Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Г. Авхадиев, Об экстремальных областях для интегральных неравенств в евклидовом пространстве, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 6, 80–84

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-80-84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 03:57:50

Краткое сообщение

Ф.Г. АВХАДИЕВ

**ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
НЕРАВЕНСТВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Аннотация. В областях евклидова пространства рассматриваются неравенства типа Харди и Реллиха, когда весовые функции являются степенью расстояния от точки до границы области. Доказано, что в некоторых известных неравенствах с точными оценками констант экстремальная область не является единственной. Описано семейство экстремальных областей для неравенств типа Харди общего вида. Рассмотрено одно новое неравенство типа Реллиха в областях на плоскости, обладающее похожим свойством.

Ключевые слова: неравенство типа Харди, неравенство типа Реллиха.

УДК: 517.5: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-80-84

Введение. Пусть $\mathbb{F}$ — множество областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функционалы $c_p(s, \cdot) : \mathbb{F} \rightarrow [0, \infty)$ и $C_{2\mu}(\cdot) : \mathbb{F} \rightarrow [0, \infty)$, определяемые как точные константы в неравенствах типа Харди и Реллиха. Таким образом, величины $c_p(s, \Omega)$ и $C_{2\mu}(\Omega)$ являются числовыми характеристиками области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Приведем сначала изучаемое неравенство типа Харди: для любой вещественнозначной функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla f(x)|^p}{\text{dist}^{s-p}(x, \partial\Omega)} dx \geq c_p(s, \Omega) \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\text{dist}^s(x, \partial\Omega)} dx.$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, не совпадающая с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $p \in [1, \infty)$ и $s \in (-\infty, \infty)$ — фиксированные параметры, $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ — расстояние от точки x до границы области. Будем считать, что постоянная $c_p(s, \Omega) \in [0, \infty)$ является максимальной, т. е.

$$c_p(s, \Omega) = \inf_{f \in C_0^\infty(\Omega), f \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^p \text{dist}^{p-s}(x, \partial\Omega) dx}{\int_{\Omega} |f(x)|^p \text{dist}^{-s}(x, \partial\Omega) dx}.$$

При $n = 1$ как прямое следствие результатов Харди [1] имеем равенство $c_p(s, (0, \infty)) = |s - 1|^p/p^p$. При $n \geq 2$ величина $c_p(s, \Omega)$ существенно зависит от геометрии области Ω .

Поступила в редакцию 24.02.2019, после доработки 24.02.2019. Принята к публикации 27.03.2019

Благодарности. Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9), а также за счет средств Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 17-01-00282-а.

Для $\mu \in \mathbb{R}$ будем рассматривать также неравенство типа Реллиха

$$\int_{\Omega} \frac{|\Delta f|^2 dx}{\text{dist}^{2\mu}(x, \partial\Omega)} \geq C_{2\mu}(\Omega) \int_{\Omega} \frac{|f|^2 dx}{\text{dist}^{4+2\mu}(x, \partial\Omega)} \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega),$$

где постоянная $C_{2\mu}(\Omega)$ определена как максимальная из возможных, т. е.

$$C_{2\mu}(\Omega) = \inf_{f \in C_0^\infty(\Omega), f \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\Delta f|^2 \text{dist}^{-2\mu}(x, \partial\Omega) dx}{\int_{\Omega} |f|^2 \text{dist}^{-4-2\mu}(x, \partial\Omega) dx}.$$

Поскольку $\text{dist}(x, \partial(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})) = |x|$, то $C_0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = n^2(n-4)^2/16$ для $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ по теореме Реллиха [2]. Константа $C_{2\mu}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ для всех значений $\mu \in \mathbb{R}$ определяется формулой Калдироли и Мусины [3]:

$$C_{2\mu}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \min_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \left| \frac{(n-2)^2}{4} - (\mu+1)^2 + k(n-2+k) \right|^2.$$

Рассмотрим также несколько неравенств, близких к указанным.

Базовые результаты по многомерным неравенствам Харди и Реллиха можно найти в недавно изданной книге А. Балинского, В. Эванса и Р. Льюиса [4], где описаны результаты, относящиеся в основном к неравенствам типа Харди указанного вида при $p = s \in (1, \infty)$.

Отметим, что неравенства типа Харди и Реллиха с константами $c_p(s, \Omega)$ и $C_{2\mu}(\Omega)$ являются инвариантными при преобразованиях вида $y = a(x - x_0)$, где a — положительная постоянная, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — фиксированная точка. Как следствие этого факта исследуемые константы $c_p(s, \Omega)$ и $C_{2\mu}(\Omega)$ являются безразмерными величинами.

Основные результаты и схемы доказательств. Для областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ хорошо известен евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ (см. [5]). Если максимальный модуль $M_0(\Omega)$ конечен, то говорят, что граница области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является равномерно совершенным множеством в $\mathbb{R}^2$.

Потребуется аналогичная характеристика для многомерных областей.

Предположим, что $n \geq 3$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область. Для этой области определим евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ равенством

$$M_0(\Omega) = \sup_A (2\pi)^{-1} \ln(R_A/r_A),$$

где точная верхняя граница берется по всем шаровым слоям вида $A = \{x \in \mathbb{R}^n : r_A < |x - x_A| < R_A\}$, имеющим свойства $A \subset \Omega$; $x_A \in \partial\Omega$, $0 < r_A < R_A < \infty$.

Очевидно, из этих условий следует, что область A разделяет границу области Ω . Если таких шаровых слоев не существует, то полагаем $M_0(\Omega) = 0$.

Следующее утверждение показывает, что области со свойством $M_0(\Omega) = \infty$ являются экстремальными для ряда задач по точным оценкам констант Харди.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область. Предположим, что $n \geq 2$, $p \in [1, \infty)$ и $s \in (-\infty, \infty)$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $M_0(\Omega) = \infty$, то $c_p(s, \Omega) \leq |s - n|^{p/p^p}$;
- 2) если $s \geq n$ и $M_0(\Omega) = \infty$, то $c_p(s, \Omega) = |s - n|^{p/p^p}$.

Схема доказательства теоремы 1. Докажем сначала утверждение 1) теоремы.

Очевидно, условие $M_0(\Omega) = \infty$ влечет существование такой последовательности областей $A_k = A(b_k, r_k, R_k) \subset \Omega$, для которых выполняются условия

$$b_k \in \partial\Omega, \quad 0 < r_k < R_k < \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (R_k/r_k) = \infty.$$

Фиксируем $k \in \mathbb{N}$ и совершим замену переменных в интегралах из неравенства типа Харди с константой $c_p(s, \Omega)$, полагая $y = (x - b_k)/\sqrt{r_k R_k}$. Обозначим

$$\Omega_k = \{(x - b_k)/\sqrt{r_k R_k} : x \in \Omega\}, \quad A'_k = \{(x - b_k)/\sqrt{r_k R_k} : x \in A_k\}.$$

Имеем

$$0 \in \partial\Omega_k, \quad A'_k = A(\theta, q_k, 1/q_k) \subset \Omega_k, \quad q_k = \sqrt{r_k/R_k}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} q_k = 0.$$

Нетрудно доказать, что $c_p(s, \Omega) = c_p(s, \Omega_k)$. Поэтому имеет место неравенство

$$\int_{\Omega_k} \frac{|\nabla u(y)|^p dy}{\text{dist}^{s-p}(y, \partial\Omega_k)} \geq c_p(s, \Omega) \int_{\Omega_k} \frac{|u(y)|^p dy}{\text{dist}^s(y, \partial\Omega_k)} \quad \forall u \in C_0^1(\Omega_k).$$

Пусть $A''_k = \{y \in \mathbb{R}^n : q_k < |y| < (q_k + 1/q_k)/2\}$. С учетом включений $A''_k \subset A'_k \subset \Omega_k$ получаем

$$\int_{A''_k} \frac{|\nabla g(y)|^p dy}{\delta_k^{s-p}(y, \partial\Omega_k)} \geq c_p(s, \Omega) \int_{A''_k} \frac{|g(y)|^p dy}{\delta_k^s(y, \partial\Omega_k)} \quad \forall g \in C_0^1(A''_k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где $\delta_k(y) = \text{dist}(y, \partial\Omega_k)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $y \in A''_k$. Поскольку начало координат $0 \in \partial\Omega_k$ и $A''_k \subset A'_k \subset \Omega_k$, то $\delta_k(y) \leq |y|$ и $\delta_k(y) \geq \min\{|y| - q_k, 1/q_k - |y|\} = |y| - q_k$. Последнее равенство получено с учетом неравенства $|y| < (q_k + 1/q_k)/2$. Таким образом,

$$|y| - q_k \leq \delta_k(y) \leq |y|$$

для любой точки $y \in A''_k$.

Рассмотрим фиксированную вещественнозначную функцию $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Существует такой отрезок $[a, b] \subset (0, \infty)$, $a < b$, что носитель этой функции лежит в области $\{y \in \mathbb{R}^n : a < |y| < b\}$. Очевидно, существует такое натуральное число k_0 , что $[a, b] \subset (q_k, (q_k + 1/q_k)/2)$ для всех $k \geq k_0$. Поэтому носитель функции f лежит в области A''_k для любого $k \geq k_0$. Кроме того, $\delta_k(y) \rightarrow |y|$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно относительно $|y| \in [a, b]$.

Применяя к функции $g = f$ неравенство (1) для любого $k \geq k_0$ и переходя в получаемом неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla f(y)|^p dy}{|y|^{s-p}} \geq c_p(s, \Omega) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^p dy}{|y|^s} \quad \forall f \in C_0^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Учтем, что функция $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ была выбрана произвольно. Применим это неравенство к радиальным функциям f , определяемым равенством вида $f(y) \equiv \varphi(|y|)$, где $\varphi \in C_0^1((0, \infty))$. После перехода к обобщенным полярным координатам $y = r\omega = |y|\omega$ с учетом формулы $dy = r^{n-1}drd\omega$ для якобиана получаем

$$\int_{S^{n-1}} d\omega \int_0^\infty \frac{|\varphi'(r)|^p dr}{r^{s-n+1-p}} \geq c_p(s, \Omega) \int_{S^{n-1}} d\omega \int_0^\infty \frac{|\varphi(r)|^p dr}{r^{s-n+1}} \quad \forall \varphi \in C_0^1((0, \infty)),$$

где $S^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$. Следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{|\varphi'(r)|^p dr}{r^{s-n+1-p}} \geq c_p(s, \Omega) \int_0^\infty \frac{|\varphi(r)|^p dr}{r^{s-n+1}} \quad \forall \varphi \in C_0^1((0, \infty)).$$

Это неравенство справедливо лишь при условии $c_p(s, \Omega) \leq |s - n|^p/p^p$ с учетом результата Харди $c_p(\sigma, (0, \infty)) = |\sigma - 1|^p/p^p$ при $\sigma = s - n + 1$. Таким образом, утверждение 1) теоремы обосновано.

Утверждение 2) теоремы, т.е. равенство $c_p(s, \Omega) = (s - n)^p/p^p$ при условиях $s \geq n$ и $M_0(\Omega) = \infty$ вытекает из утверждения 1) теоремы и следующего результата автора (см.,

например, [6]): если $p \in [1, \infty)$ и $s \in [n, \infty)$, то $c_p(s, \Omega) \geq (s - n)^p / p^p$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Для выпуклых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ эта оценка улучшается (см. [4], [6]–[8]).

Выделим как следствие утверждение, которое хорошо известно (см. [4]) лишь в случае, когда $p = s > 1$.

Следствие. Предположим, что $n \geq 2$, $p \in [1, \infty)$ и $s \in (-\infty, \infty)$ — фиксированные параметры. Тогда $c_p(s, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = |s - n|^p / p^p$.

Замечание 1. Как показано нами в работах [9] и [10], для точной константы $C_{2\mu}(\Omega)$ справедливы следующий аналог утверждения 1) теоремы 1:

если $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $M_0(\Omega) = \infty$, то $C_{2\mu}(\Omega) \leq C_{2\mu}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Отметим попутно, что для областей $\Omega \neq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ эффективные оценки снизу константы $C_{2\mu}(\Omega)$ известны лишь в некоторых частных случаях (см. [11]).

Рассмотрим одно новое неравенство для случая плоских областей.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область, не совпадающая с полной плоскостью. Рассмотрим для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ неравенство

$$\int_{\Omega} (1 + \text{dist}^2(x, \partial\Omega)) |\Delta f(x)|^2 dx \geq C(\Omega) \int_{\Omega} \frac{(1 + \text{dist}^2(x, \partial\Omega)) |f(x)|^2}{\text{dist}^4(x, \partial\Omega)} dx,$$

где $C(\Omega) \in [0, \infty)$ — максимальная постоянная, возможная на этом месте.

Ниже нам потребуется также внутренний радиус, определяемый равенством

$$\delta_0(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \text{dist}(x, \partial\Omega).$$

Теорема 2. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область, $\Omega \neq \mathbb{R}^2$, $\delta_0(\Omega) < \infty$. Справедливо следующее утверждение: постоянная $C(\Omega)$ является положительным числом тогда и только тогда, когда евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ конечен. Кроме того, имеет место оценка $C(\Omega) \geq \min\{c_2(2, \Omega), c_2^2(2, \Omega)\}$.

Схема доказательства теоремы 2. Пусть $M_0(\Omega) < \infty$ для области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega \neq \mathbb{R}^2$. Пользуясь определением констант $C_{2\mu}(\Omega)$ при $\mu = 0$ и $\mu = -1$, легко получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (1 + \text{dist}^2(x, \partial\Omega)) |\Delta f(x)|^2 dx \geq \\ & \geq \min\{C_0(\Omega), C_{-2}(\Omega)\} \int_{\Omega} \frac{(1 + \text{dist}^2(x, \partial\Omega)) |f(x)|^2}{\text{dist}^4(x, \partial\Omega)} dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Так как $C(\Omega)$ определена как максимальная постоянная в соответствующем неравенстве, то имеем оценку $C(\Omega) \geq \min\{C_0(\Omega), C_{-2}(\Omega)\}$.

В [11] нами доказано, что условие $M_0(\Omega) < \infty$ влечет неравенства $C_0(\Omega) > 0$ и $C_{-2}(\Omega) > 0$. Следовательно, $C(\Omega) > 0$, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что постоянная $C(\Omega) > 0$. С учетом неравенств $\delta_0^2(\Omega) \geq \text{dist}^2(x, \partial\Omega) \geq 0$ и определения $C(\Omega)$ получаем

$$\int_{\Omega} (1 + \delta_0^2(\Omega)) |\Delta f(x)|^2 dx \geq C(\Omega) \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\text{dist}^4(x, \partial\Omega)} dx \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega).$$

Отсюда следует $C_0(\Omega) \geq C(\Omega) / (1 + \delta_0^2(\Omega)) > 0$ в силу определения $C_0(\Omega)$ как максимальной постоянной в соответствующем неравенстве. Но тогда $M_0(\Omega) < \infty$, как это доказано в [11].

Остается заметить, что оценка $C(\Omega) \geq \min\{c_2(2, \Omega), c_2^2(2, \Omega)\}$ является следствием неравенств $C_0(\Omega) \geq c_2(2, \Omega)$ и $\sqrt{C_{-2}(\Omega)} \geq c_2(2, \Omega)$, доказанных нами в [11], и неравенства $C(\Omega) \geq \min\{C_0(\Omega), C_{-2}(\Omega)\}$.

Замечание 2. В отличие от констант $c_p(s, \Omega)$ и $C_{2\mu}(\Omega)$, константа $C(\Omega)$ не является инвариантной при линейных конформных преобразованиях области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Замечание 3. Остается открытым следующий вопрос: справедлива ли теорема 2 для областей Ω , для которых $\delta_0(\Omega) = \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hardy G. H., Littlewood J. E. and Polya G. *Inequalities* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1934).
- [2] Rellich F. *Perturbation theory of eigenvalue problems* (New York–London–Paris: Gordon and Breach, 1969).
- [3] Caldirola P. and Musina R. *Rellich inequalities with weights*, Calc. Var. **45**, 147–164 (2012).
- [4] Balinsky A. A., Evans W. D. and Lewis R. T. *The analysis and geometry of Hardy's inequality* (Universitext, Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 2015).
- [5] Pommerenke Ch. *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric*, Arch. Math. **32**, 192–199 (1979).
- [6] Авхадиев Ф. Г. *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах*, Тр. матем. ин-т. им. В. А. Стеклова, **255**, 8–18 (2006).
- [7] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Weighted Hardy inequalities with sharp constants*, Lobachevskii J. Math. **31**:1, 1–7 (2010).
- [8] Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. **18**, 723–736 (2011).
- [9] Avkhadiev F. G. *Rellich type inequalities with weights in plane domains*, Lobachevskii J. Math. **39**:4, 1–8 (2018).
- [10] Авхадиев Ф. Г. *О неравенствах Реллиха в евклидовом пространстве*, Изв. вузов. Матем. № 8, 83–87 (2018).
- [11] Avkhadiev F. G. *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space*, J. Math. Anal. Appl. **442**, 469–484 (2016).

Авхадиев Фарит Габидинович,
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: avkhadiev47@mail.ru

F. G. Avkhadiev

On extremal domains for integral inequalities in the Euclidean space

Abstract. On domains of the Euclidean space we consider Hardy and Rellich type inequalities with weight functions depending on the distance to the boundary of the domain. We show that extremal domains are not single for some known inequalities with sharp estimates of constants. We describe a family of extremal domains for Hardy type inequalities of a general form. On plane domains we study a new Rellich type inequality having a similar property.

Keywords: Hardy inequality, Rellich inequality.

Farit Gabidinovich Avkhadiev
Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
e-mail: avkhadiev47@mail.ru