$$s(z) = (\alpha^{(j)}(z) \mathbf{p}(z) + \delta^{(j)}(z) \mathbf{q}(z)) (\gamma^{(j)}(z) \mathbf{p}(z) + \delta^{(j)}(z) \mathbf{q}(z))^{-1}. \quad (1.8)$$

Пара $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ принадлежит некоторому классу голоморфных $q \times q$ -матриц-функций ([2], определение 4).

Определение 1.5. Пусть $\{s_j, z_j\}_{j=1}^n$ — положительно определенная последовательность Неванлинны–Пика (определение 1.3). Пусть $K_{r,j}$, $u_{r,j}$, v_j и R_j для $r = 1, 2$ — те же, что в (1.4), (1.3) и (1.2) соответственно. Положим

$$P_{r,1}(z) := (1 - z z_1^{-1})^{-1} I_q, \quad Q_{r,1}(z) := -(1 - z z_1^{-1})^{-1} u_{r,1}, \quad (1.9)$$

$$P_{r,j}(z) := (-B_{r,j}^* K_{r,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j \quad (1.10)$$

и

$$Q_{r,j}(z) := -(-B_{r,j}^* K_{r,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) u_{r,j}, \quad r = 1, 2. \quad (1.11)$$

В операторном случае рациональные функции $P_{1,j}$ и $P_{2,j}$ были введены Ю. Дюкаревым в работе ([6], уравнение (14)).

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА ЛУЧЕ $[0, \infty)$

В этом разделе доказывается, что матричные рациональные функции $P_{1,j}(t)$ и $P_{2,j}(t)$ ортогональны относительно некоторой матричной положительной меры. Для этого понадобятся алгебраические тождества, представленные в следующем разделе.

Отметим, что ортогональность рациональных операторных функций относительно неотрицательных операторных мер на $[0, \infty)$ изучалась в ([6], теорема 1).

2.1. *Алгебраические тождества.* Обозначим

$$\begin{pmatrix} K_{r,j-1} & B_{r,j} \\ B_{r,j}^* & C_j \end{pmatrix} := K_{r,j}, \quad \hat{K}_{r,1} := K_{r,1}, \quad \hat{K}_{r,j} := C_j - B_{r,j}^* K_{r,j-1}^{-1} B_{r,j} \quad (2.1)$$

для $r = 1, 2$ и $2 \leq j \leq n$.

Матрица $\hat{K}_{r,j}$ называется дополнением Шура к $K_{r,j}$; она положительно определена вместе с $K_{r,j}$.

В [2] имеются тождества

$$T_j K_{r,j} - K_{r,j} T_j^* - v_j u_{r,j}^* + u_{r,j} v_j^* = 0, \quad r = 1, 2, \quad (2.2)$$

$$K_{1,j} + v_j u_{2,j}^* - T_j K_{2,j} = 0. \quad (2.3)$$

Замечание 2.1. Пусть $K_{r,j}$, $\hat{K}_{r,j}$ и $B_{r,j}$, $r = 1, 2$, — те же, что в (1.4) и (2.1). Справедливы следующие тождества:

$$K_{r,j}^{-1} = \begin{pmatrix} K_{r,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_{r,j-1}^{-1} B_{r,j} \\ I_q \end{pmatrix} \hat{K}_{r,j}^{-1} (-B_{r,j}^* K_{r,j-1}^{-1}, I_q), \quad r = 1, 2, \quad (2.4)$$

$$K_{1,j} \begin{pmatrix} -K_{1,j-1}^{-1} B_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{(j-1)q \times q} \\ \hat{K}_{1,j} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$T_j K_{2,j} \begin{pmatrix} -K_{2,j-1}^{-1} B_{2,j} \\ I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{(j-1)q \times q} \\ z_j^{-1} \hat{K}_{2,j} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$K_{1,j}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{(j-1)q \times q} \\ z_j^{-1} \hat{K}_{2,j} \end{pmatrix} = z_j^{-1} \begin{pmatrix} -K_{1,j-1}^{-1} B_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} \hat{K}_{1,j}^{-1} \hat{K}_{2,j}, \quad (2.7)$$

$$K_{2,j}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{(j-1)q \times q} \\ \hat{K}_{1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{2,j-1}^{-1} B_{2,j} \\ I_q \end{pmatrix} \hat{K}_{2,j}^{-1} \hat{K}_{1,j}. \quad (2.8)$$

Доказательство. Равенство (2.4) проверяется путем применения обоих равенств (2.1). Равенство (2.5) доказывается с помощью первого равенства в (2.1) и (2.4) при $r = 1$. Равенство (2.6) — это следствие первого соотношения в (2.1) и формулы

$$T_j = \begin{pmatrix} T_{j-1} & 0_{q(j-1) \times q} \\ 0_{q \times (j-1)q} & z_j^{-1} I_q \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Чтобы установить (2.7), следует использовать формулу (2.4). $\square$

Замечание 2.2. Имеют место

$$R_j^*(\bar{z}) = \begin{pmatrix} R_{j-1}^*(\bar{z}) & 0_{q(j-1) \times q} \\ 0_{q \times (j-1)q} & (1 - z\bar{z}_j^{-1})^{-1} I_q \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$u_{1,j} = \begin{pmatrix} u_{1,j-1} \\ s_j \end{pmatrix}, \quad u_{2,j} = \begin{pmatrix} u_{2,j-1} \\ z_j s_j \end{pmatrix}, \quad v_j = \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ I_q \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Равенство (2.10) устанавливается так же, как равенства (2.11).

Пусть

$$\Sigma_{1,j} := \begin{pmatrix} K_{1,j-1}^{-1} B_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{2,j} := \begin{pmatrix} K_{2,j-1}^{-1} B_{2,j} \\ I_q \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

В следующем замечании получаем вспомогательные тождества, которые будут использованы в лемме 2.1 об ортогональности рациональных матриц-функций $P_{1,j}$ и $P_{2,j}$.

Замечание 2.3. Пусть $K_{r,n}$, $r = 1, 2$, — те же, что в (1.4). Обозначим

$$\{k_{j\ell}^{(r)}\}_{j,\ell=1}^n = K_{r,n}, \quad (2.13)$$

а $B_{r,j}$ такое же, как в (2.1). Положим

$$W_{j,\ell}^{(r)} := \begin{pmatrix} k_{1,1}^{(r)} & k_{1,2}^{(r)} & \cdots & k_{1,\ell}^{(r)} \\ k_{2,1}^{(r)} & k_{2,2}^{(r)} & \cdots & k_{2,\ell}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{j,1}^{(r)} & k_{j,2}^{(r)} & \cdots & k_{j,\ell}^{(r)} \end{pmatrix},$$

$r = 1, 2$, $1 \leq \ell < j \leq n$. Тогда выполняются следующие тождества:

$$W_{j,\ell}^{(r)} = K_{r,j} \begin{pmatrix} I_{\ell q} \\ 0_{(j-\ell)q \times \ell q} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$(-B_{r,j}^* K_{r,j-1}^{-1}, I_q) W_{j,\ell}^{(r)} \begin{pmatrix} -K_{r,\ell-1} B_{r,\ell} \\ I_q \end{pmatrix} = 0, \quad j > \ell, \quad (2.15)$$

$$(-B_{r,j}^* K_{r,j-1}^{-1}, I_q) K_{r,j} = (0_{q \times (j-1)q}, \widehat{K}_{r,j}). \quad (2.16)$$

Доказательство. Равенство (2.14) получено путем непосредственных вычислений. Равенство (2.15) вытекает из (2.14) и первого равенства в (2.1). Наконец, формула (2.16) следует из (2.12). $\square$

Замечание 2.4. Пусть $\{s_j, z_j\}_{j=1}^\infty$ — положительно определенная последовательность Неванлинны–Пика, как в определении 1.3. Обозначим через $\mathcal{M}_{\geq}^q[[0, \infty), \{s_j, z_j\}_{j=0}^\infty]$ множество неотрицательных эрмитовых $q \times q$ -мер $\sigma \in \mathcal{M}_{\geq}^q([0, \infty))$ таких, что

$$s_j = \int_{[0, \infty)} \frac{\sigma(dt)}{t - z_j}, \quad 1 \leq j \leq \infty. \quad (2.17)$$

Замечание 2.5. Обозначим через $\mathcal{F}_n^{(0)}$ множество решений s УМИПНП вида (2.17) в невырожденном случае.

Ниже покажем, что множество $\mathcal{F}_n^{(0)}$ непусто.

Лемма 2.1. Пусть σ принадлежит $\mathcal{M}_{\geq}^q([0, \infty), (s_j, z_j)_{j=0}^n]$. Пусть $P_{r,j}$ и $\widehat{K}_{r,j}$ при $r = 1, 2$ — те же, что в определении 1.5 и (2.1). Тогда выполняются следующие соотношения ортогональности:

$$\int_{[0, \infty)} P_{1,j}(t) \sigma(dt) P_{1,\ell}^*(t) = \begin{cases} 0_q, & j \neq \ell; \\ \widehat{K}_{1,j}, & j = \ell, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\int_{[0, \infty)} P_{2,j}(t) \sigma_1(dt) P_{2,\ell}^*(t) = \begin{cases} 0_q, & j \neq \ell; \\ \widehat{K}_{2,j}, & j = \ell, \end{cases} \quad (2.19)$$

при всех ℓ, j таких, что $1 \leq \ell, j \leq n$, где σ_1 — неотрицательная эрмитова мера, определенная на борелевых подмножествах B луча $[0, \infty)$ формулой

$$\sigma_1(B) := \int_B t \sigma(dt). \quad (2.20)$$

Доказательство. Пусть $r = 1$ и $j > \ell$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty)} P_{1,j}(t) \sigma(dt) P_{1,\ell}^*(t) &= \Sigma_{1,j}^* \int_{[0, \infty)} R_j(t) v_j \sigma(dt) v_\ell^* R_\ell^*(t) \Sigma_{1,\ell} = \\ &= \Sigma_{1,j}^* \left(\int_{[0, \infty)} \frac{1}{1 - tz_p^{-1}} \frac{1}{1 - t\bar{z}_q^{-1}} \sigma(dt) \right)_{p=1, q=1}^{p=j, q=\ell} \Sigma_{1,\ell} = \\ &= \Sigma_{1,j}^* \left(\int_{[0, \infty)} \left(\frac{1}{(1 - z_p \bar{z}_q^{-1})(1 - tz_p^{-1})} + \frac{1}{(1 - \bar{z}_q z_p^{-1})(1 - t\bar{z}_q^{-1})} \right) \sigma(dt) \right)_{p=1, q=1}^{p=j, q=\ell} \Sigma_{1,\ell} = \\ &= \Sigma_{1,j}^* \left(\frac{z_p \bar{z}_q}{z_p - \bar{z}_q} (s_p - s_q^*) \right)_{p=1, q=1}^{p=j, q=\ell} \Sigma_{1,\ell} = \\ &= (-B_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I_q) \begin{pmatrix} k_{1,1}^{(1)} & k_{1,2}^{(1)} & \cdots & k_{1,\ell}^{(1)} \\ k_{2,1}^{(1)} & k_{2,2}^{(1)} & \cdots & k_{2,\ell}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{j,1}^{(1)} & k_{j,2}^{(1)} & \cdots & k_{j,\ell}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K_{1,\ell}^{-1} B_{1,\ell} \\ I_q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Доказательство равенства (2.18) теперь завершается ссылкой на (2.15) и (2.16). Если $j < \ell$, то повторяем процедуру для $\left(\int_{[0, \infty)} P_{1,j}(t) \sigma(dt) P_{1,\ell}^*(t) \right)^*$. Чтобы доказать (2.19), заменим выражение в правой части третьего равенства выражением

$$\Sigma_{2,j}^* \left(\int_{[0, \infty)} \left(\frac{-z_p^2 \bar{z}_q}{z_p - \bar{z}_q} \left(\frac{1}{t - \bar{z}_q} - \frac{1}{t - z_p} \right) + \frac{z_p \bar{z}_q}{t - \bar{z}_q} \right) \sigma(dt) \right)_{p=1, q=1}^{p=j, q=\ell} \Sigma_{2,\ell}. \quad \square$$

Предложение 2.1. Пусть при $r = 1, 2$ $P_{r,j}$ и $Q_{r,j}$ те же, что в определении 1.5. Пусть σ принадлежит $\mathcal{M}_{\geq}^q[[0, \infty), (s_j, z_j)_{j=1}^{\infty}]$, а σ_1 определена как в (2.20). Тогда выполняются равенства

$$\int_{[0, \infty)} \frac{P_{1,j}(t) - P_{1,j}(x)}{t - x} \sigma(dt) = Q_{1,j}(x), \quad (2.21)$$

$$\int_{[0, \infty)} \frac{t P_{2,j}(t) - x P_{2,j}(x)}{t - x} \sigma(dt) = Q_{2,j}(x). \quad (2.22)$$

Доказательство. Применив соотношения (1.10), (1.11) при $r = 1$ и (2.12), получаем

$$\begin{aligned} \frac{P_{1,j}(t) - P_{1,j}(x)}{t - x} &= \frac{1}{t - x} \Sigma_{1,j} (R_j(t) v_j - R_j(x) v_j) = \\ &= \frac{1}{t - x} \Sigma_{1,j} \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - tz_1^{-1}} I_q - \frac{1}{1 - xz_1^{-1}} I_q \\ \vdots \\ \frac{1}{1 - tz_j^{-1}} I_q - \frac{1}{1 - xz_j^{-1}} I_q \end{pmatrix} = \Sigma_{1,j} \begin{pmatrix} \frac{z_1^{-1}}{(1 - tz_1^{-1})(1 - xz_1^{-1})} I_q \\ \vdots \\ \frac{z_j^{-1}}{(1 - tz_j^{-1})(1 - xz_j^{-1})} I_q \end{pmatrix} = -\Sigma_{1,j} R_j(x) \begin{pmatrix} \frac{1}{t - z_1} I_q \\ \vdots \\ \frac{1}{t - z_j} I_q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Применив подобным образом (1.10), (1.11) при $r = 2$ и (2.12), имеем

$$\frac{tP_{2,j}(t) - xP_{2,j}(x)}{t - x} = \frac{1}{t - x} \Sigma_{2,j} \begin{pmatrix} \frac{t}{1-tz_1^{-1}} I_q - \frac{x}{1-xz_1^{-1}} I_q & & \\ & \cdots & \\ \frac{t}{1-tz_j^{-1}} I_q - \frac{x}{1-xz_j^{-1}} I_q & & \end{pmatrix} = -\Sigma_{2,j} R_j(x) \begin{pmatrix} \frac{z_1}{t-z_1} I_q \\ \cdots \\ \frac{z_j}{t-z_j} I_q \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Интегрируя обе части соотношений (2.23) и (2.24) по лучу $[0, \infty)$ с мерой σ , в силу (2.17) получаем (2.21) и (2.22). $\square$

Отметим, что подобные (2.21) и (2.22) выражения для матричных ортогональных многочленов были представлены в ([22], теорема 1; также [1], лемма E.11).

Замечание 2.6. Вычисления, аналогичные проведенным в доказательстве предложения 2.1, позволяют доказать равенство

$$\int_{[0, \infty)} \frac{P_{2,j}(t) - P_{2,j}(x)}{t - x} \sigma_1(dt) = Q_{2,j}(x) - P_{2,j}(x) \int_{[0, \infty)} \sigma(dt).$$

2.2. Скалярный случай. В этом пункте рассмотрим скалярный случай рациональных функций $P_{r,j}$ и $Q_{r,j}$.

Отметим, что ортогональность семейства скалярных ортогональных функций $\delta^{(j)}$, определенных вторым равенством (1.7), рассматривалась в работах [9] и [10].

Ниже $^\top$ означает, как обычно, операцию транспонирования.

Предложение 2.2. Пусть $P_{r,j}$ и $Q_{r,j}$ — те же, что в определении 1.5. Обозначим через $p_{r,j}$ и $q_{r,j}$ их скалярные версии. Пусть $\{k_{j,\ell}^{(r)}\}_{j,\ell=1}^n$ — то же, что в (2.13). Тогда при $j \geq 2$ выполняются равенства

$$p_{r,j}(x) = \frac{1}{\det K_{r,j-1}} \begin{vmatrix} k_{1,1}^{(r)} & k_{2,1}^{(r)} & \cdots & k_{j,1}^{(r)} \\ k_{1,2}^{(r)} & k_{2,2}^{(r)} & \cdots & k_{j,2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1,j-1}^{(r)} & k_{2,j-1}^{(r)} & \cdots & k_{j,j-1}^{(r)} \\ \frac{1}{1-xz_1} & \frac{1}{1-xz_2} & \cdots & \frac{1}{1-xz_j} \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

и

$$q_{r,j}(x) = \frac{-1}{\det K_{r,j-1}} \begin{vmatrix} k_{1,1}^{(r)} & k_{2,1}^{(r)} & \cdots & k_{j,1}^{(r)} \\ k_{1,2}^{(r)} & k_{2,2}^{(r)} & \cdots & k_{j,2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1,j-1}^{(r)} & k_{2,j-1}^{(r)} & \cdots & k_{j,j-1}^{(r)} \\ \varkappa_{r,1}(x) & \varkappa_{r,2}(x) & \cdots & \varkappa_{r,j}(x) \end{vmatrix}, \quad (2.26)$$

где

$$(\varkappa_{r,1}(x), \varkappa_{r,2}(x), \dots, \varkappa_{r,j}(x)) := \begin{cases} u_{1,j}^\top R_j^\top(x) & \text{для } r = 1; \\ u_{2,j}^\top R_j^\top(x) & \text{для } r = 2. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $r = 1$. Полагая, что $K_{1,j-1}$ положительно определена, имеем

$$\begin{aligned} p_{1,j}(x) &= (-B_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, 1) R_j(x) v_j = \frac{1}{1 - x z_j} + ((-B_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, 1) R_{j-1}(x) v_{j-1})^\top = \\ &= \frac{1}{1 - x z_j} - v_{j-1}^\top R_{j-1}^\top(x) K_{1,j-1}^{-1\top} B_{1,j}^{*\top} = \frac{1}{|K_{1,j-1}|} \begin{vmatrix} K_{1,j-1}^\top & B_{1,j}^{*\top} \\ v_{j-1}^\top R_{j-1}^\top(x) & \frac{1}{1 - x z_j} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В последнем равенстве использовано дополнение Шура $K_{1,j-1}$ в матрице, соответствующей определителю, содержащему элементы $\frac{1}{1 - x z_k}$ в (2.25) при $r = 1$. Подобным образом можно доказать равенство (2.25) при $r = 2$.

Равенства (2.26) при $r = 1$ и $r = 2$ можно также доказать с помощью дополнения Шура $K_{r,j-1}$ в матрице, соответствующей определителю, который содержит элементы $\kappa_{r,\ell}$ в (2.26). $\square$

3. НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛВЕНТНОЙ МАТРИЦЫ

Получим новое представление для резольвентной матрицы $U^{(j)}$ усеченной матричной интерполяционной проблемы Неванлинны–Пика через матричные ортогональные функции $P_{r,j}$ и $Q_{r,j}$. Это представление подобно представлению для усеченной матричной проблемы моментов Стилтеса, выведенному в ([1], лемма 4.4).

Теорема 3.1. Пусть $\alpha^{(j)}$, $\beta^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$ и $\delta^{(j)}$ — те же, что в определении 1.4, а рациональные функции $P_{r,j}$ и $Q_{r,j}$ — те же, что в (1.9)–(1.11). Тогда при $1 \leq j \leq n$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n\}$ справедливы тождества

$$\alpha^{(j)}(z) Q_{2,j}^*(0) - Q_{2,j}^*(\bar{z}) + z_j^{-1} z Q_{1,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{1,j}^{-1} \hat{K}_{2,j} = 0, \quad (3.1)$$

$$\beta^{(j)}(z) P_{1,j}^*(0) + Q_{1,j}^*(\bar{z}) - Q_{2,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{2,j}^{-1} \hat{K}_{1,j} = 0, \quad (3.2)$$

$$\gamma^{(j)}(z) Q_{2,j}^*(0) + z P_{2,j}^*(\bar{z}) - z_j^{-1} z P_{1,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{1,j}^{-1} \hat{K}_{2,j} = 0, \quad (3.3)$$

$$\delta^{(j)}(z) P_{1,j}^*(0) - P_{1,j}^*(\bar{z}) + z P_{2,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{2,j}^{-1} \hat{K}_{1,j} = 0. \quad (3.4)$$

Доказательство. Обоснуем (3.1):

$$\begin{aligned} & -\alpha^{(j)}(z) Q_{2,j}^*(0) + Q_{2,j}^*(\bar{z}) - z_j^{-1} z Q_{1,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{1,j}^{-1} \hat{K}_{2,j} = \\ & = z u_{2,j}^* R_j^*(\bar{z}) T_j^* K_{1,j}^{-1} (K_{1,j} + v_j u_{2,j}^*) \begin{pmatrix} -K_{2,j-1}^{-1} B_{2,j} \\ I_q \end{pmatrix} - z_j^{-1} z Q_{1,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{1,j}^{-1} \hat{K}_{2,j} = \\ & = -z u_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) K_{1,j}^{-1} T_j K_{2,j} \begin{pmatrix} -K_{2,j-1}^{-1} B_{2,j} \\ I_q \end{pmatrix} - z_j^{-1} z Q_{1,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{1,j}^{-1} \hat{K}_{2,j} = 0. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств первое следует из первого равенства при (1.6) и (1.11) с $r = 1, 2$. Второе равенство получено с помощью второго равенства в (1.3) и равенства (2.3). Последнее равенство вытекает из (1.11), (2.6) и (2.7). В случае (3.2) имеем

$$\begin{aligned} & \beta^{(j)}(z) P_{1,j}^*(0) + Q_{1,j}^*(\bar{z}) - Q_{2,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{2,j}^{-1} \hat{K}_{1,j} = \\ & = u_{2,j}^* R_j^*(\bar{z}) K_{2,j}^{-1} (u_{2,j} v_j^* - K_{2,j} T_j^*) \begin{pmatrix} -K_{1,j-1}^{-1} B_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} - Q_{2,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{2,j}^{-1} \hat{K}_{1,j} = \\ & = u_{2,j}^* R_j^*(\bar{z}) K_{2,j}^{-1} K_{1,j} \begin{pmatrix} -K_{1,j-1}^{-1} B_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} - Q_{2,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{2,j}^{-1} \hat{K}_{1,j} = 0. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств первое следует из второго равенства в (1.6), второго равенства в (1.3), из равенства (1.10) при $r = 1$ и (1.11) при $r = 1, 2$. Второе равенство получено путем применения второго из равенств (2.3). Третье равенство следует из равенств (2.8) и (1.11) при $r = 2$. Равенства (3.3) и (3.4) устанавливаются подобным образом. $\square$

Пусть $e_k^* := (0_q, \dots, I_q, \dots, 0_q)$ есть $q \times (j-1)q$ -матрица с I_q в k -й компоненте.

Замечание 3.1. Следующие равенства получены непосредственным вычислением

$$-(u_{1,j-1}^* - s_k v_{j-1}^*) + \frac{1}{z_k} e_k^* K_{1,j-1} (I - z_k T_{j-1}^*) = 0, \quad (3.5)$$

$$-(u_{2,j-1}^* - z_k s_k v_{j-1}^*) + \frac{1}{z_k} e_k^* K_{2,j-1} (I - z_k T_{j-1}^*) = 0. \quad (3.6)$$

Предложение 3.1. *Справедливы тождества*

$$Q_{1,j}^*(\bar{z}_k) + s_k P_{1,j}^*(\bar{z}_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq j-1, \quad (3.7)$$

$$Q_{2,j}^*(\bar{z}_k) + z_k s_k P_{2,j}^*(\bar{z}_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq j-1, \quad (3.8)$$

$$-Q_{2,j}(0)P_{1,j}^*(0) + \hat{K}_{1,j} - \bar{z}_j^{-1} \hat{K}_{2,j} = 0. \quad (3.9)$$

Доказательство. Используя (1.10), (1.11), (2.10), (2.11) и (3.5), докажем (3.7) :

$$\begin{aligned} Q_{1,j}^*(\bar{z}_k) + s_k P_{1,j}^*(\bar{z}_k) &= -(u_{1,j}^* - s_k v_j^*) R_j^*(\bar{z}_k) \begin{pmatrix} -K_{1,j-1}^{-1} B_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} = \\ &= - \left(-(u_{1,j-1}^* - s_k v_{j-1}^*) R_{j-1}^*(\bar{z}_k) K_{1,j-1}^{-1} + \frac{1}{z_k} e_k^* \right) B_{1,j} = \\ &= - \left(-(u_{1,j-1}^* - s_k v_{j-1}^*) + \frac{1}{z_k} e_k^* K_{1,j-1} (I - z_k T_{j-1}^*) \right) R_{j-1}^*(\bar{z}_k) K_{1,j-1}^{-1} B_{1,j} = 0. \end{aligned}$$

В случае (3.8) вместо (3.5) применим (3.6). Для (3.9) применим (1.10), (1.11), (2.3), (2.5) и (2.6)

$$\begin{aligned} -Q_{2,j}(0)P_{1,j}^*(0) + \hat{K}_{1,j} - \bar{z}_j^{-1} \hat{K}_{2,j} &= \\ &= (-B_{2,j} K_{2,j-1}^{-1}, I_q) u_{2,j} v_j^* \begin{pmatrix} -K_{1,j-1}^{-1} B_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} + \hat{K}_{1,j} - \bar{z}_j^{-1} \hat{K}_{2,j} = \\ &= (-B_{2,j} K_{2,j-1}^{-1}, I_q) (K_{2,j} T_j^* - K_{1,j}) \begin{pmatrix} -K_{1,j-1}^{-1} B_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} + \hat{K}_{1,j} - \bar{z}_j^{-1} \hat{K}_{2,j} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

3.1. Аддитивное представление РМ. В этом пункте получим аддитивное представление резольвентной матрицы УМИПНП через ОМРФ. Подобное представление для резольвентной матрицы матричной проблемы моментов Стильтеса рассмотрено в ([1], предложение 4.9).

Лемма 3.1. Пусть $\alpha^{(j)}$, $\beta^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$ и $\delta^{(j)}$ означают то же, что в определении 1.4, а $P_{r,j}$, $Q_{r,j}$ при $r = 1, 2$ — то же, что в определении 1.5. Кроме того, пусть $\hat{K}_{r,j}$ означает то же, что в (2.1). Тогда при $j \geq 2$ выполняются равенства

$$\alpha^{(j)}(z) = \alpha^{(j-1)}(z) + z Q_{1,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{1,j}^{-1} P_{1,j}(0), \quad (3.10)$$

$$\beta^{(j)}(z) = \beta^{(j-1)}(z) + Q_{2,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{2,j}^{-1} Q_{2,j}(0), \quad (3.11)$$

$$\gamma^{(j)}(z) = \gamma^{(j-1)}(z) - z P_{1,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{1,j}^{-1} P_{1,j}(0), \quad (3.12)$$

$$\delta^{(j)}(z) = \delta^{(j-1)}(z) - z P_{2,j}^*(\bar{z}) \hat{K}_{2,j}^{-1} Q_{2,j}(0). \quad (3.13)$$

Доказательство. Обоснуем (3.10). Применив первое равенство (1.6), (2.10), (2.4) и третье равенство (2.11), получаем

$$\begin{aligned} \alpha^{(j)}(z) &= (u_{1,j-1}^*, s_j^*) \begin{pmatrix} R_{j-1}^*(\bar{z}) & 0 \\ 0 & (1 - z\bar{z}_j^{-1})^{-1}I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{1,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ I_q \end{pmatrix} + \\ &+ zu_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -K_{1,j-1}^{-1}B_{1,j} \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{K}_{1,j}^{-1}(-B_{1,j}K_{1,j-1}^{-1}, I_q)v_j = \\ &= \alpha^{(j-1)}(z) - zQ_{1,j}^*(\bar{z})\widehat{K}_{1,j}^{-1}P_{1,j}(0). \end{aligned}$$

В последнем соотношении использовано первое равенство (1.6), (1.11) и (1.10) при $r = 1$. Чтобы доказать (3.11), используем второе равенство (1.6), (2.11) и (2.10) при $r = 2$, а также (1.11) и (1.10) при $r = 2$:

$$\begin{aligned} \beta^{(j)}(z) &= (u_{2,j-1}^*, \bar{z}_j s_j^*) \begin{pmatrix} R_{j-1}^*(\bar{z}) & 0 \\ 0 & (1 - z\bar{z}_j^{-1})^{-1}I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{2,j-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,j-1} \\ z_j s_j \end{pmatrix} - \\ &- zu_{2,j}^* R_j^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} -K_{2,j-1}^{-1}B_{2,j} \\ I_q \end{pmatrix} \widehat{K}_{2,j}^{-1}(-B_{2,j}K_{2,j-1}^{-1}, I_q)u_{2,j} = \beta^{(j-1)}(z) - Q_{2,j}^*(\bar{z})\widehat{K}_{2,j}^{-1}Q_{2,j}(0). \end{aligned}$$

Аналогичным путем доказываются (3.12) и (3.13). $\square$

Замечание 3.2. Следующие тождества устанавливаются путем применения определений 1.4 и (1.9):

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)}(z) &= I_q + zQ_{1,1}^*(\bar{z})\widehat{K}_{1,1}^{-1}P_{1,1}(0), \quad \beta^{(1)}(z) = Q_{2,1}^*(\bar{z})\widehat{K}_{2,1}^{-1}Q_{2,1}(0), \\ \gamma^{(1)}(z) &= -zP_{1,1}^*(\bar{z})\widehat{K}_{1,1}^{-1}P_{1,1}(0), \quad \delta^{(1)}(z) = I_q + zP_{2,1}^*(\bar{z})\widehat{K}_{2,1}^{-1}Q_{2,1}(0). \end{aligned}$$

3.2. *Дальнейшие соотношения между РМ и матрицами $P_{r,j}$ и $Q_{r,j}$.* Выведем соотношения между ОМРФ $P_{r,j}$, соответствующими рациональными функциями второго рода $Q_{r,j}$, $r = 1, 2$, и элементами РМ (1.6)–(1.7). По сравнению с (3.1)–(3.4) те же самые матрицы $P_{r,j}$ и $Q_{r,j}$ оказываются связанными с элементами $U^{(j-1)}$, а не $U^{(j)}$.

Лемма 3.2. Пусть $\alpha^{(j)}$, $\beta^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$ и $\delta^{(j)}$ — те же, что в определении 1.4. Пусть $P_{r,j}$, $Q_{r,j}$ при $r = 1, 2$ — те же, что в определении 1.5. Кроме того, пусть $\widehat{K}_{r,j}$ — то же, что в (2.1). Тогда выполняются равенства

$$\alpha^{(j-1)}(z)Q_{2,j}^*(0) - Q_{2,j}^*(\bar{z}) + zQ_{1,j}^*(\bar{z}) = 0, \quad (3.14)$$

$$\beta^{(j-1)}(z)P_{1,j}^*(0) + Q_{1,j}^*(\bar{z}) - \bar{z}_j^{-1}Q_{2,j}^*(\bar{z}) = 0, \quad (3.15)$$

$$\gamma^{(j-1)}(z)Q_{2,j}^*(0) + zP_{2,j}^*(\bar{z}) - zP_{1,j}^*(\bar{z}) = 0, \quad (3.16)$$

$$\delta^{(j-1)}(z)P_{1,j}^*(0) - P_{1,j}^*(\bar{z}) + \bar{z}_j^{-1}zP_{2,j}^*(\bar{z}) = 0. \quad (3.17)$$

Доказательство. Подставим в левые части (3.10)–(3.13) выражения для $\alpha^{(j)}$, $\beta^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$ и $\delta^{(j)}$, данные в (3.1)–(3.4), затем используем (3.9). После упрощений получим (3.14)–(3.17). $\square$

Из (3.1)–(3.4) и (3.14)–(3.17) следует

Замечание 3.3. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} (Q_{2,j-1}^*(\bar{z}) - z_{j-1}^{-1}zQ_{1,j-1}^*(\bar{z})\hat{K}_{1,j-1}^{-1}\hat{K}_{2,j-1})Q_{2,j-1}^{*-1}(0) - (Q_{2,j}^*(\bar{z}) - zQ_{1,j}^*(\bar{z}))Q_{2,j}^{*-1}(0) &= 0, \\ (Q_{1,j-1}^*(\bar{z}) - Q_{2,j-1}^*(\bar{z})\hat{K}_{2,j-1}^{-1}\hat{K}_{1,j-1})P_{1,j-1}^{*-1}(0) - (Q_{1,j}^*(\bar{z}) - \bar{z}_j^{-1}Q_{2,j}^*(\bar{z}))P_{1,j}^{*-1}(0) &= 0, \\ (zP_{2,j-1}^*(\bar{z}) + z_{j-1}^{-1}zP_{1,j-1}^*(\bar{z})\hat{K}_{1,j-1}^{-1}\hat{K}_{2,j-1})Q_{2,j-1}^{*-1}(0) - z(P_{2,j}^*(\bar{z}) - P_{1,j}^*(\bar{z}))Q_{2,j}^{*-1}(0) &= 0, \\ (P_{1,j-1}^*(\bar{z}) - zP_{2,j-1}^*(\bar{z})\hat{K}_{2,j-1}^{-1}\hat{K}_{1,j-1})P_{1,j-1}^{*-1}(0) - (P_{1,j}^*(\bar{z}) - \bar{z}_j^{-1}zP_{2,j}^*(\bar{z}))P_{1,j}^{*-1}(0) &= 0. \end{aligned}$$

В следующей теореме выражаем элементы РМ $U^{(j)}$ в аддитивном виде с помощью ОМРФ $P_{r,j}$ и соответствующих рациональных функций второго рода $Q_{r,j}$, $r = 1, 2$. Аналогичное представление для элементов матрицы проблемы моментов Стильтьеса получено в ([4], предложение 4.9).

Теорема 3.2. Пусть $\alpha^{(j)}$, $\beta^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$ и $\delta^{(j)}$ — те же, что в определении 1.4. При $r = 1, 2$ пусть $P_{r,j}$ и $Q_{r,j}$ — те же, что в определении 1.5. Кроме того, пусть $\hat{K}_{r,j}$ при $r = 1, 2$ означает то же, что в (2.1). Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} \alpha^{(j)}(z) &= I_q + z \sum_{l=1}^j Q_{1,l}^*(\bar{z})\hat{K}_{1,l}^{-1}P_{1,l}(0), \quad \beta^{(j)}(z) = \sum_{l=1}^j Q_{2,l}^*(\bar{z})\hat{K}_{2,l}^{-1}Q_{2,l}(0), \\ \gamma^{(j)}(z) &= -z \sum_{l=1}^j P_{1,l}^*(\bar{z})\hat{K}_{1,l}^{-1}P_{1,l}(0), \quad \delta^{(j)}(z) = I_q - z \sum_{l=1}^j P_{2,l}^*(\bar{z})\hat{K}_{2,l}^{-1}Q_{2,l}(0). \end{aligned}$$

Доказательство. Равенства (3.10)–(3.13) устанавливаются путем применения замечания 3.2 и леммы 3.1. $\square$

С помощью леммы 3.2 и теоремы 3.2 получаем

Следствие 3.1. При тех же условиях, что в теореме 3.2, выполняются равенства

$$\begin{aligned} Q_{2,j+1}^*(\bar{z}) - zQ_{1,j+1}^*(\bar{z}) &= \left(I_q + z \sum_{l=1}^j Q_{1,l}^*(\bar{z})\hat{K}_{1,l}^{-1}P_{1,l}(0) \right) Q_{2,j+1}^*(0), \\ \bar{z}_{j+1}^{-1}Q_{2,j+1}^*(\bar{z}) - Q_{1,j+1}^*(\bar{z}) &= \left(\sum_{l=1}^j Q_{2,l}^{*-1}(\bar{z})\hat{K}_{2,l}^{-1}Q_{2,l}(0) \right) P_{1,j+1}^*(0), \\ P_{2,j+1}^*(\bar{z}) - P_{1,j+1}^*(\bar{z}) &= \left(\sum_{l=1}^j P_{1,l}^*(\bar{z})\hat{K}_{1,l}^{-1}P_{1,l}(0) \right) Q_{2,j+1}^*(0), \\ P_{1,j+1}^*(\bar{z}) - \bar{z}_{j+1}^{-1}zP_{2,j+1}^*(\bar{z}) &= \left(I_q - z \sum_{l=1}^j P_{2,l}^*(\bar{z})\hat{K}_{2,l}^{-1}Q_{2,l}(0) \right) P_{1,j+1}^*(0), \end{aligned}$$

$$1 \leq j \leq n-1.$$

4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Пусть $\frac{A}{B} := AB^{-1}$ при $A, B \in \mathbb{C}^{q \times q}$, если B обратима. В этом разделе получим новое представление для экстремальных решений:

$$s_{\mathcal{K}}^{(j)}(z) := \frac{\alpha^{(j)}(z)}{\gamma^{(j)}(z)}, \quad s_{\mathcal{F}}^{(j)}(z) := \frac{\beta^{(j)}(z)}{\delta^{(j)}(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty). \quad (4.1)$$

Эти решения получены заменой $(\mathbf{p})$ в (1.8) на $\begin{pmatrix} I_q \\ 0_q \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0_q \\ I_q \end{pmatrix}$ соответственно. Они называются решениями Крейна и Фридрихса ([12], (14)).

Предложение 4.1. Пусть экстремальные решения УМИПНП $s_{\mathcal{F}}^{(j)}$ и $s_{\mathcal{K}}^{(j)}$ — те же, что в (4.1), а рациональные матрицы $P_{r,j}$ и $Q_{r,j}$ — те же, что в определении 1.5. Тогда выполняются равенства

$$s_{\mathcal{K}}^{(j)}(z) = - \frac{Q_{2,j}^*(\bar{z}) - z_j^{-1} z Q_{1,j}^*(\bar{z}) \widehat{K}_{1,j}^{-1} \widehat{K}_{2,j}}{z P_{2,j}^*(\bar{z}) + z_j^{-1} z P_{1,j}^*(\bar{z}) \widehat{K}_{1,j}^{-1} \widehat{K}_{2,j}}, \quad (4.2)$$

$$s_{\mathcal{F}}^{(j)}(z) = - \frac{Q_{1,j}^*(\bar{z}) - Q_{2,j}^*(\bar{z}) \widehat{K}_{2,j}^{-1} \widehat{K}_{1,j}}{P_{1,j}^*(\bar{z}) - z P_{2,j}^*(\bar{z}) \widehat{K}_{2,j}^{-1} \widehat{K}_{1,j}}. \quad (4.3)$$

Более того,

$$s_{\mathcal{K}}^{(j)}(z) = \frac{\alpha^{(j)}(-\infty)}{\gamma^{(j)}(-\infty)} + \gamma^{(j)*^{-1}}(\bar{z}) \frac{v_j^* T_j^{*-1} K_{1,j}^{-1} R_j(z) K_{1,j} T_j^{*-1} K_{1,j}^{-1} v_j}{\gamma^{(j)}(-\infty)}, \quad (4.4)$$

где

$$\alpha^{(j)}(-\infty) := I_q + u_{1,j}^* T_j^{*-1} K_{1,j}^{-1} v_j, \quad \gamma^{(j)}(-\infty) := v_j^* T_j^{*-1} K_{1,j}^{-1} v_j. \quad (4.5)$$

Доказательство. Равенства (4.2) и (4.3) следуют из (3.1)–(3.4). Чтобы доказать (4.4), используем $s_{\mathcal{K}}^{(j)}(z) = s_{\mathcal{K}}^{(j)*}(\bar{z})$ и соотношение (4.5). Имеем

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{K}}^{(j)*}(\bar{z}) - \frac{\alpha^{(j)}(-\infty)}{\gamma^{(j)}(-\infty)} &= \gamma^{(j)*^{-1}}(\bar{z}) \alpha^{(j)*}(\bar{z}) - \alpha^{(j)}(-\infty) \gamma^{(j)^{-1}}(-\infty) = \\ &= \gamma^{(j)*^{-1}}(\bar{z}) (\alpha^{(j)*}(\bar{z}) \gamma^{(j)}(-\infty) - \gamma^{(j)*}(\bar{z}) \alpha^{(j)}(-\infty)) \gamma^{(j)^{-1}}(-\infty). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Запишем срединный множитель в виде

$$\begin{aligned} \alpha^{(j)*}(\bar{z}) \gamma^{(j)}(-\infty) - \gamma^{(j)*}(\bar{z}) \alpha^{(j)}(-\infty) &= \\ &= v_j^* K_{1,j}^{-1} (K_{1,j} - z R_j(z) u_{1,j} v_j^* + z R_j(z) K_{1,j} T_j^* - z R_j(z) v_j u_{1,j}^*) T_j^{*-1} K_{1,j}^{-1} v_j = \\ &= v_j^* K_{1,j}^{-1} R_j(z) ((I - z T_j) K_{1,j} - z u_{1,j} v_j^* + z K_{1,j} T_j^* - z v_j u_{1,j}^*) T_j^{*-1} K_{1,j}^{-1} v_j = \\ &= v_j^* K_{1,j}^{-1} R_j(z) K_{1,j} T_j^{*-1} K_{1,j}^{-1} v_j. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Используя (4.6) и (4.7), получаем (4.4). $\square$

Непосредственные вычисления дают

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} s_{\mathcal{F}}^{(j)}(x) = 0_q. \quad (4.8)$$

Замечание 4.1. Множество $\mathcal{F}_n^{(0)}$ решений УМИПНП (здесь использовано обозначение из замечания 2.5) не пусто.

Доказательство. Очевидно, множество $\mathcal{F}_n^{(0)}$ решений соответствует случаю $\gamma = 0_q$ в лемме 1.1. Поскольку $\gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} s(x)$, применив (4.8), заключаем, что $\mathcal{F}_n^{(0)} \neq \emptyset$. $\square$

Пример. Рассмотрим случай, когда $q = 2$, $n = 2$ и данные интерполяции $\{s_j, z_j\}_{j=1}^2$ имеют вид $z_1 = i$, $z_2 = \frac{1}{2}i$,

$$s_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} + \frac{7i}{60} & \frac{3}{20} + \frac{7i}{60} \\ \frac{3}{20} + \frac{7i}{60} & \frac{3}{10} + \frac{7i}{30} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad s_2 = \begin{pmatrix} \frac{18}{85} + \frac{22i}{255} & \frac{18}{85} + \frac{22i}{255} \\ \frac{18}{85} + \frac{22i}{255} & \frac{36}{85} + \frac{44i}{255} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрицы

$$K_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{7}{60} & \frac{7}{60} & \frac{23}{340} + \frac{7i}{340} & \frac{23}{170} + \frac{7i}{170} \\ \frac{7}{60} & \frac{7}{30} & \frac{23}{340} + \frac{7i}{340} & \frac{23}{170} + \frac{7i}{170} \\ \frac{23}{340} - \frac{7i}{340} & \frac{23}{170} - \frac{7i}{170} & \frac{11}{255} & \frac{11}{255} \\ \frac{23}{340} - \frac{7i}{340} & \frac{23}{170} - \frac{7i}{170} & \frac{11}{255} & \frac{11}{255} \end{pmatrix}$$

и

$$K_{2,2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{29}{340} + \frac{5i}{204} & \frac{29}{170} + \frac{5i}{102} \\ \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{29}{340} + \frac{5i}{204} & \frac{29}{170} + \frac{5i}{102} \\ \frac{29}{340} - \frac{5i}{204} & \frac{29}{170} - \frac{5i}{102} & \frac{9}{170} & \frac{9}{85} \\ \frac{29}{340} - \frac{5i}{204} & \frac{29}{170} - \frac{5i}{102} & \frac{9}{170} & \frac{9}{85} \end{pmatrix}$$

положительно определены. Это значит, что $\{s_j, z_j\}_{j=1}^2$ есть положительно определенная последовательность Неванлинны-Пика.

Соответствующие экстремальные решения даются формулами

$$\frac{\alpha^{(2)}(z)}{\gamma^{(2)}(z)} = \begin{pmatrix} -\frac{8z^2-186z+1}{750z-630z^2} & -\frac{8z^2-186z+1}{750z-630z^2} \\ -\frac{8z^2-186z+1}{750z-630z^2} & -\frac{8z^2-186z+1}{375z-315z^2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \frac{\beta^{(2)}(z)}{\delta^{(2)}(z)} = \begin{pmatrix} \frac{3-2z}{6(z^2-3z+2)} & \frac{3-2z}{6(z^2-3z+2)} \\ \frac{3-2z}{6(z^2-3z+2)} & \frac{3-2z}{3z^2-9z+6} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Когда z приближается к минус бесконечности, правая часть первого равенства в (4.9) стремится к

$$\frac{\alpha^{(2)}(-\infty)}{\gamma^{(2)}(-\infty)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{630} + \frac{i}{105} & \frac{1}{630} + \frac{i}{105} \\ \frac{1}{630} + \frac{i}{105} & \frac{1}{315} + \frac{i}{105} \end{pmatrix}.$$

Используя определение 1.5, записываем рациональную функцию $P_{r,j}$ и рациональную функцию второго рода $Q_{r,j}$ при $r, j = 1, 2$. Имеем

$$P_{1,1}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{i}{z-i} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{z-i} \end{pmatrix}, \quad P_{1,2}(z) = \begin{pmatrix} \frac{50+21i-(42+19i)z}{119(-2z^2+3iz+1)} & 0 \\ 0 & \frac{50+21i-(42+19i)z}{119(-2z^2+3iz+1)} \end{pmatrix},$$

$$P_{2,1}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{i}{z-i} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{z-i} \end{pmatrix}, \quad P_{2,2}(z) = \begin{pmatrix} \frac{66+25i-(50+21i)z}{153(-2z^2+3iz+1)} & 0 \\ 0 & \frac{66+25i-(50+21i)z}{153(-2z^2+3iz+1)} \end{pmatrix},$$

$$Q_{1,1}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{\frac{3}{20} + \frac{7i}{60}}{\frac{3}{20} + \frac{7i}{60}} & -\frac{\frac{3}{20} + \frac{7i}{60}}{\frac{3}{20} + \frac{7i}{60}} \\ -\frac{\frac{3}{20} + \frac{7i}{60}}{\frac{3}{20} + \frac{7i}{60}} & -\frac{\frac{3}{20} + \frac{7i}{60}}{\frac{3}{10} + \frac{7i}{30}} \end{pmatrix}, \quad Q_{2,1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{\frac{7}{60} - \frac{3i}{20}}{\frac{7}{60} - \frac{3i}{20}} & \frac{\frac{7}{60} - \frac{3i}{20}}{\frac{7}{60} - \frac{3i}{20}} \\ \frac{\frac{7}{60} - \frac{3i}{20}}{\frac{7}{60} - \frac{3i}{20}} & \frac{\frac{7}{60} - \frac{3i}{20}}{\frac{30}{30} - \frac{10}{10}} \end{pmatrix},$$

$$Q_{1,2}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{(\frac{1}{510} + \frac{i}{595})(2z-(42-13i))}{2z^2-3iz-1} & -\frac{(\frac{1}{510} + \frac{i}{595})(2z-(42-13i))}{2z^2-3iz-1} \\ -\frac{(\frac{1}{510} + \frac{i}{595})(2z-(42-13i))}{2z^2-3iz-1} & -\frac{(\frac{1}{255} + \frac{2i}{595})(2z-(42-13i))}{2z^2-3iz-1} \end{pmatrix}$$

и

$$Q_{2,2}(z) = \begin{pmatrix} \frac{(472+186i)z-(6-7i)}{4590(2z^2-3iz-1)} & \frac{(472+186i)z-(6-7i)}{4590(2z^2-3iz-1)} \\ \frac{(472+186i)z-(6-7i)}{4590(2z^2-3iz-1)} & \frac{(472+186i)z-(6-7i)}{2295(2z^2-3iz-1)} \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что $P_{1,1}$ и $P_{1,2}$ (соответственно $P_{2,1}$ и $P_{2,2}$) ортогональны по отношению к мере σ (соответственно σ_1). Здесь распределение σ дается формулой

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0_2, & 0 \leq t < 1; \\ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, & 1 < t \leq 2; \\ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, & 2 < t < \infty, \end{cases} \quad (4.10)$$

а σ_1 определяется соотношением (2.20).

Отметим, что распределение (4.10) можно вычислить, выразив экстремальное решение $s_{\mathcal{F}}^{(2)}$ в терминах частных дробей; см. (4.1). Поскольку в рассмотренном примере УМИПНП невырождена, то существует бесконечное семейство подобных положительных мер с аналогичными свойствами. Форма заданных в этом примере матриц s_1 и s_2 объясняется тем, что для этих матриц можем найти точные выражения основных объектов, обсуждаемых в данной работе.

Автор благодарен рецензенту за полезные комментарии и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Choque Rivero A.E. *On Dyukarev's resolvent matrix for a truncated Stieltjes matrix moment problem under the view of orthogonal matrix polynomials*, Linear Algebra Appl. 474, 44-109 (2015).
- [2] Dyukarev Yu.M. *The multiplicative structure of resolvent matrices of interpolation problems in the Stieltjes class*, Vestnik Kharkov Univ. Ser. Mat. Prikl. Mat. i Mekh. 458, 143-153 (1999).
- [3] Dyukarev Yu.M. *Nevanlinna-Pick problem for Stieltjes matrix functions*, Ukrainian Math. J. 56 (3), 446-465 (2004).
- [4] Dyukarev Yu.M. *Indeterminacy of interpolation problems in the Stieltjes class*, Mat. Sb. 196 (3), 61-88 (2005).
- [5] Dyukarev Yu.M. *A generalized Stieltjes criterion for the complete indeterminacy of interpolation problems*, Math. Notes 84 (1), 23-39 (2008).
- [6] Dyukarev Yu.M. *Criterion for complete indeterminacy of limiting interpolation problem of Stieltjes type in terms of orthonormal matrix functions*, Russian Math. 59 (4), 61-88 (2015).
- [7] Dyukarev Yu.M., Serikova I.Yu. *Step-by-step solving of ordered interpolational problem for Stieltjes functions*, Russian Math. 61 (6), 13-26 (2017).
- [8] Dyukarev Yu.M. *Indeterminacy criteria for the Stieltjes matrix moment problem*, Math. Notes 75 (1-2), 66-82 (2004).
- [9] Derevyagin M. *The Jacobi matrices approach to Nevanlinna-Pick problems*, J. Approx. Theory 163, 117-142 (2011).
- [10] Derevyagin M., Zhedanov A.S. *An operator approach to multipoint Padé approximations*, J. Approx. Theory 157, 70-88 (2019).
- [11] Choque Rivero A.E. *On matrix Hurwitz type polynomials and their interrelations to Stieltjes positive definite sequences and orthogonal matrix polynomials*, Linear Algebra Appl. 476, 56-84 (2015).
- [12] Choque Rivero A.E. *On the solution set of the admissible control problem via orthogonal polynomials*, IEEE Trans. Autom. Control 62 (10), 5213-5219 (2017).
- [13] Choque-Rivero A.E., *The Kharitonov theorem and robust stabilization via orthogonal polynomials*, Vest. Khark. Univ., Ser. Mat. Prikl. Mat. Mekh. 86, 49-68 (2017).
- [14] Choque-Rivero A.E. *Hurwitz polynomials and orthogonal polynomials generated by Routh-Markov parameters*, Mediterr. J. Math. <https://doi.org/10.1007/s00009-018-1083-2> (2018).
- [15] Blomqvist A., Lindquist A., Nagamune R. *Matrix-valued Nevanlinna-Pick interpolation with complexity constraint: an optimization approach*, IEEE Trans. Automat. Contr. 48, No.12, 2172-2190 (2003).
- [16] Bultheel A., De Moor A. *Rational approximation in linear systems and control*, J. Comput. Appl. Math. 121 (1-2), 355-378 (2000).
- [17] Delsarte P., Genin Y., Kamp Y. *On the role of the Nevanlinna-Pick problem in circuit and system theory*, Int. J. Circ. Theor. and App. 9 (2) 177-187 (1981).
- [18] Kimura H. *State space approach to the classical interpolation problem and its applications*, In: H. Nijmeijer and J.M. Schumacher (Eds.), *Three decades of mathematical system theory* (Springer Verlag, Berlin, 243-275, 1989).

- [19] Krein M.G. and Nudel'man A.A. *The Markov moment problem and extremal problems*, Translations of Mathematical Monographs (AMS, Providence, 1977), Vol. 50.
- [20] Akhiezer N.I., Glazman I.M. *Theory of linear operators in Hilbert space* (Dover Publications, Inc. New York, 1993).
- [21] Dyukarev Yu.M., Katsnel'son V.E. *Multiplicative and additive Stieltjes classes of analytic matrix-valued functions and interpolation problems connected with them. I*, Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen. № 36, 13–27 (1981) [in Russian].
- [22] Dyukarev Yu.M. *Geometric and operator measures of degeneracy for the set of solutions to the Stieltjes matrix moment problem*, Mat. Sb. 207 (4), 47–64 (2016).

The text was submitted by the author in English.

Перевел на русский язык Кац Б.А.

Абдон Е. Чоке-Риверо

*Институт физики и математики,
Университет Мичоакана им. Св. Идальго Николаса,
Университария, Морелия, Мич., 58048 Мексика,*

e-mail: abdon@ifm.umich.mx

Abdon E. Choque-Rivero

Resolvent matrix of the truncated Nevanlinna–Pick matrix interpolation problem via orthogonal rational functions in the Stieltjes class

Abstract. We give a new representation of the resolvent matrix and extremal solutions of the truncated Nevanlinna–Pick matrix interpolation problem in the Stieltjes class functions via orthogonal matrix rational functions on $[0, \infty)$.

Keywords: truncated Nevanlinna–Pick matrix interpolation problem, matrix-valued orthogonal rational functions, resolvent matrix.

Abdon E. Choque-Rivero

*Instituto de Física y Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Ciudad Universitaria, Morelia, Mich., C. P. 58048, México,*

e-mail: abdon@ifm.umich.mx