Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Алехина, О. Ю. Барсукова, Синтез надежных схем в базисе, состоящем из функции Вебба, в P_k , *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 7, 15–28

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-7-15-28>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 12:53:38

М.А. АЛЕХИНА, О.Ю. БАРСУКОВА

СИНТЕЗ НАДЕЖНЫХ СХЕМ В БАЗИСЕ, СОСТОЯЩЕМ ИЗ ФУНКЦИИ ВЕББА, В P_K

Аннотация. Рассматривается реализация функций k -значной логики ($k \geq 3$) схемами из ненадежных функциональных элементов в полном базисе, состоящем из функции Вебба. Предполагается, что элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, а сами неисправности таковы, что каждое из неверных значений появляется на выходе базисного элемента с одной и той же вероятностью.

Ранее при $k \in \{3, 4, 5\}$ были разработаны методы синтеза надежных схем. В этой работе показано, что при $k \geq 6$ любую функцию k -значной логики можно реализовать надежной схемой, предложены два метода синтеза надежных схем и проведено сравнение полученных с помощью этих методов верхних оценок ненадежности построенных схем.

Полученные результаты справедливы в двойственном (относительно перестановки, порождаемой функцией Лукашевича) базисе при тех же неисправностях.

Ключевые слова: функция k -значной логики, ненадежный функциональный элемент, надежность и ненадежность схемы, синтез схем из ненадежных элементов, неисправность на выходах элементов.

УДК: 519.718

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-7-15-28

ВВЕДЕНИЕ

В этой работе впервые при $k \geq 6$ получены верхние оценки ненадежности схем, реализующих функции k -значной логики, в полном базисе B , состоящем из функции Вебба $V_k(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\} + 1 \pmod{k}$, а также в двойственном базисе B^* , состоящем из функции $\min\{x_1, x_2\} + k - 1 \pmod{k}$. Напомним, что ненадежности двойственных (относительно перестановки, порождаемой функцией $N(x) = k - 1 - x$, которую называют отрицанием Лукашевича) схем равны, следовательно, результат, доказанный для ненадежности схемы, реализующей функцию f , выполняется для ненадежности двойственной схемы, реализующей функцию f^* ([1]). Поэтому далее (до раздела 5) будем исследовать на надежность только схемы в базисе B .

Ранее были известны верхние [2] и нижние оценки [3] ненадежности схем в базисах B и B^* при $k = 3$, а также верхние оценки ненадежности схем при $k = 4$ и $k = 5$ ([4]). Поэтому можно считать, что теперь (с учетом результатов этой статьи) известны верхние оценки ненадежности схем в базисе, состоящем из функции Вебба, при произвольном

Поступила в редакцию 12.06.2018, после доработки 13.09.18. Принята к публикации 19.12.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00451а).

$k \geq 3$. При построении схем используются элементы одного типа. Это обстоятельство было решающим при исследованиях в булевых базисах, содержащих только стрелку Пирса $\bar{x}_1 \& \bar{x}_2$ или только штрих Шеффера $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$ ([5], [6]), как при константных неисправностях на выходах элементов, так и при произвольных неисправностях элементов.

При произвольном $k \geq 3$ задача синтеза надежных схем, точнее асимптотически оптимальных по надежности схем, решена только в базисе Россера–Туркетта и двойственном ему базисе при неисправностях двух видов: 1) “инверсных” неисправностях, которые характеризуются тем, что на каждом входном наборе любого из базисных элементов вероятность появления неверного значения на выходе элемента одинакова [7]; 2) при константных неисправностях типа 0 и типа $k - 1$ на выходах элементов [8]. В этих базисах при названных неисправностях для повышения надежности исходных схем использовалась одна и та же схема из трех элементов глубины 2, а в рассматриваемом базисе B (и B^*) найдены две схемы, которые можно использовать для повышения надежности исходных. Одна из них состоит из $2^k - 1$ элементов глубины k , а вторая – из не более $3k^3 + 4.5k^2$ элементов. Проведено сравнение этих методов и оказалось, что при $k \in [3, 18]$ лучший результат дает первый метод, а при $k \geq 19$ – второй метод.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, РАНЕЕ ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$, а P_k – множество всех функций k -значной логики, т. е. функций $f(x_1, \dots, x_n) : (E_k)^n \rightarrow E_k$. Рассмотрим реализацию функций из множества P_k схемами из ненадежных функциональных элементов [8] в базисе $B = \{V_k(x_1, x_2)\}$, где $V_k(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\} + 1 \pmod k$ – функция Вебба.

Считаем, что схема из ненадежных элементов реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$), если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a}^n = (a_1, \dots, a_n)$ при отсутствии неисправностей в схеме на ее выходе появляется значение $f(\tilde{a}^n)$.

Предполагается, что все базисные элементы ненадежны, переходят в неисправные состояния независимо друг от друга. Опишем неисправности элементов.

Пусть $\tilde{a}^2$ – произвольный входной набор базисного элемента, $V_k(\tilde{a}^2) = \tau$. Неисправность элемента такова, что любое неверное значение (т. е. значение не равное τ) он выдает с вероятностью $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2(k-1)})$. Другими словами, при любом $i \in \{1, 2, \dots, k - 1\}$ значение $\tau + i$ появится на выходе элемента с вероятностью ε . Тогда правильное значение τ элемент выдает с вероятностью $1 - (k - 1)\varepsilon$. Заметим, что в выражениях $\tau + 1, \tau + 2, \dots, \tau + k - 1$ сложение осуществляется по $\text{mod } k$.

Как и в [9], вводятся понятия “надежности” и “ненадежности” схемы.

Пусть схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, $\tilde{a}^n$ – произвольный входной набор схемы S , $f(\tilde{a}^n) = \tau$. Обозначим через $P_i(S, \tilde{a}^n)$ вероятность появления значения i ($i \in E_k$) на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$, а через $P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n)$ – вероятность появления ошибки на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}^n$. Ясно, что

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n) = P_{\tau+1}(S, \tilde{a}^n) + P_{\tau+2}(S, \tilde{a}^n) + \dots + P_{\tau+k-1}(S, \tilde{a}^n).$$

Например, если входной набор $\tilde{a}^n$ схемы S такой, что $f(\tilde{a}^n) = 0$, то вероятность ошибки на этом наборе равна

$$P_{f(\tilde{a}^n) \neq 0}(S, \tilde{a}^n) = P_1(S, \tilde{a}^n) + P_2(S, \tilde{a}^n) + \dots + P_{k-1}(S, \tilde{a}^n).$$

Ненадежностью схемы S будем называть число $P(S) = \max\{P_{f(\tilde{a}^n) \neq \tau}(S, \tilde{a}^n)\}$, где максимум берется по всем входным наборам $\tilde{a}^n$ схемы S . Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Замечание 1. Очевидно, что в P_k ненадежность $P(E)$ базисного элемента E равна $P(E) = (k-1)\varepsilon$, а надежность элемента E равна $1 - (k-1)\varepsilon$.

Обозначим [10] функцию

$$J_i(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x = i; \\ 0, & \text{если } x \neq i, \end{cases}$$

где $i \in E_k$. Известно [10], что в P_k

а) функцию $J_i(x)$ можно представить в виде

$$J_i(x) = 1 + \max_{\alpha \neq k-1-i} (x + \alpha); \quad (1)$$

б)

$$\min(x_1, x_2) = N(\max\{N(x_1), N(x_2)\}), \quad (2)$$

где $N(x) = k-1-x$ — отрицание Лукашевича;

с)

$$N(x) = \max\{f_{k-1,0}(x), f_{k-2,1}(x), \dots, f_{0,k-1}(x)\}, \quad (3)$$

где $f_{s,i}(x) = s+1 + \max(J_i(x), k-1-s)$ ($s \in E_k$).

Сложностью схемы S будем называть число элементов в ней и обозначать через $L(S)$.

2. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА НЕНАДЕЖНОСТИ СХЕМ В P_k

2.1. Первый метод повышения надежности схем.

Теорема 1 ([11]). Пусть f — произвольная функция из P_k , S — любая схема, реализующая f , $P(S)$ — ненадежность схемы S . Тогда можно построить схему $\psi(S)$, которая реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\psi(S)) \leq \varepsilon(2^k + k - 3) + (2^k - 1)(2^{k+1} - 2)((k-1)\varepsilon)^2 + (k-1)\varepsilon 2^{2k+2}P(S) + (2^{2^{k+1}} - 2^{k+1} - 1)P^2(S). \quad (4)$$

В теореме 1 установлено рекуррентное соотношение между ненадежностью схемы $\psi(S)$ и ненадежностью исходной схемы S . Чтобы получить верхнюю оценку ненадежности схем, докажем следующие утверждения.

Лемма 1. m -местный максимум ($m \geq 2$) можно реализовать схемой из $(m-1)k$ элементов.

Действительно,

$$\begin{aligned} V_k(x_1, x_2) &= \max(x_1, x_2) + 1, \\ V_k(\max(x_1, x_2) + 1, \max(x_1, x_2) + 1) &= \max(x_1, x_2) + 2, \\ V_k(\max(x_1, x_2) + 2, \max(x_1, x_2) + 2) &= \max(x_1, x_2) + 3, \dots, \\ V_k(\max(x_1, x_2) + k-1, \max(x_1, x_2) + k-1) &= \max(x_1, x_2) + k = \max(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Поэтому для реализации двухместного максимума $\max(x_1, x_2)$ достаточно k элементов. Обозначим через $S_\vee$ схему, реализующую $\max(x_1, x_2)$.

Очевидно, $\max(x_1, x_2, x_3) = \max(\max(x_1, x_2), x_3)$, поэтому для реализации трехместного максимума нужны две схемы $S_\vee$. Продолжая эти рассуждения, нетрудно видеть, что для реализации m -местного максимума достаточно $m-1$ схем $S_\vee$, т. е. для реализации m -местного максимума достаточно $(m-1)k$ элементов.

Лемма 2. Константы $0, 1, \dots, k-1$ можно реализовать схемой, сложность которой не более $k^2 + k - 2$.

Доказательство проводится в несколько шагов.

1) Реализация функций $x + \alpha$, $\alpha \in E_k$. Очевидно,

$$\begin{aligned} V_k(x, x) &= \max(x, x) + 1 = x + 1, \\ V_k(x + 1, x + 1) &= \max(x + 1, x + 1) + 1 = x + 2, \dots, \\ V_k(x + k - 2, x + k - 2) &= \max(x + k - 2, x + k - 2) + 1 = x + k - 1, \end{aligned}$$

поэтому схему, реализующую эту систему функций, можно построить, используя $k-1$ элемент.

2) Известно, что $\max(x, x+1, x+2, \dots, x+k-1) = k-1$. Следовательно, для реализации константы $k-1$ требуется один k -местный максимум, его сложность не более $k(k-1)$.

3) Чтобы реализовать остальные константы, используя равенства

$$V_k(k-1, k-1) = 0, \quad V_k(0, 0) = 1, \dots, \quad V_k(k-3, k-3) = k-2,$$

потребуется еще $k-1$ элемент.

Таким образом, для реализации констант достаточно $k-1+k(k-1)+k-1 = (k-1)(k+2) = k^2 + k - 2$ элементов. $\square$

Лемма 3. Функции $J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x)$ можно реализовать схемой T , содержащей не более $k(k-1)^2$ элементов, т. е. $L(T) \leq k(k-1)^2$.

Действительно, по формуле (1) реализуем каждую из функций $J_i(x)$ ($i \in E_k$), используя $(k-1)$ -местный максимум и один базисный элемент, т. е. $k(k-2) + 1 = (k-1)^2$ элементов. Для реализации всех функций $J_i(x)$ потребуется не более $k(k-1)^2$ элементов.

Лемма 4. Функцию $\min\{x_1, x_2\}$ можно реализовать такой схемой $S_{\&}$, что

$$L(S_{\&}) < 3k^3 + 4.5k^2 - 6.5k.$$

Доказательство. Для построения схемы $S_{\&}$, воспользуемся формулами (2), (3). По лемме 2 константы можно реализовать схемой, сложности не более $k^2 + k - 2$. По лемме 3 все функции $J_i(x)$ ($i \in E_k$) можно реализовать схемой, сложности не более $k(k-1)^2$.

1. Теперь реализуем все функции $f_{k-1,0}(x), f_{k-2,1}(x), \dots, f_{0,k-1}(x)$, используя схему, реализующую функции $J_i(x)$.

1) Поскольку $f_{k-1,0}(x) = J_0(x)$, дополнительных элементов для реализации $J_0(x)$ не требуется.

2) Поскольку $f_{k-2,1}(x) = k-1 + \max(J_1(x), 1)$, потребуется k элементов для реализации двухместного максимума и $k-1$ базисных элементов для сдвига, т. е. всего $2k-1$ элемент.

3) Поскольку $f_{k-3,2}(x) = k-2 + \max(J_2(x), 2)$, потребуется k элементов для реализации двухместного максимума и $k-2$ базисных элемента для сдвига, т. е. всего $2k-2$ элемента.

...

$k-2$) Поскольку $f_{1,k-2}(x) = 2 + \max(J_{k-2}(x), k-2)$, потребуется k элементов для реализации двухместного максимума и два базисных элемента для сдвига, т. е. всего $k+2$ элемента.

$k-1$) Поскольку $f_{0,k-1}(x) = 1 + \max(J_{k-1}(x), k-1) = k-1+1 \equiv 0 \pmod{k}$, а далее для реализации отрицания Лукашевича будем брать максимум из функций $f_{k-1,0}(x), f_{k-2,1}(x), \dots, f_{0,k-1}(x)$, при этом элементы на реализацию функции $f_{0,k-1}(x)$ не расходуют.

Следовательно, для реализации всех функций $f_{k-1,0}(x), f_{k-2,1}(x), \dots, f_{0,k-1}(x)$ потребуется $(k+2) + \dots + (2k-1) = 1,5k^2 - 2,5k - 1$ элементов.

2. Для реализации функции $N(x)$ (см. (3)) необходимы один $(k-1)$ -местный максимум, все функции $f_{k-1,0}(x), f_{k-2,1}(x), \dots, f_{0,k-1}(x)$, константы и все функции $J_i(x)$, т.е. всего $k(k-2) + 1,5k^2 - 2,5k - 1 + k^2 + k - 2 + k(k-1)^2 < k^3 + 1,5k^2 - 2,5k$ элементов.

3. Наконец, чтобы реализовать $\min(x_1, x_2)$ (см. (2)) потребуется три схемы, реализующие отрицание Лукашевича, и одна схема, реализующая двухместный максимум, т.е. всего менее $3(k^3 + 1,5k^2 - 2,5k) + k = 3k^3 + 4,5k^2 - 6,5k$ элементов. $\square$

Замечание 2. Справедливы следующие утверждения:

- 1) при $k \geq 6$ верно а) $2^k + k < 1,1 \cdot 2^k$, б) $k^2 < 2^k$, в) $3k + 2,5 < 3,5k$;
- 2) при $k \geq 3$ верно а) $k + 0,5 < 1,2k$, б) $3k + 2,5 < 4k$, в) $k + 1 < 1,4k$;
- 3) функция $g(x) = 2^{\alpha x - 2^{x+1} + \beta}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) убывает на $[a, +\infty)$ ($a \geq 3$), поэтому наибольшее значение на $[a, b]$ (или $[a, b)$) функция $g(x)$ принимает в точке $x = a$.

Теорема 2. Любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать схемой D' , ненадежность которой $P(D') < (2^k + k - 2)\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1 = 2^{-2^{k+1}-1}/(\max\{2^k + k - 2, 3,5k^5\})^2$.

Утверждение теоремы ранее было доказано при $k = 3$ ([2]), а также при $k = 4$ и при $k = 5$ ([4]). Поэтому далее будем считать, что $k \geq 6$. Нетрудно проверить, что $3,5k^5 \leq 2^k + k - 2$ при $k \geq 26$ и $2^k + k - 2 < 3,5k^5$ при $k \in [6, 25]$.

Доказательство проведем методом индукции по числу n — переменных функции $f(\tilde{x}^n)$, рассмотрев два случая $k \geq 26$ и $k \in [6, 25]$.

1. Пусть $k \geq 26$. Тогда $\varepsilon_1 = 2^{-2^{k+1}-1}/(2^k + k - 2)^2$.

1.1. Основание индукции $n = 1$, т.е. докажем утверждение теоремы для всех возможных функций $f(x)$, зависящих от одной переменной x . Представим функцию $f(x)$ в виде (аналог совершенной ДНФ) [10]

$$f(x) = J_0(x) \& f(0) \vee J_1(x) \& f(1) \vee \dots \vee J_{k-1}(x) \& f(k-1).$$

Промоделируем эту формулу схемой S' , используя схемы из лемм 2, 3, и найдем число элементов в ней. По лемме 2 для реализации всех констант достаточно $k^2 + k - 2$ элементов. По лемме 3 для реализации функций $J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x)$ достаточно $k(k-1)^2$ элементов. По лемме 4 для реализации k двухместных минимумов достаточно $k(3k^3 + 4,5k^2 - 6,5k)$ элементов. Наконец, для реализации одного $(k-1)$ -местного максимума достаточно $k(k-2)$ элементов. Поэтому схема S' содержит не более $k^2 + k - 2 + k(k-1)^2 + k(3k^3 + 4,5k^2 - 6,5k) + k(k-2) = 3k^4 + 5,5k^3 - 6,5k^2 - 2$ элементов, т.е. $L(S') < 3k^4 + 5,5k^3$.

Известно ([12], с. 47), что ненадежность любой схемы не больше суммы ненадежностей всех ее элементов (см. замечание 1), поэтому $P(S') \leq (3k^4 + 5,5k^3) \cdot (k-1)\varepsilon = k^3(3k^2 + 2,5k - 5,5)\varepsilon < k^4(3k + 2,5)\varepsilon < 3,5k^5\varepsilon < (2^k + k - 2)\varepsilon$ (поскольку $k \geq 6$, а также см. замечание 2, часть 1с)).

Следовательно, основание индукции верно. Сделаем индуктивный переход.

1.2. Допустим, что утверждение теоремы верно для функций $f(\tilde{x}^{n-1})$ ($n \geq 2$). Докажем теорему для функций $f(\tilde{x}^n)$, зависящих от n переменных. Разложим функцию $f(\tilde{x}^n)$ по переменной x_n :

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = J_0(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \vee J_1(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \dots \\ \vee J_{k-1}(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, k-1)$$

и реализуем схемой C .

$$2^{k/2} \cdot 2^{2k+2} \cdot 2 \cdot (2^k + k - 2) 2^{-1-2^{k+1}} / (2^k + k - 2)^2 = 2^{2.5k+2-2^{k+1}} / (2^k + k - 2) < 2^{2.5k+1-2^{k+1}} / 2^k = 2^{1.5k+2-2^{k+1}} < 2^{41-2^{27}} < 0.1 \text{ (замечание 2, 3))};$$

$$2^{2^{k+1}} 4\varepsilon(2^k + k - 2)^2 \leq 2^{2^{k+1}} \cdot 4(2^k + k - 2)^2 2^{-1-2^{k+1}} / (2^k + k - 2)^2 = 4 \cdot 2^{-1} = 2.$$

Поэтому $P(\psi(C)) < \varepsilon(2^k + k - 3 + 0.1 + 0.1 + 2) < \varepsilon(2^k + k)$.

Построим схему $\psi(\psi(C)) = \psi^2(C)$, заменив схему C схемой $\psi(C)$. Тогда по формуле (4) имеем

$$\begin{aligned} P(\psi^2(C)) &\leq (2^k + k - 3)\varepsilon + 2^{2^{k+1}} k^2 \varepsilon^2 + \varepsilon k 2^{2k+2} \cdot (2^k + k)\varepsilon + 2^{2^{k+1}} \varepsilon^2 (2^k + k)^2 = \\ &= \varepsilon(2^k + k - 3 + 2^{2^{k+1}} k^2 \varepsilon + k 2^{2k+2} (2^k + k)\varepsilon + 2^{2^{k+1}} (2^k + k)^2 \varepsilon). \end{aligned}$$

Оценим сверху три последних слагаемых в скобках, учитывая условие $\varepsilon \leq 2^{-2^{k+1}-1} / (2^k + k - 2)^2$:

$$2^{2^{k+1}} k^2 \varepsilon < 0.1 \text{ (см. предыдущий случай)};$$

$$k 2^{2k+2} (2^k + k)\varepsilon < 2^{k/2} 2^{2k+2} (2^k + k) 2^{-2^{k+1}-1} / (2^k + k - 2)^2 \text{ (замечание 2, 1b))},$$

$$2^{k/2} 2^{2k+2} (2^k + k) 2^{-2^{k+1}-1} / (2^k + k - 2)^2 = 2^{2.5k+1-2^{k+1}} (2^k + k) / (2^k + k - 2)^2 < 2^{2.5k+1-2^{k+1}} (2^k + k) / (2^k)^2 < 2^{0.5k+1-2^{k+1}} \cdot 1.1 \cdot 2^k = 1.1 \cdot 2^{1.5k+1-2^{k+1}} \text{ (замечание 2, 1a))},$$

$$1.1 \cdot 2^{1.5k+1-2^{k+1}} < 1.1 \cdot 2^{40-2^{27}} < 0.1;$$

$$2^{2^{k+1}} (2^k + k)^2 \varepsilon < 2^{2^{k+1}} \cdot (1.1 \cdot 2^k)^2 \varepsilon \text{ (замечание 2, 1a))}, 2^{2^{k+1}} \cdot (1.1 \cdot 2^k)^2 \varepsilon < 2^{2^{k+1}} \cdot (1.1 \cdot 2^k)^2 \times 2^{-2^{k+1}-1} / (2^k + k - 2)^2 < 1.1^2 \cdot 2^{-1+2k} / (2^k)^2 = 1.21/2 < 0.7.$$

Поэтому $P(\psi^2(C)) < \varepsilon(2^k + k - 3 + 0.1 + 0.1 + 0.7) < \varepsilon(2^k + k - 2)$.

Следовательно, $P(\psi^2(C))$ — искомая схема D' , теорема доказана при $k \geq 26$.

2. Пусть $k \in [6, 25]$. Тогда $\varepsilon_1 = 2^{-2^{k+1}-1} / (3.5k^5)^2$.

2.1. Основание индукции $n = 1$ проверяется также, как в случае 1.1. Строится схема S' , которая содержит менее $3k^4 + 5.5k^3$ элементов, а ее ненадежность $P(S') < 3.5k^5 \varepsilon$ (поскольку $k \geq 6$).

По схеме S' построим схему $\psi(S')$ (теорема 1). Оценим ненадежность $P(\psi(S'))$ схемы $\psi(S')$ по формуле (4):

$$\begin{aligned} P(\psi(S')) &\leq (2^k + k - 3)\varepsilon + 2^{2^{k+1}} k^2 \varepsilon^2 + 3.5\varepsilon^2 k^6 \cdot 2^{2k+2} + \\ &+ 2^{2^{k+1}} (3.5k^5 \varepsilon)^2 = \varepsilon(2^k + k - 3 + 2^{2^{k+1}} k^2 \varepsilon + 3.5\varepsilon k^6 \cdot 2^{2k+2} + 2^{2^{k+1}} \cdot 12.25k^{10} \varepsilon). \end{aligned}$$

Оценим сверху три последних слагаемых в скобках, учитывая $\varepsilon \leq 2^{-2^{k+1}-1} / (3.5k^5)^2$:

$$2^{2^{k+1}} k^2 \varepsilon \leq 2^{2^{k+1}} k^2 2^{-2^{k+1}-1} / (3.5k^5)^2 = 2^{2k-2^{k+1}} / (12.25k^8) \leq 2^{-116} / (12.25 \cdot 6^8) < 0.1,$$

$$3.5\varepsilon k^6 \cdot 2^{2k+2} \leq 3.5k^6 \cdot 2^{2k+2} 2^{-2^{k+1}-1} / (3.5k^5)^2 = 2^{2k+1-2^{k+1}} / (3.5k^4) \leq 2^{-115} / (3.5 \cdot 6^4) < 0.1,$$

$$2^{2^{k+1}} \cdot 12.25k^{10} \varepsilon \leq 2^{2^{k+1}} \cdot 12.25k^{10} 2^{-2^{k+1}-1} / (3.5k^5)^2 = 1/2.$$

Поэтому $P(\psi(S')) \leq \varepsilon(2^k + k - 3 + 0.1 + 0.1 + 0.5) < \varepsilon(2^k + k - 2)$.

В этом случае основание индукции также верно. Сделаем индуктивный переход.

2.2. Допустим, что утверждение теоремы верно для функций $f(\tilde{x}^{n-1})$ ($n \geq 2$). Докажем теорему для функций $f(\tilde{x}^n)$, зависящих от n переменных. Как и в разделе 1.2 разложим функцию $f(\tilde{x}^n)$ по переменной x_n , реализуем схемой C (рис. 1), выделим подсхему A , выход которой является выходом схемы C , а на входы подаются $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}, x_n$. Схема A , как и в п. 1 этого доказательства, содержит менее $3k^4 + 5.5k^3$ элементов, поэтому (см. замечание 1) при $k \geq 6$ ее ненадежность $P(A) < 3.5k^5 \varepsilon$, а

$$P(C) < P(A) + (2^k + k - 2)\varepsilon < (3.5k^5 + 2^k + k - 2)\varepsilon < 7k^5 \varepsilon.$$

По схеме C построим схему $\psi(C)$ (теорема 1). Оценим ненадежность $P(\psi(C))$ схемы $\psi(C)$ по формуле (4):

$$\begin{aligned} P(\psi(C)) &\leq (2^k + k - 3)\varepsilon + 2^{2k+1}k^2\varepsilon^2 + 7k^6\varepsilon^2 2^{2k+2} + 2^{2k+1}(7k^5\varepsilon)^2 = \\ &= \varepsilon(2^k + k - 3 + 2^{2k+1}k^2\varepsilon + 7k^6\varepsilon 2^{2k+2} + 2^{2k+1}(7k^5)^2\varepsilon). \end{aligned}$$

Оценим сверху три последних слагаемых в скобках, учитывая $\varepsilon \leq 2^{-2^{k+1}-1}/(3.5k^5)^2$:

$2^{2k+1}k^2\varepsilon < 0.1$ (было проверено в разделе 2.1);

$7k^6\varepsilon 2^{2k+2} \leq 7k^6 2^{2k+2} 2^{-2^{k+1}-1}/(3.5k^5)^2 = 2^{2k-2^{k+1}+1} \cdot 3.5/k^4 < 3.5 \cdot 2^{-115}/6^4 < 0.1$;

$2^{2k+1}(7k^5)^2\varepsilon \leq 2^{2k+1}(7k^5)^2 2^{-2^{k+1}-1}/(3.5k^5)^2 = 2$.

Поэтому $P(\psi(C)) \leq \varepsilon(2^k + k - 3 + 0.1 + 0.1 + 2) \leq \varepsilon(2^k + k)$.

Построим схему $\psi(\psi(C)) = \psi^2(C)$, заменив C схемой $\psi(C)$. Тогда по формуле (4) имеем

$$\begin{aligned} P(\psi^2(C)) &\leq (2^k + k - 3)\varepsilon + 2^{2k+1}k^2\varepsilon^2 + \varepsilon k 2^{2k+2}(2^k + k)\varepsilon + 2^{2k+1}\varepsilon^2(2^k + k)^2 = \\ &= \varepsilon(2^k + k - 3 + 2^{2k+1}k^2\varepsilon + k 2^{2k+2}(2^k + k)\varepsilon + 2^{2k+1}(2^k + k)^2\varepsilon). \end{aligned}$$

Оценим сверху три последних слагаемых в скобках, учитывая $\varepsilon \leq 2^{-2^{k+1}-1}/(3.5k^5)^2$:

$2^{2k+1}k^2\varepsilon < 0.1$ (было проверено в разделе 2.1);

$k 2^{2k+2}(2^k + k)\varepsilon \leq k 2^{2k+2}(2^k + k) 2^{-2^{k+1}-1}/(3.5k^5)^2 < 2^{2k-2^{k+1}+2} \cdot 1.1 \cdot 2^k/(12.25k^9)$ (замечание 2, 1а));

$2^{2k+1}(2^k + k)^2\varepsilon \leq 2^{2k+1}(2^k + k)^2 2^{-2^{k+1}-1}/(3.5k^5)^2 = 2^{-1}(2^k + k)^2/(3.5k^5)^2 < 2^{-1}(1.1 \times 2^k)^2/(2^k + k - 2)^2 < 2^{-1}(1.1 \cdot 2^k)^2/(2^k)^2 = 1.21/2 < 0.7$ (замечание 2, 1а)).

Поэтому $P(\psi^2(C)) \leq \varepsilon(2^k + k - 3 + 0.1 + 0.1 + 0.7) < \varepsilon(2^k + k - 2)$.

Следовательно, $P(\psi^2(C))$ — искомая схема D' . $\square$

Теорема 3. Любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать такой схемой D , что

$P(D) < (2^k + k - 3)\varepsilon + c_1(k)\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1 = 2^{-2^{k+1}-1}/(\max\{2^k + k - 2, 3.5k^5\})^2$, $c_1(k) = 2^{3k+1} + 1.1 \cdot 2^{3.5k+2} + 1.21 \cdot 2^{2^{k+1}+2k}$.

Доказательство. По теореме 2 любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать схемой D' с ненадежностью $P(D') < (2^k + k - 2)\varepsilon$. По схеме D' построим схему $\psi(D')$ и оценим ее ненадежность $P(\psi(D'))$ по формуле (4):

$$\begin{aligned} P(\psi(D')) &< (2^k + k - 3)\varepsilon + 2^{2k+1}k^2\varepsilon^2 + \varepsilon^2 k 2^{2k+2}(2^k + k - 2) + 2^{2k+1}\varepsilon^2(2^k + k - 2)^2 < \\ &< (2^k + k - 3)\varepsilon + (2^{2k+1}2^k + 2^{k/2}2^{2k+2} \cdot 1.1 \cdot 2^k + 2^{2k+1}(1.1 \cdot 2^k)^2)\varepsilon^2 = (2^k + k - 3)\varepsilon + \\ &+ (2^{3k+1} + 1.1 \cdot 2^{3.5k+2} + 1.21 \cdot 2^{2^{k+1}+2k})\varepsilon^2 \text{ (замечание 2, 1а), 1б)).} \end{aligned}$$

Схема $\psi(D')$ — искомая схема D . $\square$

Из теоремы 3 следует, что любую функцию из P_k можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше $\varepsilon(2^k + k - 3)$.

2.1. Второй метод повышения надежности схем. Этот метод отличается от приведенного выше схемой, которую используем для повышения надежности. Ранее эта схема применялась в базисе Россера–Туркетта, но не в рассматриваемом базисе. Поэтому считаем, что в этом подразделе $k \geq 3$.

Обозначим через S любую схему, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ из P_k ($k \geq 3$). Построим схему $\chi(S)$ (рис. 2), которая реализует ту же функцию f , но, возможно (при некоторых условиях на $P(S)$), более надежно.

 Рис. 2. Схема $\chi(S)$

В теореме 4 найдено рекуррентное соотношение для ненадежностей схем S и $\chi(S)$.

Теорема 4. Пусть f — произвольная функция из P_k ($k \geq 3$), S — любая схема, реализующая f , а $P(S)$ — ненадежность схемы S . Тогда схема $\chi(S)$ (рис. 2) реализует функцию f с ненадежностью

$$P(\chi(S)) < 3.6k^4\varepsilon + 14.4k^4\varepsilon P(S) + 6P^2(S). \quad (5)$$

Доказательство. В схеме $\chi(S)$ выделим подсхему D (рис. 2), выход которой является выходом схемы $\chi(S)$. Нетрудно проверить, что $P(\chi(S)) \leq P(D) + 4P(D)P(S) + 6P^2(S)$. Чтобы найти ненадежность схемы D , оценим ее сложность. Поскольку D содержит две схемы S_v и одну схему $S_{\&}$, по леммам 1, 4 потребуется менее $2k + 3k^3 + 4.5k^2 - 6.5k$ элементов. Следовательно, $L(D) < 3k^3 + 4.5k^2 - 4.5k$.

Принимая во внимание ([12], с. 47), что ненадежность любой схемы не больше суммы ненадежностей всех ее элементов (замечание 1, замечание 2, 2а)), получим

$$P(D) \leq (3k^3 + 4.5k^2 - 4.5k)(k-1)\varepsilon = (3k^4 + 1.5k^3 - 9k^2 + 4.5)\varepsilon < 3k^3(k+0.5)\varepsilon < 3.6k^4\varepsilon.$$

Подставим полученную оценку в выражение для $P(\chi(S))$ и получим

$$P(\chi(S)) < (3.6k^4\varepsilon) + 4(3.6k^4\varepsilon)P(S) + 6P^2(S) = 3.6k^4\varepsilon + 14.4k^4\varepsilon P(S) + 6P^2(S). \quad \square$$

Теорема 5. Любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать такой схемой $\hat{D}$, что $P(\hat{D}) < 4k^4\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$, где $\varepsilon_2 = 1/(150k^6)$.

Доказательство проведем методом индукции по числу n — переменных функции $f(\tilde{x}^n)$.

1. Основание индукции $n = 1$, т. е. докажем утверждение теоремы для всех возможных функций $f(x)$, зависящих от одной переменной x . Представим функцию $f(x)$ в виде (аналог совершенной ДНФ) [10]:

$$f(x) = J_0(x) \& f(0) \vee J_1(x) \& f(1) \vee \dots \vee J_{k-1}(x) \& f(k-1).$$

Промоделируем эту формулу схемой S также, как в п. 1.1. теоремы 2. Схема S содержит менее $3k^4 + 5.5k^3$ элементов, т. е. $L(S) < 3k^4 + 5.5k^3$.

Известно ([12], с. 47), что ненадежность любой схемы не больше суммы ненадежностей всех ее элементов (замечание 1), поэтому

$$P(S) < (3k^4 + 5.5k^3) \cdot (k-1)\varepsilon = k^3(3k^2 + 2.5k - 5.5)\varepsilon < k^4(3k + 2.5)\varepsilon < 4k^5\varepsilon.$$

Последнее неравенство получается в силу замечания 2, 2б).

По схеме S построим схему $\chi(S)$ (рис. 2). Оценим ненадежность $P(\chi(S))$ схемы $\chi(S)$ по формуле (5), учитывая условия $\varepsilon \leq 1/(150k^6)$ и $k \geq 3$:

$$\begin{aligned} P(\chi(S)) &< 3.6k^4\varepsilon + 14.4k^4 \cdot 4k^5\varepsilon^2 + 6(4k^5\varepsilon)^2 = 3.6k^4\varepsilon + 57.6k^9\varepsilon^2 + 96k^{10}\varepsilon^2 \leq \\ &\leq 3.6k^4\varepsilon + \varepsilon(57.6k^9/(150k^6) + 96k^{10}/(150k^6)) \leq 3.6k^4\varepsilon + (57.6k^4/(150k) + 96k^4/150)\varepsilon \leq \\ &\leq 3.6k^4\varepsilon + (57.6k^4/(150 \cdot 3) + 0.64k^4)\varepsilon \leq 3.6k^4\varepsilon + (0.128k^4 + 0.64k^4)\varepsilon \leq 4.4k^4\varepsilon. \end{aligned}$$

Построим схему $\chi(\chi(S)) = \chi^2(S)$, заменив S на $\chi(S)$ (рис. 2). Тогда по формуле (5), учитывая условия $\varepsilon \leq 1/(150k^6)$ и $k \geq 3$, получим

$$\begin{aligned} P(\chi^2(S)) &< 3.6k^4\varepsilon + 14.4k^4 \cdot 4.4k^4\varepsilon^2 + 6(4.4k^4\varepsilon)^2 \leq 3.6k^4\varepsilon + 63.36k^8\varepsilon^2 + 116.16k^8\varepsilon^2 \leq \\ &\leq 3.6k^4\varepsilon + \varepsilon \cdot 179.52k^8/(150k^6) = 3.6k^4\varepsilon + \varepsilon \cdot 179.52k^4/(150k^2) \leq \\ &\leq 3.6k^4\varepsilon + \varepsilon \cdot 179.52k^4/(150 \cdot 9) \leq 3.6k^4\varepsilon + 0.133\varepsilon k^4 < 4k^4\varepsilon. \end{aligned}$$

Основание индукции верно. Сделаем индуктивный переход.

1.2. Допустим, что утверждение теоремы верно для функций $f(\tilde{x}^{n-1})$ ($n \geq 2$). Докажем теорему для функций $f(\tilde{x}^n)$, зависящих от n переменных. Разложим функцию $f(\tilde{x}^n)$ по переменной x_n :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= J_0(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \vee J_1(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \dots \\ &\dots \vee J_{k-1}(x_n) \& f(x_1, \dots, x_{n-1}, k-1) \end{aligned}$$

и реализуем схемой C (рис. 1). Аналогичная схема была построена и подробно описана при доказательстве п. 1.2 теоремы 2.

В схеме C выделим подсхему A (рис. 1), выход которой является выходом схемы C , а на входы подаются $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}, x_n$. Схема A содержит менее $3k^4 + 5.5k^3$ элементов, поэтому (замечание 1) имеем

$$P(A) < (k-1)\varepsilon \cdot k^3(3k+5.5) \leq 4k^5\varepsilon$$

(см. п. 1 этого доказательства).

Если схема A исправна, то для реализации функции f она использует значение одной из схем $S_0, S_1, \dots, S_{k-1}$, реализующих соответственно функции $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$. Поэтому

$$P(C) \leq P(A) + 4k^4\varepsilon \leq 4k^5\varepsilon + 4k^4\varepsilon = 4k^4(k+1)\varepsilon < 4k^4 \cdot 1.4k\varepsilon = 5.6k^5\varepsilon$$

(замечание 2, 2с)).

По схеме C построим схему $\chi(C)$ (рис. 2). Оценим ненадежность $P(\chi(C))$ схемы $\chi(C)$ по формуле (5), учитывая условия $\varepsilon \leq 1/(150k^6)$ и $k \geq 3$:

$$\begin{aligned} P(\chi(C)) &< 3.6k^4\varepsilon + 14.4k^4 \cdot 5.6k^5\varepsilon^2 + 6(5.6k^5\varepsilon)^2 \leq 3.6k^4\varepsilon + (80.64k^9/(150k^6) + \\ &+ 188.16k^{10}/(150k^6))\varepsilon \leq 3.6k^4\varepsilon + (80.64k^4/(150k) + 188.16k^4/150)\varepsilon \leq 3.6k^4\varepsilon + \\ &+ (80.64k^4/(150 \cdot 3) + 1.26k^4)\varepsilon \leq 3.6k^4\varepsilon + (0.18k^4 + 1.26k^4)\varepsilon \leq 5.04k^4\varepsilon. \end{aligned}$$

Построим схему $\chi(\chi(C)) = \chi^2(C)$, заменив C на $\chi(C)$. Тогда по формуле (5), учитывая условия $\varepsilon \leq 1/(150k^6)$ и $k \geq 3$, получим

$$\begin{aligned} P(\chi^2(C)) &< 3.6k^4\varepsilon + 14.4k^4 \cdot 5.04k^4\varepsilon^2 + 6(5.04k^4\varepsilon)^2 \leq 3.6k^4\varepsilon + 72.58k^8\varepsilon^2 + 152.41k^8\varepsilon^2 \leq \\ &\leq 3.6k^4\varepsilon + 225k^4/(150k^2)\varepsilon \leq 3.6k^4\varepsilon + 225k^4/(150 \cdot 9)\varepsilon \leq 3.6k^4\varepsilon + 0.17k^4\varepsilon < 4k^4\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $P(\chi^2(C))$ — искомая схема $\hat{D}$. □

Теорема 6. Любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать такой схемой $\check{D}$, что $P(\check{D}) < 3.6k^4\varepsilon + c_2(k) \cdot \varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$, где $\varepsilon_2 = 1/(150k^6)$, $c_2(k) = 153.6k^8$.

Доказательство. По теореме 5 любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать схемой $\hat{D}$ с ненадежностью $P(\hat{D}) < 4k^4\varepsilon$. По схеме $\hat{D}$ построим схему $\chi(\hat{D})$ и оценим ее ненадежность $P(\chi(\hat{D}))$ по формуле (5):

$$P(\chi(\hat{D})) < 3.6k^4\varepsilon + 14.4k^4 \cdot 4k^4\varepsilon^2 + 6(4k^4\varepsilon)^2 = 3.6k^4\varepsilon + 57.6k^8\varepsilon^2 + 96k^8\varepsilon^2 = 3.6k^4\varepsilon + 153.6k^8\varepsilon^2.$$

Схема $\psi(\hat{D})$ — искомая схема $\check{D}$. □

Из теоремы 6 следует, что любую функцию из P_k можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше $3.6k^4\varepsilon$.

3. СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Первый метод дает верхнюю асимптотическую (при $\varepsilon \rightarrow 0$) оценку ненадежности схем $(2^k + k - 3)\varepsilon$ в P_k . Этот метод применялся ранее при $k \in \{3, 4, 5\}$ и с его помощью доказаны следующие результаты.

1) В P_3 [2] любую функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше 8ε . Если в выражение $2^k + k - 3$ подставить $k = 3$, получим 8.

2) В P_4 [4] любую функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше 17ε . Если в выражение $2^k + k - 3$ подставить $k = 4$, получим 17.

3) В P_5 [4] любую функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше 34ε . Если в выражение $2^k + k - 3$ подставить $k = 5$, получим 34.

Второй метод дает верхнюю асимптотическую (при $\varepsilon \rightarrow 0$) оценку ненадежности схем $3.6k^4\varepsilon$ в P_k . Приведем для сравнения аналогичные верхние асимптотические оценки ненадежности схем, которые получаются при использовании второго метода.

1) В P_3 любую функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше 291.6ε .

2) В P_4 любую функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше 921.6ε .

3) В P_5 любую функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше 2250ε .

Очевидно, что применение первого метода дает лучшие результаты при $k \in \{3, 4, 5\}$. Но возникает вопрос “при каких k верно неравенство $2^k + k - 3 \leq 3.6k^4$?”. Нетрудно проверить, что при $k \in [3, 18]$ верно неравенство $2^k + k - 3 \leq 3.6k^4$, т. е. $\min\{2^k + k - 3; 3.6k^4\} = 2^k + k - 3$; при $k \geq 19$ верно неравенство $2^k + k - 3 \geq 3.6k^4$, т. е. $\min\{2^k + k - 3; 3.6k^4\} = 3.6k^4$.

Таким образом, если $k \in [3, 18]$, то первый метод дает лучший результат, а если $k \geq 19$ — то второй.

Теорема 7. Любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать такой схемой S , что $P(S) \leq \min\{2^k + k - 3; 3.6k^4\}\varepsilon + c(k)\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$, где $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1; \varepsilon_2\}$, $c(k) = \max\{c_1(k); c_2(k)\}$.

Таким образом, любую функцию из P_k можно реализовать схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше $\min\{2^k + k - 3; 3.6k^4\}\varepsilon$.

4. ДВОЙСТВЕННОСТЬ ФУНКЦИЙ, СХЕМ И БАЗИСОВ

Определения двойственной функции, двойственной схемы, двойственного базиса можно найти в [1]. Здесь приведем их для удобства читателей.

Функцию $f^*(x_1, \dots, x_n) = N(f(Nx_1, \dots, Nx_n))$ (здесь функция $Nx = k - 1 - x$ — отрицание Лукашевича) назовем функцией, *двойственной* функции $f(x_1, \dots, x_n)$ относительно перестановки на множестве E_k , которую задает функция Nx .

Замечание 3. В P_k понятие двойственной функции вводится относительно перестановки на множестве E_k (например, [13], с. 41). А поскольку в этой статье рассматриваем только перестановку, которую задает функция Nx , далее будем говорить о двойственности не упоминая эту перестановку.

Обозначим $N(\tilde{x}^n) = (Nx_1, \dots, Nx_n)$.

Ненадежный функциональный элемент E^* с приписанной ему функцией $e^*(x_1, \dots, x_m)$ ($m \geq 1$) назовем *двойственным* элементу E с функцией $e(x_1, \dots, x_m)$, если функция $e^*(x_1, \dots, x_m)$ двойственна функции $e(x_1, \dots, x_m)$ и для любого $i \in E_k$ и любого входного набора $\tilde{a}^m$ элемента E верно равенство

$$P_i(E, \tilde{a}^m) = P_{Ni}(E^*, N(\tilde{a}^m)).$$

Например, нетрудно проверить, что при рассматриваемых нами неисправностях 1) элемент $E_{\&}$ является двойственным элементу $E_{\vee}$ при тех же самых неисправностях; 2) базисный элемент с функцией Вебба является двойственным элементу с функцией $\min\{x_1, x_2\} + k - 1$ при тех же самых неисправностях.

Схему S^* назовем *двойственной* схеме S , если она получается из схемы S заменой всех элементов на двойственные им элементы соответственно. Нетрудно проверить, что если схема S реализует функцию $f(x_1, \dots, x_n)$, то схема S^* реализует двойственную ей функцию $f^*(x_1, \dots, x_n) = N(f(Nx_1, \dots, Nx_n))$.

Справедливы теорема 8 и следствие ([1]).

Теорема 8 ([1]). Пусть S — любая схема с n входами и одним выходом, $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция, которую реализует схема S . Тогда для любого $i \in E_k$ и любого входного набора $\tilde{a}^n$ схемы S верно равенство

$$P_i(S, \tilde{a}^n) = P_{Ni}(S^*, N(\tilde{a}^n)),$$

где S^* — схема, двойственная схеме S , $f^*(x_1, \dots, x_n)$ — функция, двойственная функции $f(x_1, \dots, x_n)$, которую реализует схема S^* , $N(\tilde{a}^n) = (Na_1, \dots, Na_n)$.

Следствие ([1]). Ненадежности двойственных схем S и S^* равны: $P(S) = P(S^*)$.

Из теоремы 8 и следствия получаем

Утверждение. Результат о ненадежности схемы S , реализующей функцию f из P_k , в базисе B при рассматриваемых неисправностях на выходах элементов имеет место для ненадежности двойственной схемы S^* , реализующей функцию f^* , в базисе B^* при тех же неисправностях на выходах элементов.

Следовательно, в базисе B^* любую функцию из P_k можно реализовать схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше $\min\{2^k + k - 3; 3.6k^4\}\varepsilon$.

5. Выводы

В полном базисе, состоящем из функции Вебба $V_k(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\} + 1 \pmod k$, а также в двойственном ему базисе доказано, что любую функцию при рассматриваемых

неисправностях базисных элементов можно реализовать надежной схемой, доказаны верхние оценки ненадежности схем, причем в зависимости от k эти оценки могут быть полиномиальными или экспоненциальными. Заметим также, что вероятность появления неисправности на выходе базисных элементов зависит от k и не зависит от числа n переменных функции $f(\tilde{x}^n)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алехина М.А. *Надежность двойственных схем в P_k* , Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-матем. науки, № 1, 3–13 (2017).
- [2] Алехина М.А., Барсукова О.Ю. *Верхняя оценка ненадежности схем в базисе, состоящем из функции Вебба*, Изв. вузов. Матем., № 3, 15–27 (2015).
- [3] Алехина М.А., Барсукова О.Ю. *Нижняя оценка ненадежности схем в базисе, состоящем из функции Вебба*, Прикл. дискр. матем. Приложение, № 8, 102–103 (2015).
- [4] Barsukova O.Yu., Alekhina M.A. *Synthesis of reliable circuits in the basis consisting of the Webb function in P_4 and P_5* , Lobachevskii J. Math. **40** (1), 140–148 (2019).
- [5] Алехина М.А. *О синтезе надежных схем из функциональных элементов x/y при одноконтинентных константных неисправностях на выходах элементов*, Вестн. Московск. ун-та. Матем. Механ., № 5, 80–83 (1991).
- [6] Алехина М.А., Курышева В.В. *О надежности схем в базисе “антиконъюнкция” при константных неисправностях на входах элементов*, Изв. вузов. Матем., № 7, 3–9 (2016).
- [7] Alekhina M.A., Barsukova O.Yu., Moiseev A.V. *Asymptotically optimal reliable circuits in Rosser–Turkett basis (in P_k)*, Lobachevskii J. Math. **38** (1), 62–72 (2017).
- [8] Алехина М.А., Барсукова О.Ю. *Асимптотически оптимальные по надежности схемы в двух базисах при неисправностях типа $0(k-1)$ на выходах элементов*, Изв. вузов. Матем., № 5, 3–12 (2018).
- [9] Алехина М.А. *Синтез схем из ненадежных элементов в P_k* , Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-матем. науки, № 3, 3–10 (2015).
- [10] Yablonskii S.V. *Introduction into discrete mathematics* (Nauka, Moscow, 2001).
- [11] Алехина М.А. *О схеме, повышающей надежность в базисе, состоящем из функции Вебба, в P_k* , Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-матем. науки, № 4, 26–31 (2017).
- [12] Редькин Н.П. *Надежность и диагностика схем* (Изд-во МГУ, М., 1992).
- [13] Марченков С.С. *Функциональные системы* (МАКС Пресс, М., 2012).

Марина Анатольевна Алехина

Пензенский государственный технологический университет,
проезд Байдукова / ул. Гагарина, д. 1а/11, г. Пенза, 440039, Россия,

e-mail: alekhina.marina19@yandex.ru, alekhina@penzgtu.ru

Оксана Юрьевна Барсукова

Пензенский государственный университет,
ул. Красная, д. 40, г. Пенза, 440026, Россия,

e-mail: kuzya_7@mail.ru

M.A. Alekhina and O.Yu. Barsukova

Synthesis of reliable circuits in the basis consisting of the Webb function in P_k

Abstract. We consider the realization of k -meaning logics ($k > 3$) functions by the circuits from unreliable gates in the complete basis, consisting of the Webb function. We assume that the basic gates pass into faulty states independently of each other and the faults are such that each of the incorrect values appears at the output of the basis gate with the same probability.

Previously we developed methods for the synthesis of reliable circuits for $k \in \{3, 4, 5\}$. In this article we show that for $k \geq 6$ any k -meaning logic functions can be realized by an reliable circuit, we offer two methods of the synthesis of reliable circuits and we make a comparison of the upper bounds for unreliability of constructed circuits, which are obtained with the help of these methods.

The obtained results are valid in the dual (with respect to the permutation generated by the Lukashevich function) basis for the same faults.

Keywords: k -meaning logics functions, unreliable functional gates, reliability and unreliability of circuit, synthesis of circuits from unreliable gates, faults at outputs of gates.

Marina Anatol'evna Alekhina

*Penza State Technological University,
1a/11 Baidukova pr./ Gagarina str., Penza, 440039 Russia,*

e-mail: alekhina.marina19@yandex.ru, alekhina@penzgtu.ru

Oksana Yur'evna Barsukova

*Penza State University,
40 Krasnaya str., Penza, 440026 Russia,*

e-mail: kuzya_7@mail.ru