Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Письменный, Почти периодические решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя малыми параметрами, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 6, 89–92

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-6-89-92>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:01:44

Краткое сообщение, представленное В.Г. Звягиным

Н.А. ПИСЬМЕННЫЙ

**ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ
МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Аннотация. В статье исследуется вопрос о существовании, единственности и бифуркации почти периодических решений нелинейной системы дифференциальных уравнений с двумя малыми положительными параметрами и почти периодической правой частью из цикла порождающей системы. Обосновывается принцип усреднения в задаче о почти периодических решениях системы дифференциальных уравнений специального вида с двумя малыми параметрами.

Ключевые слова: почти периодические решения, малые параметры, нелинейная система, бифуркация.

УДК: 517.911

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-89-92

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы о существовании и единственности почти периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром рассматривались М.А. Красносельским, И.Г. Малкиным, А.И. Перовым, В.В. Жиковым, В.Ш. Бурдом, Б.М. Левитаном ([1]–[4] и имеющаяся там литература).

В книге И.Г. Малкина [2] представлены условия существования и единственности почти периодических решений для линейных, квазилинейных систем и неавтономных нелинейных систем дифференциальных уравнений, содержащих одномерный малый параметр. Методы Малкина продолжают широко применяться для исследования задачи о вынужденных колебаниях. Наиболее близки работы В.Н. Тхая [5], М. И. Каменского, О.Ю. Макаренкова, П. Нистри [6]. Результат Малкина нельзя непосредственно перенести на систему с двумя малыми параметрами. Существование и единственность ветви почти периодических решений такой системы представлены в данной статье.

Рассматривается система нелинейных колебаний следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1) + \mu_1\gamma_1(t, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_2) + \mu_2\gamma_2(t, x_1),\end{aligned}\tag{1}$$

где переменная $t \in \mathbb{R}^1$, μ_1, μ_2 — малые положительные параметры.

Предположение 1. *Отображения $f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, где G — некоторая область в $\mathbb{R}^n$, допускают в G непрерывные производные второго порядка.*

Предположение 2. *Отображения γ_1 и γ_2 являются почти периодическими по t , причем они могут быть представлены в виде*

$$\gamma_1(t, x_2) = \sum_k^K \gamma_{1k}(t, x_2) e^{i\nu_{1k}t}, \quad \gamma_2(t, x_1) = \sum_k^K \gamma_{2k}(t, x_1) e^{i\nu_{2k}t};$$

здесь ν_{1k}, ν_{2k} — вещественные числа, а функции $\gamma_{1k}(t, x_2)$, $\gamma_{2k}(t, x_1)$ являются T -периодическими по первой переменной, обладают непрерывными производными первого порядка по x_2 и x_1 соответственно и удовлетворяют условию Липшица на G с независимыми от t константами, K — некоторое натуральное число.

При $\mu_1 = \mu_2 = 0$ система (1) распадается на два n -мерных дифференциальных уравнения, которые в дальнейшем будем называть порождающими

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1), \tag{2}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2). \tag{3}$$

Предполагаем, что каждое из уравнений (2), (3) допускает в области G семейство T -периодических порождающих решений

$$x_1 = \varphi_1(t, h_1), \quad x_2 = \varphi_2(t, h_2),$$

зависящих от некоторых одномерных параметров h_1 и h_2 . Функции $\varphi_1(t, h_1) \in G \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi_2(t, h_2) \in G \subset \mathbb{R}^n$ являются непрерывно дифференцируемыми по h_1 и h_2 соответственно. Тогда единица является собственным значением операторов сдвига по траекториям линейризованных на φ_1, φ_2 уравнений (2) и (3), т.е. линейных уравнений

$$\dot{y}_1 = \frac{df_1(\varphi_1(t, h_1))}{dx_1} y_1, \tag{4}$$

$$\dot{y}_2 = \frac{df_2(\varphi_2(t, h_2))}{dx_2} y_2. \tag{5}$$

Будем предполагать, что это собственное значение каждого из операторов сдвига по траекториям уравнений (4), (5) простое.

Функции $\varphi_{12}(t, h_1) = \frac{\partial \varphi_1(t, h_1)}{\partial h_1}$, $\varphi_{22}(t, h_2) = \frac{\partial \varphi_2(t, h_2)}{\partial h_2}$ являются T -периодическими решениями уравнений (4) и (5) соответственно. Ниже будем предполагать, что для всех t, h_1, h_2 функции $\varphi_{12}(t, h_1) \neq 0$, $\varphi_{22}(t, h_2) \neq 0$.

У оператора сдвига сопряженных к (4) и (5) уравнениям единица также будет простым собственным значением. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} + \left(\frac{df_1}{dx_1} \Big|_{x_1=\varphi_1(t, h_1)} \right)^* z_1 &= 0, \\ \frac{dz_2}{dt} + \left(\frac{df_2}{dx_2} \Big|_{x_2=\varphi_2(t, h_2)} \right)^* z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Они допускают непрерывные периодические решения, обозначим их через ψ_1, ψ_2 . Решение сопряженной системы $\psi_1(t, h_1), \psi_2(t, h_2)$ выберем так, чтобы выполнялись соотношения $\langle \varphi_{i2}(t, h_i), \psi_i(t, h_i) \rangle \equiv 1, i = 1, 2$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Для исследуемой системы введем функцию Малкина $(P_1, P_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определяемую формулами

$$P_1(h_1, h_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle \gamma_1(\tau, \varphi_2(\tau, h_2)), \psi_1(\tau, h_1) \rangle d\tau,$$

$$P_2(h_1, h_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \langle \gamma_2(\tau, \varphi_1(\tau, h_1)), \psi_2(\tau, h_2) \rangle d\tau.$$

Непрерывной ветвью почти периодических решений назовем вектор-функцию $x(t, \mu_1, \mu_2) = (x_1(t, \mu_1, \mu_2), x_2(t, \mu_1, \mu_2))$, где функции x_1, x_2 непрерывны, а $x(\cdot, \mu_1, \mu_2)$ является почти периодическим решением системы (1).

Будем говорить, что $(\varphi_1(t, h_1), \varphi_2(t, h_2))$ является порождающим решением непрерывной ветви решений $x(t, \mu_1, \mu_2)$, если $x(t, 0, 0) = (\varphi_1(t, h_1, h_2), \varphi_2(t, h_1, h_2))$.

Теорема 1. *При достаточно малых значениях μ_1 и μ_2 таких, что для решения (h_1^*, h_2^*) системы*

$$P_1(h_1, h_2) = 0, \quad P_2(h_1, h_2) = 0$$

характеристическое уравнение

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial P_1(h_1, h_2)}{\partial h_1} \lambda & -\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\partial P_1(h_1, h_2)}{\partial h_2} \\ \frac{\partial P_2(h_1, h_2)}{\partial h_1} & -\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\partial P_2(h_1, h_2)}{\partial h_2} \lambda \end{array} \right|_{(h_1^*, h_2^*)} = 0$$

не имеет корней с нулевыми вещественными частями, существует единственная непрерывная ветвь почти периодических решений у системы (1), обращающаяся при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ в порождающее решение $(\varphi_1(t, h_1^), \varphi_2(t, h_2^*))$.*

Рассмотрим нелинейную систему специального вида:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu_1 A_1(t) x_1 + \mu_1^2 f_1 + \mu_1 \mu_2 f_2 + \mu_2^2 f_3 + \mu_1 g_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \mu_2 A_2(t) x_2 + \mu_1^2 f_4 + \mu_1 \mu_2 f_5 + \mu_2^2 f_6 + \mu_2 g_2(t), \end{aligned} \quad (6)$$

в которой $x_1(t) \in \mathbb{R}^n, x_2(t) \in \mathbb{R}^n, g_i(t) \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, A_1(t)$ и $A_2(t)$ являются периодическими матрицами порядка n периодов T_1 и T_2 соответственно, $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — почти периодические функции, μ_1 и μ_2 — малые положительные параметры; функции $f_i = f_i(t, x_1, x_2)$, $i = \overline{1, 6}$, удовлетворяют условию Липшица по переменным x_1, x_2 на G с константами L_i соответственно и являются почти периодическими по t . Согласно теореме Флоке фундаментальные матрицы решений для систем

$$\frac{dx_1}{dt} = A_1(t) x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = A_2(t) x_2$$

имеют следующий вид: $\Phi_1(t) e^{\Lambda_1 t}, \Phi_2(t) e^{\Lambda_2 t}$, где $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$ — неособенные матрицы периода T_1 и T_2 соответственно, а Λ_1, Λ_2 — постоянные матрицы. Предполагается, что матрицы Λ_1, Λ_2 не имеют собственных значений на мнимой оси.

Пусть область $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ описывается неравенствами $c_1 \mu_1^{2-\varepsilon} < \mu_2 < c_2 \mu_1^{1/2+\varepsilon}$, где $c_1, c_2 > 0$, $0 < \varepsilon < 3/4$ — некоторые константы. В пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим постоянный вектор $(\bar{A}_1^{-1} \bar{g}_1, \bar{A}_2^{-1} \bar{g}_2)$, где $\bar{A}_i = \frac{1}{T} \int_0^T A_i(\tau) d\tau, \bar{g}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g_i(\tau) d\tau, i = \overline{1, 2}$.

Теорема 2. При достаточно малых значениях параметров μ_1 и μ_2 , принадлежащих области (Ω_1) , система (6) имеет почти периодическое решение. Разность между этим решением и константами $\overline{A_1^{-1}g_1}, \overline{A_2^{-1}g_2}$ стремится к нулю при $\mu_1 \rightarrow 0$ и $\mu_2 \rightarrow 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. *Нелинейные почти периодические колебания* (Наука, М., 1970).
- [2] Малкин И.Г. *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний* (ГИТТЛ, М., 1956).
- [3] Перов А.И. *Периодические, почти периодические колебания и ограниченные решения дифференциальных уравнений*, ДАН СССР **132** (3), 531-534 (1960).
- [4] Левитан Б.М., Жиков В.В. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения* (МГУ, М., 1978).
- [5] Тхай В.Н. *Колебания, устойчивость и стабилизация в модели, содержащей связанные подсистемы с циклами*, Автомат. и телемех. Вып. 7, 40-51 (2015).
- [6] Kamenski M., Makarenko O., Nistri P. *A continuation principle for a class of periodically perturbed autonomous systems*, Math. Nachrichten **281** (1), 41-61 (2013).

Никита Алексеевич Письменный

Воронежский государственный университет,

Университетская площадь, 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: n.pismenny@gmail.com

N.A. Pismenny

Almost periodic solutions of nonlinear ode systems with two small parameters

Abstract. We deal with the problem of the existence and uniqueness of almost periodic solutions of a nonlinear ODE system with two small parameters. We prove the bifurcation theorem of almost periodic solutions for a nonlinear system of differential equations with two small positive parameters and an almost periodic right-hand side from the cycle of the generating system. The averaging principal in the problem of almost periodic solutions of a system of special type differential equations with two small parameters is proved.

Keywords: almost periodic solutions, small parameters, nonlinear system, bifurcation.

Nikita Alekseevich Pismenny

Voronezh State University,

1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018, Russia,

e-mail: n.pismenny@gmail.com