Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова, Исследование методов локализации q -скачков и разрывов первого рода зашумленной функции, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 7, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-7-3-14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:29:25

А.Л. АГЕЕВ, Т.В. АНТОНОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ЛОКАЛИЗАЦИИ q -СКАЧКОВ И РАЗРЫВОВ ПЕРВОГО РОДА ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ

Аннотация. Рассмотрены задача локализации (определения положения) разрывов первого рода функции одного переменного и задача локализации q -скачков зашумленной функции. В первом случае предполагается, что точная функция гладкая за исключением конечного числа разрывов первого рода. Во втором случае точная функция гладкая за исключением конечного числа маленьких отрезков длины $2q$. Требуется по приближенно заданной в $L_2(\mathbb{R})$ функции и уровню возмущения определить количество разрывов (q -скачков) и аппроксимировать их положение. Построен класс регулярных методов усреднения и получены оценки точности локализации, разделимости и наблюдаемости на классах корректности.

Ключевые слова: некорректная задача, регуляризирующий алгоритм, порог разделимости, порог наблюдаемости, разрыв первого рода, q -скачок.

УДК: 517.988

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-7-3-14

ВВЕДЕНИЕ

В работе проведено теоретическое исследование двух близких проблем. Первая — задача локализации (определения положения) разрывов первого рода функции одного переменного. Предполагается, что точная функция x гладкая за исключением конечного числа l точек $\{s_k\}_1^l$. В точках s_k существуют значения $x(s_k \pm 0)$, не равные между собой. Через $\Delta_k = x(s_k + 0) - x(s_k - 0)$ обозначается скачок функции x в точке s_k . Требуется по приближенно заданной функции $x^\delta : \|x^\delta - x\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta$ и уровню возмущения δ методом локализации определить число l и аппроксимировать точки $\{s_k\}_1^l$ с оценкой точности аппроксимации.

Это некорректно поставленная проблема и для ее решения нужно строить регуляризирующие алгоритмы (основы теории решения классических некорректно поставленных задач см., например, в [1]–[3]). Ссылки на области, где такого рода задачи возникают на практике, можно найти, например, в [4]–[7] (см. также обзор [8]). В случае статистического шума в задании возмущенной функции теоретическое изучение этой проблемы (задача о разладке) проведено, например, в [9], [10]. Ссылки на теоретическое изучение методов решения задачи локализации разрывов первого рода в случае детерминированных шумов приведены, например, в [11]–[15].

Вторую проблему, рассматриваемую в работе, назовем задачей локализации q -скачков зашумленной функции. В.Б. Костоусов обратил внимание авторов на известный факт: наличие у точной функции разрывов первого рода является идеализацией, а на практике

вместо точки разрыва s_k есть маленький отрезок $[s_k - q, s_k + q]$, $k = 1, 2, \dots, l$, внутри которого функция ведет себя нерегулярно. При этом величина $\Delta_k^q = x(s_k + q) - x(s_k - q)$ не равна нулю. Вне этих отрезков функция гладкая. Будем говорить, что функция x имеет q -скачок Δ_k^q на отрезке $[s_k - q, s_k + q]$ и поставим задачу определения числа l и положения q -скачков $\{s_k\}_1^l$ функции x по функции $x^\delta : \|x^\delta - x\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta$ и уровню возмущения δ . Задача локализации разрывов первого рода является предельным случаем задачи локализации q -скачков при q , стремящемся к нулю. Насколько известно авторам, подобная постановка ранее не рассматривалась.

В качестве методов решения данных задач в нашей работе используются усреднения, масштабируемые с помощью параметра регуляризации. Способ исследования методов заключается в проведении оценок точности локализации, разделимости и наблюдаемости на классах корректности. Для задачи локализации разрывов первого рода из оценок следует, что построенные методы обладают свойством регуляризации. Ясно, что для задачи локализации q -скачков нельзя устремлять уровень погрешности δ к нулю и, следовательно, нельзя построить регуляризирующие алгоритмы в классическом смысле [1]–[3]. Однако, в работе получены оценки, справедливые для интервала погрешностей $\delta \in [\hat{\delta}(q), \delta_0]$, где δ_0 — абсолютная константа (зависит от параметров, определяющих класс корректности), а функция $\hat{\delta}(q) > 0$ монотонно убывая стремится к нулю при $q \rightarrow 0$. При согласованном стремлении к нулю δ и q погрешность стремится к нулю, т. е. наблюдается некоторый аналог регуляризирующего алгоритма.

С точки зрения приложения разработанной теории к практике, представляет интерес оценка обратной функции $\hat{q}(\delta) = \hat{\delta}^{-1}(q)$. При заданном уровне погрешности δ величина $\hat{q}(\delta)$ является порогом гарантированного применения методов локализации к задаче локализации q -скачков, т. е. требуется, чтобы $q \leq \hat{q}(\delta)$. В частности, и с точки зрения практики и с точки зрения теории, интересно, как ведет себя эта функция при δ , стремящемся к нулю. Заметим, что если условие на q не выполняется, то нельзя гарантировать, что метод правильно определит количество q -скачков и получаемые в работе оценки точности не будут верны.

Остановимся на особенностях неустойчивых задач локализации, которые отсутствуют в классических некорректно поставленных задачах и которые делают желательным наряду с традиционной характеристикой метода П, а именно, точности локализации, введение новых важных характеристик методов — разделимости и наблюдаемости. Оказывается, что для любого выбранного метода локализации П существует следующая пара функций: порог разделимости $\hat{h}(\Pi, \delta) > 0$ и порог наблюдаемости $\hat{\Delta}(\Pi, \delta) > 0$. Эти функции также зависят от класса корректности, который будет введен позднее. При этом метод П не может гарантированно локализовать особенности функции, принадлежащей классу корректности, при нарушении одного из условий $\min_{1 \leq k \leq l} |\Delta_k| \geq \hat{\Delta}(\Pi, \delta)$ или $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq \hat{h}(\Pi, \delta)$. Ясно, что хотелось бы иметь методы с наименьшими $\hat{h}(\Pi, \delta) > 0$ и $\hat{\Delta}(\Pi, \delta) > 0$. К сожалению, порог наблюдаемости и порог разделимости взаимно влияют друг на друга и на точность локализации разрывов, т. е. изменяя одну из функций приходится изменять другую. Поэтому в [8] было предложено исследовать следующие два крайних варианта.

Вариант (А). Задача восстановления точек $\{s_k\}_1^l$, когда $\min_{1 \leq k \leq l} |\Delta_k| \gg \delta$, в то время как метод должен гарантированно восстанавливать как можно более близкие положения, т. е. порог разделимости $\hat{h}(\Pi, \delta)$ должен быть как можно меньше.

(A1) $\min_{1 \leq k \leq l} |\Delta_k| \geq \Delta^{\min} > 0$, где $\hat{\Delta}(\Pi, \delta) = \Delta^{\min}$ — константа;

(A2) $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq \hat{h}(\Pi, \delta)$, где $\hat{h}(\Pi, \delta)$ — характеристика метода Π (порог разделимости), зависящая от δ и подлежащая оценке.

Вариант (Б). Задача восстановления точек $\{s_k\}_1^l$, когда $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \gg \delta$, в то время как метод должен гарантированно восстанавливать разрывы, имеющие как можно более малую по модулю величину скачка, т.е. порог наблюдаемости $\hat{\Delta}(\Pi, \delta)$ должен быть как можно меньше.

(B1) $\min_{1 \leq k \leq l} |\Delta_k| \geq \hat{\Delta}(\Pi, \delta)$, где $\hat{\Delta}(\Pi, \delta)$ — характеристика метода Π (порог наблюдаемости), подлежащая оценке;

(B2) $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq h^{\min} > 0$, где $\hat{h}(\Pi, \delta) = h^{\min}$ — константа.

Для варианта (A) задача локализации разрывов первого рода достаточно полно исследована [13], [14] и соответствующая теорема приводится в настоящей работе без доказательства для полноты изложения и удобства читателя. Теорема с оценками для задачи локализации q -скачков для варианта (A) является новой. Для варианта (Б) обе теоремы с оценками для задачи локализации разрывов и локализации q -скачков сформулированы и доказаны впервые. Результаты, касающиеся задачи локализации разрывов первого рода, изложены в разделе 1. Утверждения относительно проблемы локализации q -скачков находятся в разделе 2.

1. ЗАДАЧА ЛОКАЛИЗАЦИИ РАЗРЫВОВ ПЕРВОГО РОДА

Введем линейное множество $MV(\mathbb{R})$ функций $x(s)$ одной переменной с конечным числом l разрывов первого рода в точках $\{s_k\}_1^l$: на любом отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва, функция x абсолютно непрерывна, функция x ограничена на $\mathbb{R}$, функция x' почти всюду (п.в.) ограничена на $\mathbb{R}$. Обозначим через $\Delta_k = x(s_k + 0) - x(s_k - 0)$ величину скачка функции x в точке s_k .

Для краткости далее под $\|\cdot\|_{L_1}$ и $\|\cdot\|_{L_2}$ будем понимать $\|\cdot\|_{L_1(\mathbb{R})}$ и $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R})}$, через ess sup будем обозначать супремум п.в.

Задача локализации точек разрыва в $MV(\mathbb{R})$. Пусть функция x принадлежит множеству $MV(\mathbb{R})$. Требуется по функции x^δ и уровню погрешности δ таким, что $\|x - x^\delta\|_{L_2} \leq \delta$, определить число l и аппроксимировать точки $\{s_k\}_1^l$ с оценкой точности аппроксимации.

Для получения оценок точности рассмотрим класс корректности функций x из множества $MV(\mathbb{R})$ (априорная информация).

(*) Задано число $r > 0$ такое, что $\text{ess sup}_{s \in \mathbb{R}} |x'(s)| \leq r$.

В условии (*) число r без ограничения общности можно считать равным единице, что мы и будем делать в дальнейшем. Множество точных функций $x \in MV(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию (*), обозначим $\mathfrak{M}$. На классе $\mathfrak{M}$ для метода локализации $\Pi = \Pi(x^\delta, \delta)$, определяющего число l и строящего приближения s_k^δ , будут получены оценки точности аппроксимации точек s_k величинами s_k^δ

$$\tau(\delta, \Pi, \mathfrak{M}) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \sup_{\|x - x^\delta\|_{L_2} \leq \delta} \max_{1 \leq k \leq l} |s_k - s_k^\delta|.$$

В качестве метода регуляризации рассмотрим множество методов, являющихся модификацией методов усреднения из [13]. При этом каждая усредняющая функция будет порождать свой регулярный метод. Введем множество ΦF усредняющих функций $\phi(s)$, удовлетворяющих следующим условиям:

(а) $\phi \in W_1^1(\mathbb{R})$, $|\phi'(t)| \leq C$, C — положительная константа;

- (b) $\max_{t \in \mathbb{R}} |\phi(t)| = \phi(0) = 1$;
 (c) $\phi(t) = 0$, $t \notin [-1, 1]$, т. е. функция ϕ финитна.

Заметим, что условие (c) финитности функции ϕ введено для упрощения выкладок и от него можно отказаться (например, [14]). Ясно, что для $\phi \in \Phi F$ имеем $\phi' \in L_2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $x_\lambda^\delta(s)$, заданную формулой

$$x_\lambda^\delta(s) = \int_{s-\lambda}^{s+\lambda} x^\delta(t) (\phi_\lambda(s-t))'_s dt, \quad \phi_\lambda(t) = \phi(t/\lambda), \quad \lambda > 0. \quad (1.1)$$

Сформулируем в удобной форме лемму 3 из работы [15].

Лемма 1. Пусть $x \in \mathfrak{M}$ и зафиксирована функция $\phi \in \Phi F$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для любых $\delta > 0$ существует непрерывная функция x_λ^δ , задаваемая формулой (1.1), для которой имеют место следующие представления:

- (1) для всех $s : |s - s_k| \geq \lambda$, $k = 1, 2, \dots, l$,

$$x_\lambda^\delta(s) = \alpha_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s),$$

- (2) при выполнении условия $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq \lambda$

$$x_\lambda^\delta(s_k) = \Delta_k + \alpha_\lambda(s_k) + \Delta x_\lambda^\delta(s_k), \quad k = 1, 2, \dots, l,$$

где

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |\alpha_\lambda(s)| \leq A_0 \lambda, \quad \sup_{s \in \mathbb{R}} |\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq A_1 \lambda^{-1/2} \delta, \quad A_0 = \|\phi\|_{L_1}, \quad A_1 = \|\phi'\|_{L_2}.$$

Без ограничения общности будем предполагать, что все точки $\{s_k\}_1^l$ принадлежат известному интервалу $(-d, d)$, $d > 0$. Метод локализации по функции x_λ^δ , задаваемой формулой (1.1), определяет число m , относительно которого будет доказано, что $m = l$, находит приближения s_k^δ точек s_k , для которых будут получены оценки точности аппроксимации. Для определения метода локализации при фиксированном δ необходимо указать параметры h , Δ и параметр регуляризации λ . Параметры h и Δ будут либо постоянными, либо являться функциями от δ , в зависимости от рассматриваемого варианта задачи (А) или (Б) (см. введение). Зависимости $h(\delta)$ и $\Delta(\delta)$ приведены ниже, перед формулировками соответствующих теорем.

Метод $\text{Ps}(x^\delta, \delta)$. Зафиксируем $\phi \in \Phi F$. По функции x^δ вычислим вспомогательную функцию x_λ^δ по формуле (1.1). Положим текущее $\tilde{s} := -d - h$, $m := 0$.

Шаг метода: если уравнение $|x_\lambda^\delta(s)| - \Delta/2 = 0$ на отрезке $[\tilde{s}, d]$ не имеет корней,

то завершаем процесс;

иначе $m := m + 1$ и левый корень обозначим a_m ;

положим $s_m^\delta = a_m + \lambda/2$, $\tilde{s} := a_m + 2\lambda$ и повторяем шаг метода.

Рассмотрим вариант (А) задачи локализации разрывов первого рода. Необходимо пояснить, что в условии (А2) во введении фигурирует функция $\hat{h}(\Pi, \delta)$ — минимальный порог разделимости для метода Π . Как правило эта функция неизвестна, а вместо нее указывается некоторая оценка $h(\delta) \geq \hat{h}(\Pi, \delta)$. Формула для $h(\delta)$ будет приведена ниже. Условия для варианта (А) имеют вид

(А1) условие наблюдаемости: задано число $\Delta^{\min} > 0$ и $\min_{1 \leq k \leq l} |\Delta_k| \geq \Delta^{\min}$;

(А2) условие разделимости: задана функция $h(\delta)$ и $\min_{k \neq j, 1 \leq k, j \leq l} |s_k - s_j| \geq h(\delta)$.

Напомним, что $A_0 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}$. Перед формулировкой теоремы для варианта (А) введем числа и функции

$$D = \left(\frac{5A_1}{\Delta^{\min}} \right)^2, \quad \delta_0 = \left(\frac{\Delta^{\min}}{5A_0} \right)^{1/2} \frac{\Delta^{\min}}{5A_1},$$

$$\lambda(\delta) = D\delta^2, \quad h(\delta) = 3D\delta^2. \quad (1.2)$$

В более общих условиях (для счетного числа разрывов первого рода) в [14] доказана

Теорема 1. В условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta \leq \delta_0$ при связи параметров (1.2), если $x \in \mathfrak{M}$ и удовлетворяет условиям (А1), (А2), для метода $\text{Ps}(x^\delta, \delta)$ получим $m = l$, и будет справедлива оценка

$$\tau(\delta, \text{Ps}, \mathfrak{M}) \leq (D/2)\delta^2.$$

В работе [13] введено понятие оптимальности (оптимальности по порядку) метода локализации по точности и Р-оптимальности (Р-оптимальности по порядку) метода по разделимости на классе корректности $\mathfrak{M}$. Там же показано, что рассматриваемые методы оптимальны по порядку и Р-оптимальны по порядку на $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим вариант (Б). В условии (Б2) во введении фигурирует функция $\hat{\Delta}(\Pi, \delta)$ — минимальный порог наблюдаемости для метода Π . Вместо функции $\hat{\Delta}(\Pi, \delta)$ указывается ее некоторая оценка $\Delta(\delta) \geq \hat{\Delta}(\Pi, \delta)$. Формула для $\Delta(\delta)$ будет приведена ниже. Условия для варианта (Б) имеют вид

- (Б1) условие наблюдаемости: задана функция $\Delta(\delta)$ и $\min_{1 \leq k \leq l} |\Delta_k| \geq \Delta(\delta)$;
- (Б2) условие разделимости: задано число $h^{\min} > 0$ и $\min_{k \neq j, 1 \leq k, j \leq l} |s_k - s_j| \geq h^{\min}$.

Для формулировки теоремы для варианта (Б) введем число и функции

$$\delta_0 = \left(\frac{h^{\min}}{3} \right)^{3/2},$$

$$\lambda(\delta) = \delta^{2/3}, \quad \Delta(\delta) = 3(A_0 + A_1)\delta^{2/3}. \quad (1.3)$$

Теорема 2. В условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta \leq \delta_0$ при связи параметров (1.3), если $x \in \mathfrak{M}$ и удовлетворяет условиям (Б1), (Б2), для метода $\text{Ps}(x^\delta, \delta)$ получим $m = l$, и будет справедлива оценка

$$\tau(\delta, \text{Ps}, \mathfrak{M}) \leq \delta^{2/3}/2.$$

Доказательство. Используя представление из п. (1) леммы 1

$$x_\lambda^\delta(s) = \alpha_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s),$$

оценим модуль функции x_λ^δ для $s : |s - s_k| \geq \lambda$, $k = 1, 2, \dots, l$. При связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ имеем $|\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq A_1 \delta \lambda^{-1/2} = A_1 \delta^{2/3}$ и $|\alpha_\lambda(s)| \leq A_0 \lambda = A_0 \delta^{2/3}$. Следовательно, для $s : |s - s_k| \geq \lambda$, $k = 1, 2, \dots, l$,

$$|x_\lambda^\delta(s)| \leq A_0 \lambda + A_1 \delta \lambda^{-1/2} = (A_0 + A_1) \delta^{2/3} = \Delta(\delta)/3 < \Delta(\delta)/2. \quad (1.4)$$

Поскольку $\delta \leq \delta_0 = (h^{\min}/3)^{3/2}$, то по условию разделимости (Б2) $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq 3\lambda$. Следовательно, при данном выборе параметров выполнено условие в п. (2) леммы 1. Рассмотрим функцию x_λ^δ в точках s_k , используя представление из п. (2) леммы 1,

$$x_\lambda^\delta(s_k) = \Delta_k + \alpha_\lambda(s_k) + \Delta x_\lambda^\delta(s_k).$$

Оценим снизу $|x_\lambda^\delta(s_k)|$. Учитывая оценки для $\alpha_\lambda(s)$ и $\Delta x_\lambda^\delta(s)$, полученные выше, и условие (Б1), для $k = 1, 2, \dots, l$ имеем

$$|x_\lambda^\delta(s_k)| \geq \Delta(\delta) - \Delta(\delta)/3 = (2/3)\Delta(\delta) > \Delta(\delta)/2. \quad (1.5)$$

Дальнейшее доказательство для простоты изложения проведем при $l = 2$, т.е. алгоритм Пс должен найти приближения s_k^δ , для точек s_k , $k = 1, 2$. Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом метод Пс должен сделать l шагов. Напомним, что мы рассматриваем задачу на множестве функций x , для которых выполнено условие разделимости (Б2): $s_2 - s_1 \geq h^{\min} \geq 3\lambda$.

Согласно (1.5) в точках s_k имеем $|x_\lambda^\delta(s_k)| > \Delta(\delta)/2$. Заметим, что параметры подобраны таким образом, что $|x_\lambda^\delta(-d - h)| < \Delta(\delta)/2$. Следуя алгоритму Пс, пусть a_1 первая точка, в которой $|x_\lambda^\delta(a_1)| = \Delta(\delta)/2$ (напомним, что функция x_λ^δ непрерывна). Так как $s_1 < s_2$, то согласно (1.4), $a_1 < s_1$. Заметим, что $s_1 - a_1 \leq \lambda$, следуя оценке (1.4). Следовательно, точка s_1 принадлежит отрезку $[a_1, a_1 + \lambda]$.

Далее, следуя алгоритму Пс, рассмотрим точку $\tilde{s} = a_1 + 2\lambda$. Ясно, что $\tilde{s} - s_1 > \lambda$. Покажем, что $\tilde{s} < s_2$. Используя условие разделимости (Б2), имеем

$$s_2 - \tilde{s} = s_2 - a_1 - 2\lambda > s_2 - s_1 - 2\lambda \geq \lambda > 0.$$

Следовательно, $\tilde{s} < s_2$ и $|x_\lambda^\delta(\tilde{s})| < \Delta(\delta)/2$. Далее, согласно (1.5), на отрезке $[\tilde{s}, d]$ найдется точка a_2 такая, что $|x_\lambda^\delta(a_2)| = \Delta(\delta)/2$. Следуя (1.4), $s_2 - a_2 \leq \lambda$, т.е. $s_2 \in [a_2, a_2 + \lambda]$.

Рассмотрим отрезок $[a_2 + 2\lambda, d]$. Ясно, что он не содержит точек, в которых модуль функции x_λ^δ больше или равен $\Delta(\delta)/2$. Таким образом, $m = 2$, и процесс завершен.

Поскольку для всех точек $s \in [a_k, a_k + \lambda]$, $k = 1, 2$, имеем оценку $|s - s_k| \leq \lambda$, то для середины $s_k^\delta := a_k + \lambda/2$ отрезка $[a_k, a_k + \lambda]$ справедлива оценка $|s_k^\delta - s_k| \leq \lambda/2$. $\square$

2. ЗАДАЧА ЛОКАЛИЗАЦИИ q -СКАЧКОВ

Пусть функция x одной переменной имеет конечное число l отрезков $[s_k - q, s_k + q]$, $q > 0$, $k = 1, 2, \dots, l$, на которых функция ведет себя нерегулярно, и величины $x(s_k + q + 0)$, $x(s_k - q - 0)$ не равны. Обозначим через $\Delta_k^q = x(s_k + q + 0) - x(s_k - q - 0)$ величину скачка функции x на k -м отрезке и будем говорить, что функция x имеет q -скачок в точке s_k . Введем линейное множество $MVJ_q(\mathbb{R})$ функций x определенных на $\mathbb{R}$: на любом отрезке таком, что соответствующий интервал не пересекается с отрезками $[s_k - q, s_k + q]$, $k = 1, 2, \dots, l$, функция x абсолютно непрерывна, функция x интегрируема на любом конечном отрезке и ограничена на $\mathbb{R}$, x' ограничена п.в. на $\mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^l [s_k - q, s_k + q]$.

Задача локализации q -скачков в $MVJ_q(\mathbb{R})$. Пусть функция x принадлежит множеству $MVJ_q(\mathbb{R})$. Требуется по функции x^δ и уровню погрешности δ таким, что $\|x - x^\delta\|_{L_2} \leq \delta$, определить число l и аппроксимировать точки $\{s_k\}_1^l$ с оценкой точности аппроксимации.

Для получения оценок точности рассмотрим класс корректности функций x из множества $MVJ_q(\mathbb{R})$ (априорная информация).

(**) Задано число $r > 0$ такое, что $\text{ess sup}_{s \in \mathbb{R}} |x(s)| \leq r$, $\text{ess sup}_{s \in \mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^l [s_k - q, s_k + q]} |x'(s)| \leq r$.

В условии (**) число r без ограничения общности можно считать равным единице, что и будем делать в дальнейшем. Множество точных функций $x \in MVJ_q(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию (**), обозначим $\mathfrak{M}_q$.

Зафиксируем усредняющую функцию $\phi \in \Phi F$ и рассмотрим вспомогательную функцию $x_\lambda^\delta(s)$, заданную формулой (1.1)

$$x_\lambda^\delta(s) = \int_{s-\lambda}^{s+\lambda} x^\delta(t)(\phi_\lambda(s-t))'_s dt, \quad \phi_\lambda(t) = \phi(t/\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Лемма 2. Пусть $x \in \mathfrak{M}_q$ и зафиксирована функция $\phi \in \Phi F$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для любых $\delta > 0$, $0 < q \leq \lambda$ существует непрерывная функция x_λ^δ , задаваемая формулой (1.1), для которой имеют место следующие представления:

- (1) для всех $s : |s - s_k| \geq \lambda + q$, $k = 1, 2, \dots, l$, $x_\lambda^\delta(s) = \alpha_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s)$,
- (2) при выполнении условия $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq \lambda + q$

$$x_\lambda^\delta(s_k) = \Delta_k^q + \tilde{\alpha}_\lambda(s_k) + \beta_\lambda^q(s_k) + \Delta x_\lambda^\delta(s_k), \quad k = 1, 2, \dots, l,$$

где

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |\alpha_\lambda(s)| \leq A_0 \lambda, \quad \sup_{s \in \mathbb{R}} |\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq A_1 \lambda^{-1/2} \delta, \quad |\tilde{\alpha}_\lambda(s_k)| \leq A_0 \lambda, \quad |\beta_\lambda^q(s_k)| \leq A_2 q \lambda^{-1},$$

$$A_0 = \|\phi\|_{L_1}, \quad A_1 = \|\phi'\|_{L_2}, \quad A_2 = 4C.$$

Доказательство. Согласно ([16], гл. 3, § 9, п. 3.9.6) функция x_λ^δ , задаваемая формулой (1.1), непрерывна. Вводя обозначение $\Delta x = x^\delta - x$, имеем

$$x_\lambda^\delta(s) = \int_{s-\lambda}^{s+\lambda} x(t)(\phi_\lambda(s-t))'_s dt + \Delta x_\lambda^\delta(s), \quad (2.1)$$

где

$$\Delta x_\lambda^\delta(s) = \int_{s-\lambda}^{s+\lambda} \Delta x(t)(\phi_\lambda(s-t))'_s dt.$$

Используя формулу Коши–Буняковского, имеем $|\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq \|\phi'\|_{L_2} \delta \lambda^{-1/2}$.

Получим представление в п. (1) леммы. Для $s : |s - s_k| \geq \lambda + q$, $k = 1, 2, \dots, l$, функция x абсолютно непрерывна на отрезке $[s - \lambda, s + \lambda]$, так как в этом случае отрезок $[s - \lambda, s + \lambda]$ не пересекается с отрезками $[s_k - q, s_k + q]$. Из абсолютной непрерывности функций x и ϕ следует ([17], гл. 9, § 7) возможность интегрирования по частям в первом слагаемом в правой части (2.1). Используя условия на функции x и ϕ , получаем требуемую оценку

$$\left| \int_{s-\lambda}^{s+\lambda} x(t)(\phi_\lambda(s-t))'_s dt \right| = \left| \int_{s-\lambda}^{s+\lambda} x'(t)\phi_\lambda(s-t) dt \right| \leq \|\phi\|_{L_1} \lambda.$$

Получим представление в п. (2). Учитывая финитность функции ϕ и условие $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq \lambda$, отрезок $[s_k - \lambda, s_k + \lambda]$ содержит точки только одного отрезка $[s_k - q, s_k + q]$. Введем функцию $\tilde{x} \in \mathfrak{M}$ такую, что разность $x - \tilde{x}$ равна нулю вне отрезков $[s_k - q, s_k + q]$, $k = 1, 2, \dots, l$, и ограничена п. в. $\text{ess sup}_{s \in \mathbb{R}} |x(s) - \tilde{x}(s)| \leq 2$. Разобьем интеграл в первом слагаемом в правой части (2.1) на сумму двух интегралов:

$$\int_{s_k-\lambda}^{s_k+\lambda} x(t)(\phi_\lambda(s_k-t))'_s dt = \int_{s_k-\lambda}^{s_k+\lambda} \tilde{x}(t)(\phi_\lambda(s_k-t))'_s dt + \int_{s_k-q}^{s_k+q} (x(t) - \tilde{x}(t))(\phi_\lambda(s_k-t))'_s dt.$$

Оценим сверху модуль второго слагаемого, используя условия на функции x и ϕ ,

$$\left| \int_{s_k-q}^{s_k+q} (x(t) - \tilde{x}(t))(\phi_\lambda(s_k-t))'_s dt \right| \leq \text{ess sup}_{s \in \mathbb{R}} |x(s) - \tilde{x}(s)| |\phi'| 2q \lambda^{-1} \leq 4Cq \lambda^{-1}.$$

Применяя для первого слагаемого п. (2) леммы 1, получаем требуемое равенство. $\square$

Без ограничения общности будем предполагать, что все точки $\{s_k\}_1^l$ принадлежат известному интервалу $(-d, d)$, $d > 0$. Метод локализации по функции $x_\lambda^\delta(s)$ определяет число m , относительно которого будет доказано, что $m = l$, находит приближения s_k^δ точек s_k , для которых будут получены оценки точности аппроксимации. Метод в своей работе использует параметры h , Δ и параметр регуляризации λ . Решение этой задачи также рассмотрим в вариантах **(А)** и **(Б)**.

Метод $\text{Ps}_q(x^\delta, \delta)$. Зафиксируем $\phi \in \Phi F$. По функции x^δ вычислим вспомогательную функцию x_λ^δ по формуле (1.1). Положим текущее $\tilde{s} := -d - h$, $m := 0$.

Шаг метода: если уравнение $|x_\lambda^\delta(s)| - \Delta/2 = 0$ на отрезке $[\tilde{s}, d]$ не имеет корней, то завершаем процесс;
иначе $m := m + 1$ и левый корень обозначим a_m ;
положим $s_m^\delta = a_m + (\lambda + q)/2$, $\tilde{s} := a_m + 2(\lambda + q)$ и повторяем шаг метода.

Метод Ps_q при $q = 0$ совпадает с методом Ps .

Напомним условия в варианте **(А)**:

- (А1)** условие наблюдаемости: задано число $\Delta^{\min} > 0$ и $\min_{1 \leq k \leq l} |\Delta_k^q| \geq \Delta^{\min}$;
(А2) условие разделимости: задана функция $h(\delta)$ и $\min_{k \neq j, 1 \leq k, j \leq l} |s_k - s_j| \geq h(\delta)$.

Напомним, что C — константа из условия на функцию ϕ , $A_0 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}$, $A_2 = 4C$. Для формулировки соответствующей теоремы введем числа и функции

$$D = \left(\frac{6A_1}{\Delta^{\min}} \right)^2, \quad D_1 = \frac{6\Delta^{\min}}{A_2} \left(\frac{A_1}{\Delta^{\min}} \right)^2, \quad \delta_0 = \left(\frac{\Delta^{\min}}{8A_0D} \right)^{1/2} = \left(\frac{\Delta^{\min}}{8A_0} \right)^{1/2} \frac{\Delta^{\min}}{6A_1},$$

$$\widehat{\delta}(q) = \left(\frac{q}{D_1} \right)^{1/2}, \quad \lambda(\delta) = D\delta^2, \quad h(\delta) = 3(D + D_1)\delta^2. \quad (2.2)$$

Теорема 3. В условиях рассматриваемой задачи для всех $\widehat{\delta}(q) \leq \delta \leq \delta_0$ при связи параметров (2.2), если $x \in \mathfrak{M}_q$ и удовлетворяет условиям **(А1)**, **(А2)**, для метода $\text{Ps}_q(x^\delta, \delta)$ получим $m = l$, и будет справедлива оценка

$$\tau(\delta, \text{Ps}_q, \mathfrak{M}_q) \leq (D + D_1)\delta^2/2.$$

Доказательство. При $\delta \geq \widehat{\delta}(q)$ имеем $q \leq D_1\delta^2$. Без ограничения общности считая, что $C \geq 1/6$, и учитывая, что $\Delta^{\min} \leq 2$, имеем $D \leq D_1$ и $q \leq \lambda$. Поскольку $h(\delta) = 3(D + D_1)\delta^2 \geq 3(\lambda + q)$, то $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq 3(\lambda + q)$. Следовательно, при данном выборе параметров выполнены условия леммы 2. Используя представление из п. (1) леммы 2

$$x_\lambda^\delta(s) = \alpha_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s),$$

оценим модуль функции x_λ^δ для $s : |s - s_k| \geq \lambda + q$, $k = 1, 2, \dots, l$. При связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ и условии $\delta \leq \delta_0$ имеем $|\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq A_1\delta\lambda^{-1/2} = \Delta^{\min}/6$ и $|\alpha_\lambda(s)| \leq A_0\lambda = \Delta^{\min}/8$. Следовательно, для $s : |s - s_k| \geq \lambda + q$, $k = 1, 2, \dots, l$,

$$\left| x_\lambda^\delta(s) \right| \leq |\alpha_\lambda(s)| + |\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq (7/24)\Delta^{\min} < \Delta^{\min}/2. \quad (2.3)$$

Рассмотрим функцию x_λ^δ в точках s_k , используя представление из п. (2) леммы 2,

$$x_\lambda^\delta(s_k) = \Delta_k^q + \tilde{\alpha}_\lambda(s_k) + \beta_\lambda^q(s_k) + \Delta x_\lambda^\delta(s_k).$$

Оценим снизу $|x_\lambda^\delta(s_k)|$. Поскольку $\lambda = \lambda(\delta)$ и $q \leq D_1\delta^2$, получаем $|\beta_\lambda^q(x_k)| \leq A_2q\lambda^{-1} \leq A_2D_1/D = \Delta^{\min}/6$. Учитывая оценки для $\alpha_\lambda(s)$ и $\Delta x_\lambda^\delta(s)$, полученные выше, и условие **(A1)**, для $k = 1, 2, \dots, l$ имеем

$$|x_\lambda^\delta(s_k)| \geq \Delta^{\min} - (11/24)\Delta^{\min} = (13/24)\Delta^{\min} > \Delta^{\min}/2. \quad (2.4)$$

Для простоты изложения дальнейшее доказательство проведем при $l = 2$, т.е. алгоритм Ps_q должен найти приближения s_k^δ , для точек s_k , $k = 1, 2$. Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом метод Ps_q должен сделать l шагов. Напомним, что рассматриваем задачу на множестве функций x , для которых выполнено условие разделимости **(A2)**: $s_2 - s_1 \geq h(\delta) \geq 3(\lambda + q)$.

Согласно (2.4) в точках s_k имеем $|x_\lambda^\delta(s_k)| > \Delta^{\min}/2$. Заметим, что параметры подобраны таким образом, что $|x_\lambda^\delta(-d - h)| < \Delta^{\min}/2$. Следуя алгоритму Ps_q , пусть a_1 — первая точка, в которой $|x_\lambda^\delta(a_1)| = \Delta^{\min}/2$ (напомним, что функция x_λ^δ непрерывна). Так как $s_1 < s_2$, то, согласно (2.3), $a_1 < s_1$. Заметим, что $s_1 - a_1 \leq \lambda + q$, следуя оценке (2.3). Следовательно, точка s_1 принадлежит отрезку $[a_1, a_1 + \lambda + q]$.

Далее, следуя алгоритму Ps_q , рассмотрим точку $\tilde{s} = a_1 + 2(\lambda + q)$. Ясно, что $\tilde{s} - s_1 > \lambda + q$. Покажем, что $\tilde{s} < s_2$. Используя условие разделимости **(A2)**, имеем

$$s_2 - \tilde{s} = s_2 - a_1 - 2(\lambda + q) > s_2 - s_1 - 2(\lambda + q) \geq \lambda + q > 0.$$

Следовательно, $\tilde{s} < s_2$ и $|x_\lambda^\delta(\tilde{s})| < \Delta^{\min}/2$. Далее, согласно (2.4), на отрезке $[\tilde{s}, d]$ найдется точка a_2 такая, что $|x_\lambda^\delta(a_2)| = \Delta^{\min}/2$. Следуя (2.3), $s_2 - a_2 \leq \lambda + q$, т.е. $s_2 \in [a_2, a_2 + \lambda + q]$.

Рассмотрим отрезок $[a_2 + 2(\lambda + q), d]$. Ясно, что он не содержит точек, в которых модуль функции x_λ^δ больше или равен $\Delta^{\min}/2$. Таким образом, $m = 2$ и процесс завершен.

Поскольку для всех точек $s \in [a_k, a_k + \lambda + q]$, $k = 1, 2$, имеем оценку $|s - s_k| \leq \lambda + q$, то для середины $s_k^\delta := a_k + (\lambda + q)/2$ отрезка $[a_k, a_k + \lambda + q]$ справедлива оценка $|s_k^\delta - s_k| \leq (\lambda + q)/2$. Учитывая (2.2), получаем требуемую оценку $|s_k^\delta - s_k| \leq (D + D_1)\delta^2/2$, $k = 1, 2$. $\square$

Напомним условия в варианте **(Б)**:

- (Б1)** условие наблюдаемости: задана функция $\Delta(\delta)$ и $\min_{1 \leq k \leq l} |\Delta_k| \geq \Delta(\delta)$;
(Б2) условие разделимости: задано число $h^{\min} > 0$ и $\min_{k \neq j, 1 \leq k, j \leq l} |s_k - s_j| \geq h^{\min}$.

Перед формулировкой теоремы для варианта **(Б)** введем числа и функции

$$D_2 = \frac{A_0 + A_1}{A_2}, \quad \delta_0 = \min \left\{ D_2^{-3/2}, \left(\frac{h^{\min}}{6} \right)^{3/2} \right\},$$

$$\widehat{\delta}(q) = \left(\frac{q}{D_2} \right)^{3/4}, \quad \lambda(\delta) = \delta^{2/3}, \quad \Delta(\delta) = 6(A_0 + A_1)\delta^{2/3}. \quad (2.5)$$

Теорема 4. В условиях рассматриваемой задачи для всех $\widehat{\delta}(q) \leq \delta \leq \delta_0$ при связи параметров (2.5), если $x \in \mathfrak{M}_q$ и удовлетворяет условиям **(Б1)**, **(Б2)**, для метода $\text{Ps}_q(x^\delta, \delta)$ получим $m = l$, и будет справедлива оценка

$$\tau(\delta, \text{Ps}_q, \mathfrak{M}_q) \leq \delta^{2/3}.$$

Доказательство. При $\delta \geq \widehat{\delta}(q)$ имеем $q \leq D_2\delta^{4/3}$. Поскольку $\delta \leq D_2^{-3/2}$, то $q \leq \lambda$. Так как $h^{\min} \geq 6\delta^{2/3} = 6\lambda$, то $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \geq 3(\lambda + q)$. Следовательно, при данном выборе параметров выполнены условия леммы 2. Используя представление из п. (1) леммы 2

$$x_\lambda^\delta(s) = \alpha_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s),$$

оценим модуль функции x_λ^δ для $s : |s - s_k| \geq \lambda + q$, $k = 1, 2, \dots, l$. При связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ имеем $|\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq A_1 \delta \lambda^{-1/2} = A_1 \delta^{2/3}$ и $|\alpha_\lambda(s)| \leq A_0 \lambda = A_0 \delta^{2/3}$. Следовательно, для $s : |s - s_k| \geq \lambda + q$, $k = 1, 2, \dots, l$,

$$|x_\lambda^\delta(s)| \leq |\alpha_\lambda(s)| + |\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq (A_0 + A_1) \delta^{2/3} = \Delta(\delta)/6 < \Delta(\delta)/2.$$

Рассмотрим функцию x_λ^δ в точках s_k , используя представление из п. (2) леммы 2,

$$x_\lambda^\delta(s_k) = \Delta_k + \tilde{\alpha}_\lambda(s_k) + \beta_\lambda^q(s_k) + \Delta x_\lambda^\delta(s_k).$$

Оценим снизу $|x_\lambda^\delta(s_k)|$. Поскольку $\lambda = \lambda(\delta)$ и $q \leq D_2 \delta^{4/3}$, получаем $|\beta_\lambda^q(s_k)| \leq A_2 q \lambda^{-1} = A_2 D_2 \delta^{2/3} = (A_1 + A_0) \delta^{2/3} = \Delta(\delta)/6$. Учитывая оценки для $\alpha_\lambda(s)$ и $\Delta x_\lambda^\delta(s)$, полученные выше, и условие (B1), для $k = 1, 2, \dots, l$ имеем

$$|x_\lambda^\delta(s_k)| \geq \Delta(\delta) - \Delta(\delta)/3 = (2/3)\Delta(\delta) > \Delta(\delta)/2.$$

Дальнейшее доказательство для простоты изложения проведем при $l = 2$, т.е. алгоритм Ps_q должен найти приближения s_k^δ , для точек s_k , $k = 1, 2$. Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом метод Ps_q должен найти l отрезков. Напомним, что рассматриваем задачу на множестве функций x , для которых выполнено условие разделимости (B2): $s_2 - s_1 \geq h^{\min} \geq 3(\lambda + q)$.

Конец доказательства полностью повторяет конец доказательства теоремы 3 (при замене $\Delta^{\min}$ на $\Delta(\delta)$). $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем итоги работы, упрощая формулировки. Упрощение заключается в том, что во всех утверждениях приводятся только порядки сходимости по степеням δ , в то время как в точных формулировках приведены константы, зависящие от метода локализации и класса корректности. Также дадим интерпретацию полученных результатов с точки зрения практики.

Вариант (А). Задача восстановления точек $\{s_k\}_1^l$, когда $\min_{1 \leq k \leq l} |\Delta_k| \gg \delta$.

Для исследуемых в работе методов усреднения при условии выбора параметра регуляризации $O(\delta^2)$ получаем точность восстановления и разделимость также порядка $O(\delta^2)$. Для задачи локализации q -скачков получено условие работоспособности метода $q \leq \hat{q}(\delta)$, где $\hat{q}(\delta)$ есть величина порядка $O(\delta^2)$, т.е. имеет тот же порядок, что и точность локализации и разделимость. Исследуемые методы являются оптимальными по порядку на соответствующем классе корректности.

Вариант (Б). Задача восстановления точек $\{s_k\}_1^l$, когда $\min_{k \neq j} |s_k - s_j| \gg \delta$.

Для исследуемых в работе методов усреднения при условии выбора параметра регуляризации $O(\delta^{2/3})$ получаем точность восстановления и наблюдаемость также порядка $O(\delta^{2/3})$. Для задачи локализации q -скачков получено условие работоспособности метода $q \leq \hat{q}(\delta)$, где $\hat{q}(\delta)$ есть величина порядка $O(\delta^{4/3})$, т.е. сходится к нулю существенно быстрее, чем точность локализации и наблюдаемость.

Обратим внимание, что в случае (А) и в случае (Б) используются разные параметры регуляризации, т.е. методы, для которых проведены оценки, разные.

Приведем интерпретацию задачи локализации q -скачков, основанную на анализе доказательства леммы 2. Можно считать, что имеем задачу локализации разрывов первого рода с двумя типами погрешностей: погрешность в L_2 и погрешность, сосредоточенная на отрезках $[s_k - q, s_k + q]$, $k = 1, 2, \dots, l$. Последняя погрешность характеризуется тем, что она сосредоточена на малых отрезках, ограничена по максимуму, но не ограничена по производной

(см. условие (**)). Тогда условие $q \leq \hat{q}(\delta)$ задает такой уровень погрешности второго типа, чтобы порядок сходимости определялся уровнем δ погрешности первого типа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач* (Наука, М., 1974).
- [2] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения* (Наука, М., 1978).
- [3] Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-posed problems with a priori information* (VSP, Utrecht, the Netherlands, 1995).
- [4] Winkler G., Wittich O., Liebsher V., Kempe A. *Don't shed tears over breaks*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **107** (2), 57–87 (2005).
- [5] Сизиков В.С. *Математические методы обработки результатов измерений* (Политехника, СПб., 2001).
- [6] Малла С. *Взгляды в обработке сигналов* (Мир, М., 2005).
- [7] Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Численные методы решения некорректных задач* (Наука, М., 1990).
- [8] Агеев А.Л., Антонова Т.В. *О новом классе некорректно поставленных задач*, Изв. Урал. гос. ун-та, № 58, 24–42. (Матем. Механ. Информатика. Вып. 11.) (2008).
- [9] Oudshoorn C.G.M. *Asymptotically minimax estimation of a function with jumps*, Bernoulli **4** (1), 15–33 (1998).
- [10] Коростелев А.П. *О минимаксном оценивании разрывного сигнала*, Теория вероятн. и ее применен. **32** (4), 796–799 (1987).
- [11] Антонова Т.В. *Восстановление функции с конечным числом разрывов 1 рода по зашумленным данным*, Изв. вузов. Матем., № 7, 65–68 (2001).
- [12] Антонова Т.В. *Новые методы локализации разрывов зашумленной функции*, Сиб. журн. вычисл. матем. **13** (4), 375–386 (2010).
- [13] Агеев А.Л., Антонова Т.В. *О некорректно поставленных задачах локализации особенностей*, Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН **17** (3), 30–45 (2011).
- [14] Агеев А.Л., Антонова Т.В. *О локализации разрывов первого рода для функций ограниченной вариации*, Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН **18** (1), 56–68 (2012).
- [15] Ageev A.L., Antonova T.V. *New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation*, J. Inverse and Ill-Posed Problems **21** (2), 177–191 (2013).
- [16] Богачев В.И. *Основы теории меры*. Т. 1. (НИИ “Регулярная и хаотическая динамика”, Москва–Ижевск, 2003).
- [17] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной* (Наука, М., 1974).

Александр Леонидович Агеев

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук,
ул. С. Ковалевской, д. 16, г. Екатеринбург, 620990, Россия,
e-mail: ageev@imm.uran.ru

Татьяна Владимировна Антонова

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук,
ул. С. Ковалевской, д. 16, г. Екатеринбург, 620990, Россия,
e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

A.L. Ageev and T.V. Antonova

Investigation of methods of localization of q -jumps and discontinuities of first kind of noisy function

Abstract. We consider the problem of localizing (determination of position) of discontinuities of the first kind of a function of one variable and the problem of localizing q -jumps of a noisy function. In the first case it is assumed that the exact function is smooth except for a finite number of discontinuities of the first kind. In the second case, the exact function is smooth except for a finite number of small segments of length $2q$. It is required that the number of discontinuities (q -jumps) be determined and approximated their position from an approximately given function and the level of the perturbation in $L_2(\mathbb{R})$. We construct a class of regular averaging methods and obtain and estimates of the accuracy of localization, separability, and observability on classes of correctness.

Keywords: ill-posed problems, regularizing method, separation threshold, threshold of observability, discontinuity of the first kind, q -jump.

Aleksandr Leonidovich Ageev

*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16 S. Kovalevskaya str., Ekaterinburg, 620990 Russia,*

e-mail: ageev@imm.uran.ru

Tatiana Vladimirovna Antonova

*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
16 S. Kovalevskaya str., Ekaterinburg, 620990 Russia,*

e-mail: tvantonova@imm.uran.ru