Общероссийский математический портал

М. А. Алехина, Ю. С. Гусынина, Т. А. Шорникова, О надежности схем при неисправностях типа 0 на выходах элементов в полном конечном базисе, содержащем особенную функцию, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 6, 85–88

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-85-88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:08:48

Краткое сообщение, представленное И.В. Конновым

М.А. АЛЕХИНА, Ю.С. ГУСЫНИНА, Т.А. ШОРНИКОВА

**О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ ПРИ НЕИСПРАВНОСТЯХ ТИПА 0 НА
ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЛНОМ КОНЕЧНОМ БАЗИСЕ,
СОДЕРЖАЩЕМ ОСОБЕННУЮ ФУНКЦИЮ**

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе, содержащем особенную функцию. Предполагается, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ подвержены неисправностям типа 0 на выходах. Доказано, что почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ключевые слова: ненадежные функциональные элементы, надежность и ненадежность схемы, синтез схем из ненадежных элементов.

УДК: 519.718

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-85-88

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе B . Известно [1], что любой полный базис содержит нелинейную функцию, а из всякой нелинейной функции от трех или более переменных подстановкой (т.е. отождествлением и/или переименованием) переменных можно получить либо нелинейную функцию двух переменных $\phi(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus \alpha_1x_1 \oplus \alpha_2x_2 \oplus \alpha_0$, либо особенную функцию, т.е. функцию вида $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus \beta_1x_1 \oplus \beta_2x_2 \oplus \beta_3x_3 \oplus \beta_0$, где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{0, 1\}$ [2]. В этой работе будем рассматривать базисы, в каждом из которых содержится нелинейная функция, из которой можно получить особенную функцию. Поэтому без ограничения общности будем считать, что базис содержит особенную функцию.

С точностью до переименования переменных для особенной функции (в зависимости от коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$) возможны восемь случаев:

- 1) $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$,
- 2) $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus 1$,
- 3) $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1$,
- 4) $\varphi_4(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$,
- 5) $\varphi_5(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$,
- 6) $\varphi_6(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2$,

Поступила в редакцию 22.03.2019, после доработки 22.03.2019. Принята к публикации 27.03.2019

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 17-01-00451а.

$$7) \varphi_7(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus 1,$$

$$8) \varphi_8(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3.$$

Считаем, что все элементы базиса ненадежны, с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/2$) переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию, а в неисправном – константу 0. То есть при этих неисправностях функциональный элемент на единичных наборах с вероятностью $1 - \varepsilon$ выдает 1, с вероятностью ε выдает 0, а на нулевых наборах элемент работает абсолютно надежно (с вероятностью 1 выдает 0, с вероятностью 0 выдает 1).

Обозначим через G множество функций вида $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$ ($\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$). Отметим, что функции $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8 \in G$. Известно [3], что если полный конечный базис содержит функцию из множества G , то при неисправностях типа 0 на выходах элементов любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой (необходимые определения также можно найти в [3]), функционирующей с тривиальной оценкой ненадежности, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Оказалось, что этот же результат имеет место для базисов, содержащих функции φ_1, φ_3 [4]. Покажем, что утверждение верно и для полных конечных базисов, содержащих функции φ_2, φ_4 .

Теорема 1. Пусть полный конечный базис B содержит функцию

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus 1.$$

Тогда в этом базисе любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой A , что $P(A) \leq \varepsilon + 16\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Доказательство теоремы 1 опирается на ранее доказанные леммы 1 и 2, которые верны в любом полном конечном базисе при произвольных неисправностях элементов.

Лемма 1 ([3]). Пусть функция f реализована схемой S с ненадежностью не больше p ($p \leq 1/2$). Пусть схема S_g реализует функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$ из множества G с ненадежностью $P(S_g)$ ($P(S_g) \leq 1/2$), причем v_0 и v_1 – вероятности ошибок схемы S_g на наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ и $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3)$ соответственно. Тогда функцию f можно реализовать схемой $\Phi(S)$, ненадежность которой $P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2$.

Лемма 2 ([5]). Любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой S , что $P(S) \leq 5,2\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

Теорема 1 доказывается следующим образом. Поскольку $\varphi_2(x_1, x_2, x_2) = x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = x_1 \sim x_2$, имеем элемент с функцией $x_1 \sim x_2$. Тогда, моделируя формулу $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) \sim ((x_1 \sim x_2) \sim x_3)$, построим схему S_g из четырех элементов, реализующую функцию $g = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3$ из множества G ($\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$). Эту схему и будем использовать для повышения надежности исходных схем.

Поскольку схема S_g содержит четыре элемента, ее ненадежность $P(S_g) \leq 4\varepsilon$. Вычислим вероятность ошибки этой схемы на наборе $(1, 0, 0)$: $v_1 = \varepsilon(1 - \varepsilon)$. Теперь вычислим вероятность ошибки v_0 схемы S_g на наборе $(0, 1, 1)$: $v_0 = \varepsilon$.

Пусть f – произвольная булева функция. По лемме 2 ее можно реализовать схемой S с ненадежностью $P(S) \leq 5,2\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$. Используя схему S_g , с помощью леммы 1 по схеме S построим схему $\Phi(S)$ и оценим ее ненадежность: $P(\Phi(S)) \leq \max\{v_0, v_1\} + 3pP(S_g) + 3p^2 \leq \varepsilon + 3 \cdot 5,2\varepsilon \cdot 4\varepsilon + 3(5,2\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 144\varepsilon^2 \leq 1,15\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

По схеме $\Phi(S)$ построим схему $\Phi^2(S)$, применив лемму 1, и оценим ненадежность схемы $\Phi^2(S)$: $P(\Phi^2(S)) \leq \varepsilon + 3 \cdot 1,15\varepsilon \cdot 4\varepsilon + 3(1,15\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 18\varepsilon^2 \leq 1,0186\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$.

По схеме $\Phi^2(S)$ построим схему $\Phi^3(S)$ и снова воспользуемся леммой 1: $P(\Phi^3(S)) \leq \varepsilon + 3 \cdot 1,0186\varepsilon \cdot 4\varepsilon + 3(1,0186\varepsilon)^2 \leq \varepsilon + 16\varepsilon^2$. Схема $\Phi^3(S)$ искомая.

Теорема 2. Пусть полный конечный базис B содержит функцию

$$\varphi_4(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3.$$

Тогда в этом базисе любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой A , что $P(A) \leq \varepsilon + 15\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/480]$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно построить схемы, реализующие функции $x_1 \vee x_2$ и $x_1 \oplus x_2$, которые функционируют с теми же вероятностями ошибок, что и функциональные элементы с теми же функциями при неисправностях типа 0 на выходах [3]. Действительно, $\varphi_4(x_1, x_1, x_1) \equiv 0$, т.е. имеем элемент, реализующий константу 0 абсолютно надежно (при рассматриваемых неисправностях элементов). Тогда $\varphi_4(x_1, x_2, 0) = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$, т.е. имеем схему из двух элементов, которая реализует дизъюнкцию и функционирует с теми же вероятностями ошибок, что и дизъюнктер при неисправностях типа 0 на выходах. Отметим также, что $\varphi_4(x_1, x_1, x_2) = x_1x_1 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 \oplus x_2 = x_1 \oplus x_2$, т.е. имеем функциональный элемент, реализующий $x_1 \oplus x_2$ с теми же вероятностями ошибок, что и функциональный элемент с функцией $x_1 \oplus x_2$ при неисправностях типа 0 на выходах. Тогда [3] любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой A , что $P(A) \leq \varepsilon + 15\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/480]$.

Из теорем 1, 2 следует, что в базисах, содержащих φ_2 или φ_4 , любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой не больше ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Отметим, что 1) любая схема, содержащая хотя бы один функциональный элемент и реализующая отличную от константы 0 функцию, имеет ненадежность, не меньше ε [3]; 2) функции x_i ($i \in \mathbf{N}$) можно реализовать абсолютно надежно (не используя функциональных элементов). Следовательно, любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n \in \mathbf{N}$), исключая $x_1, x_2, \dots, x_n$ и константу 0, можно реализовать схемой (из теорем 1 и 2), которая является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, из теорем 1, 2 и ранее полученных результатов [3], [4] следует, что если полный конечный базис содержит особенную функцию, то почти любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Этот результат отличается от ранее известного результата для инверсных неисправностей на выходах элементов, поскольку в [6] для базиса, содержащего одну из функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ и не содержащего ни одну из функций множества G , доказано, что почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. в случае неисправностей типа 0 на выходах элементов имеем лучшую (в 2 раза) оценку ненадежности схем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Яблонский С.В. *Введение в дискретную математику* (Высш. шк., М., 2001).
- [2] Редькин Н. П. *О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов*, Матем. вопр. кибернетики (2), 198–222 (1989).
- [3] Алехина М.А. *Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем* (ИИЦ ПГУ, Пенза, 2006).
- [4] Алехина М.А., Клянчина Д.М. *Достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными схемами с тривиальной оценкой ненадежности*, в сб. «Тр. междунар. симпозиума «Надежность и качество, 2010»» (Пенза, 2010), 1, с.229–232.

- [5] Алехина М.А., Гусынина Ю.С., Шорникова Т.А. *Верхняя оценка ненадежности схем в полном конечном базисе (в P_2) при произвольных неисправностях элементов*, Изв. вузов, Матем. №12, 80–83 (2017).
- [6] Алехина М.А., Васин А.В. *О базисах с коэффициентом ненадежности 2*, Матем. заметки **95** (2), 170–201 (2014).

Марина Анатольевна Алехина

*Пензенский государственный технологический университет,
проезд Байдукова /ул. Гагарина, 1а/1, г. Пенза, 440039, Россия,
e-mail: alekhina.marina19@yandex.ru, alekhina@penzgtu.ru*

Юлия Сергеевна Гусынина

*Пензенский государственный технологический университет,
проезд Байдукова /ул. Гагарина, 1а/1, г. Пенза, 440039, Россия,
e-mail: gusynina@mail.ru*

Татьяна Александровна Шорникова

*Пензенский государственный технологический университет,
проезд Байдукова /ул. Гагарина, 1а/1, г. Пенза, 440039, Россия,
e-mail: shornikovat@mail.ru*

M.A. Alekhina, Yu.S. Gusynina and T.A. Shornikova

About the reliability of circuits with faults of type 0 at the outputs of elements in the complete finite basis containing a special function

Abstract. We consider a realization of Boolean functions by the circuits from unreliable elements in full basis B , containing a special function. We assume that all elements of a circuit are exposed to the faults type 0 at the outputs with probability $\varepsilon \in (0, 1/2)$ independently of each other. We prove that almost any Boolean function can be implemented by an asymptotically optimal in reliability circuit functioning with the unreliability which is asymptotically equal to ε with $\varepsilon \rightarrow 0$.

Keywords: unreliable functional gates, reliability and unreliability of circuit, synthesis of circuits composed of unreliable gates.

Marina Anatol'evna Alekhina

*Penza State Technological University,
1a/1 pas. Baidukova/str. Garagina, Penza, 440039 Russia,
e-mail: alekhina.marina19@yandex.ru, alekhina@penzgtu.ru*

Yulia Sergeevna Gusynina

*Penza State Technological University,
1a/1 pas. Baidukova/str. Garagina, Penza, 440039 Russia,
e-mail: gusynina@mail.ru*

Tat'ana Aleksandrovna Shornikova

*Penza State Technological University,
1a/1 pas. Baidukova/str. Garagina, Penza, 440039 Russia,
e-mail: shornikovat@mail.ru*