Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Глушак, Нелокальная задача для абстрактного уравнения Бесселя–Струве,
Изв. вузов. Матем., 2019, номер 7, 29–38

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-7-29-38>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:57:46

А.В. ГЛУШАК

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ–СТРУВЕ

Аннотация. Найдены достаточные условия однозначной разрешимости нелокальной задачи для абстрактного дифференциального уравнения Бесселя–Струве. Оба нелокальные условия записаны с помощью операторов Эрдейи–Кобера.

Ключевые слова: уравнение Бесселя–Струве, оператор Эрдейи–Кобера, нелокальное условие, однозначная разрешимость.

УДК: 517.983

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-7-29-38

Пусть $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ — замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в нем областью определения $D(A)$. На интервале $(0, 1]$ при $k > 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение Бесселя–Струве

$$u''(t) + \frac{k}{t} (u'(t) - u'(0)) = Au(t). \quad (1)$$

Как следует из результатов работы [1], корректная постановка начальных условий для уравнения Бесселя–Струве (1) состоит в задании в точке $t = 0$ начальных условий

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u_0, u_1 \in D(A). \quad (2)$$

В работе [1] приводятся также и условия на оператор A , обеспечивающие корректную разрешимость задачи Коши (1), (2). Следуя [1], в дальнейшем будем предполагать выполненным

Условие 1. Пусть $k = 2\alpha > 0$ и оператор A является генератором α раз проинтегрированной косинус оператор-функции (ПКОФ) $C_\alpha(t)$ (например, [1]–[4]). При этом $C_0(t) = C(t)$ — косинус оператор-функции (КОФ).

Как установлено в [1], условие 1 обеспечивает однозначную разрешимость задачи Коши (1), (2) и при этом ее решение имеет вид

$$u(t) = Y_k(t)u_0 + L_k(t)u_1, \quad u_0, u_1 \in D(A), \quad (3)$$

где операторная функция Бесселя (ОФБ) $Y_k(t)$ и операторная функция Струве (ОФС) $L_k(t)$ определены равенствами

$$Y_k(t) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi} t^\alpha} \left(C_\alpha(t) - \int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau) C_\alpha(t\tau) d\tau \right), \quad (4)$$

Поступила в редакцию 08.06.2018, после доработки 08.06.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00732-а.

$$L_k(t) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)}{t^{\alpha-1}} \int_0^1 P_{\alpha-1}(\tau) C_\alpha(t\tau) d\tau, \quad (5)$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, $P_{\alpha-1}(\cdot)$ — сферическая функция Лежандра ([5], с. 205).

Для $Y_k(t)$ и $L_k(t)$ справедливы формулы сдвига по параметру. Если $m > k \geq 0$, то соответствующие ОФБ $Y_m(t)$ и ОФС $L_m(t)$ имеют вид

$$Y_m(t) = \frac{2}{B(k/2 + 1/2, m/2 - k/2)} \int_0^1 s^k (1 - s^2)^{(m-k)/2-1} Y_k(ts) ds, \quad (6)$$

$$L_m(t) = \frac{2}{B(k/2 + 1, m/2 - k/2)} \int_0^1 s^k (1 - s^2)^{(m-k)/2-1} L_k(ts) ds, \quad (7)$$

где $B(\cdot, \cdot)$ — бета-функция Эйлера.

Имеют место также формулы дифференцирования. Если $u_0 \in D(A)$, то

$$Y'_k(t)u_0 = \frac{t}{k+1} Y_{k+2}(t)Au_0, \quad (8)$$

$$L'_k(t)u_0 = \frac{t}{k+2} L_{k+2}(t)Au_0 + u_0, \quad (9)$$

при этом принято обозначение $Y'_k(t)u_0 = (Y_k(t)u_0)'$.

В данной работе будем искать решение $u(t) \in C^2([0, 1], E) \cap C((0, 1], D(A))$ уравнения (1), удовлетворяющее двум нелокальным интегральным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 1-} I_{(k-1)/2, \beta} u(t) = u_2, \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-} I_{k/2, \beta} u'(t) = u_3, \quad (11)$$

где $\beta > 0$,

$$I_{\nu, \beta} u(t) = \frac{2}{\Gamma(\beta) t^{2(\beta+\nu)}} \int_0^t s^{2\nu+1} (t^2 - s^2)^{\beta-1} u(s) ds$$

— оператор Эрдейи–Кобера ([6], с. 246).

Задача (1) с нелокальными условиями (10), (11), вообще говоря, не является корректной. В данной работе устанавливаются условия, налагаемые на оператор A и элементы $u_2, u_3 \in E$, обеспечивающие ее однозначную разрешимость.

Нелокальные задачи для уравнений в частных производных рассматривались в ряде работ (см. [7] и приводимую там библиографию). Среди публикаций, посвященных исследованию разрешимости нелокальных задач с интегральным условием для абстрактных дифференциальных уравнений первого порядка отметим работы [8], [9]. Критерий единственности решения установлен в [10]. Нелокальные задачи для уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу и Мальмстена с одним нелокальным условием исследованы автором в [11], [12]. Нелокальная задача (1), (10), (11) рассматривается впервые.

Исследования разрешимости задачи (1), (10), (11) основаны на нахождении начальных элементов u_0, u_1 в условии (2) по нелокальным условиям (10), (11).

Применим оператор Эрдейи–Кобера $I_{(k-1)/2,\beta}$ к определяемой равенствами (3)–(5) функции $u(t)$. Учитывая формулы сдвига по параметру (6), (7) имеем

$$\begin{aligned} I_{(k-1)/2,\beta} u(t) &= I_{(k-1)/2,\beta} (Y_k(t)u_0 + L_k(t)u_1) = \\ &= \frac{2}{\Gamma(\beta)} t^{2\beta+k-1} \int_0^t s^k (t^2 - s^2)^{\beta-1} (Y_k(s)u_0 + L_k(s)u_1) ds = \\ &= t^{-2\beta} \left(\frac{\Gamma(k/2 + 1/2)}{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)} Y_{k+2\beta}(t)u_0 + \frac{\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} L_{k+2\beta}(t)u_1 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Из (10), (12) получим первое уравнение для нахождения начальных элементов

$$\frac{\Gamma(k/2 + 1/2)}{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)} Y_{k+2\beta}(1)u_0 + \frac{\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} L_{k+2\beta}(1)u_1 = u_2. \quad (13)$$

Рассмотрим далее функцию $I_{k/2,\beta} u'(t)$. Используя (8), (9) и (6), (7), аналогично (12) имеем

$$\begin{aligned} I_{k/2,\beta} u'(t) &= \frac{t \Gamma(k/2 + 3/2)}{(k+1)\Gamma(k/2 + 3/2 + \beta)} Y_{k+2+2\beta}(t)Au_0 + \\ &+ \frac{t \Gamma(k/2 + 2)}{(k+2)\Gamma(k/2 + 2 + \beta)} L_{k+2+2\beta}(t)Au_1 + \frac{\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} u_1, \end{aligned}$$

откуда учитывая условие (11), выводим второе уравнение для нахождения начальных элементов

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(k/2 + 3/2)}{(k+1)\Gamma(k/2 + 3/2 + \beta)} Y_{k+2+2\beta}(1)Au_0 + \\ &+ \frac{\Gamma(k/2 + 2)}{(k+2)\Gamma(k/2 + 2 + \beta)} L_{k+2+2\beta}(1)Au_1 + \frac{\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} u_1 = u_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнения (13), (14) удобно записать в виде матричного уравнения

$$Bv = w, \quad B : D(A) \times D(A) \longrightarrow E \times E, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k+1+2\beta}{2})} Y_{k+2\beta}(1) & \frac{\Gamma(\frac{k+2}{2})}{\Gamma(\frac{k+2+2\beta}{2})} L_{k+2\beta}(1) \\ \frac{\Gamma(\frac{k+3}{2})}{(k+1)\Gamma(\frac{k+3+2\beta}{2})} Y_{k+2+2\beta}(1)A & \frac{\Gamma(\frac{k+4}{2})}{(k+2)\Gamma(\frac{k+4+2\beta}{2})} L_{k+2+2\beta}(1)A + \frac{\Gamma(\frac{k+2}{2})}{\Gamma(\frac{k+2+2\beta}{2})} I \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

при этом все операторы B_1 – B_4 коммутируют на $D(A)$.

Таким образом, однозначная разрешимость задачи (1), (10), (11) сводится к задаче о существовании у операторной матрицы $B : D(A) \times D(A) \rightarrow E \times E$, заданной соотношением (16), обратной операторной матрицы, определенной на некотором подмножестве из $E \times E$. Как и в скалярном случае важную роль при этом играет определитель операторной матрицы B , который обозначим через $\Delta = B_1 B_4 - B_2 B_3$.

Пусть $x \in D(A)$, учитывая формулы сдвига по параметру (6), (7), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}
\Delta x &= B_1 B_4 x - B_2 B_3 x = \frac{\Gamma(k/2 + 1/2)}{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)} Y_{k+2\beta}(1) \times \\
&\times \left(\frac{\Gamma(k/2 + 2)}{(k+2)\Gamma(k/2 + 2 + \beta)} L_{k+2+2\beta}(1) A x + \frac{\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} x \right) - \\
&- \frac{\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} L_{k+2\beta}(1) \frac{\Gamma(k/2 + 3/2)}{(k+1)\Gamma(k/2 + 3/2 + \beta)} Y_{k+2+2\beta}(1) A x = \\
&= \frac{2\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(k/2 + 2)Y_{k+2\beta}(1)}{(k+2)\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} \int_0^1 s^{k+2\beta} A L_{k+2\beta}(s) x ds + \\
&+ \frac{\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} Y_{k+2\beta}(1) x - \\
&- \frac{2\Gamma(k/2 + 3/2)\Gamma(k/2 + 1)L_{k+2\beta}(1)}{(k+1)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)} \int_0^1 s^{k+2\beta} A Y_{k+2\beta}(s) x ds = \\
&= \frac{\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(k/2 + 1)Y_{k+2\beta}(1)x}{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} + \frac{2\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(k/2 + 2)Y_{k+2\beta}(1)}{(k+2)\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} \times \\
&\times \int_0^1 s^{k+2\beta} \left(L''_{k+2\beta}(s) + \frac{k+2\beta}{s} L'_{k+2\beta}(s) - \frac{k+2\beta}{s} I \right) x ds - \\
&- \frac{2\Gamma(k/2 + 3/2)\Gamma(k/2 + 1)L_{k+2\beta}(1)}{(k+1)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)} \int_0^1 s^{k+2\beta} \left(Y''_{k+2\beta}(s) + \frac{k+2\beta}{s} Y'_{k+2\beta}(s) \right) x ds = \\
&= \frac{\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} Y_{k+2\beta}(1) \left(s^{k+2\beta} L'_{k+2\beta}(s) x \right) \Big|_0^1 - \\
&- \frac{\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} L_{k+2\beta}(1) \left(s^{k+2\beta} Y'_{k+2\beta}(s) x \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} (Y_{k+2\beta}(1) L'_{k+2\beta}(1) x - Y'_{k+2\beta}(1) L_{k+2\beta}(1) x). \quad (17)
\end{aligned}$$

Далее введем

$$W_k(t)x = \begin{vmatrix} Y_k(t) & L_k(t) \\ Y'_k(t) & L'_k(t) \end{vmatrix} x = Y_k(t)L'_k(t)x - Y'_k(t)L_k(t)x$$

— операторный определитель Вронского, построенный по (4), (5).

Таким образом, в силу (17) вопрос о существовании обратного оператору $\Delta = B_1 B_4 - B_2 B_3$ сводится к существованию обратного операторному определителю Вронского $W_{k+2\beta}(1)$.

Лемма. Пусть выполнено условие 1. Тогда операторный определитель Вронского, построенный по равенствам (4), (5), равен

$$W_k(t)x = \frac{k}{t^k} \int_0^t \tau^{k-1} Y_k(\tau) x d\tau. \quad (18)$$

Доказательство. Покажем, что функция $W_k(t)x$ удовлетворяет уравнению

$$W'_k(t)x + \frac{k}{t} W_k(t)x = \frac{k}{t} Y_k(t)x \quad (19)$$

и начальному условию

$$\lim_{t \rightarrow 0+} W_k(t)x = x. \quad (20)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} W'_k(t)x &= Y'_k(t)L'_k(t)x + Y_k(t)L''_k(t)x - Y'_k(t)L'_k(t)x - Y''_k(t)L_k(t)x = \\ &= Y_k(t) \left(L''_k(t) + \frac{k}{t}L'_k(t) - \frac{k}{t}I \right) x - \left(Y'_k(t) + \frac{k}{t}Y'_k(t) \right) L_k(t)x - \frac{k}{t}W_k(t)x + \frac{k}{t}Y_k(t)x = \\ &= Y_k(t)AL_k(t)x - AY_k(t)L_k(t)x - \frac{k}{t}W_k(t)x + \frac{k}{t}Y_k(t)x = -\frac{k}{t}W_k(t)x + \frac{k}{t}Y_k(t)x, \end{aligned}$$

поэтому функция $W_k(t)x$ удовлетворяет уравнению (19).

Поскольку ([1]) $Y_k(0)x = L'_k(0)x = x$, $Y'_k(0)x = L_k(0)x = 0$, то функция $W_k(t)x$ удовлетворяет и начальному условию (20), а единственным решением задачи (19), (20) является функция (18). $\square$

Далее исследуем обратимость ограниченного оператора

$$W_k(1)x = k \int_0^1 \tau^{k-1} Y_k(\tau)x d\tau. \quad (21)$$

Заметим, что если $\alpha = 0$, т.е. оператор A является генератором КОФ $C(t)$, то при $x \in D(A)$

$$\begin{aligned} W_0(t)x &= \lim_{k \rightarrow 0} W_k(t)x = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{t^k} \int_0^t \tau^{k-1} Y_k(\tau)x d\tau = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} \int_0^t (\tau^k)' Y_k(\tau)x d\tau = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} \left((\tau^k Y_k(\tau)x) \Big|_0^t - \int_0^t \tau^k Y'_k(\tau)x d\tau \right) = C(t) - \int_0^t C'(\tau)x d\tau = C(0)x = x, \end{aligned}$$

и оператор $W_0(t)$ обратим всегда. В общем случае $k > 0$ это не так, поэтому нам понадобятся представления ОФБ $Y_k(t)$, установленные в [13].

Если оператор A ограничен, то

$$Y_k(t)x = \Gamma \left(\frac{k+1}{2} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j} A^j x}{j! \Gamma((k+1)/2 + j)} = {}_0F_1 \left(\frac{k+1}{2}; \frac{t^2}{4} A \right) x, \quad x \in E, \quad (22)$$

где ${}_pF_q(\cdot)$ — обобщенная гипергеометрическая функция. В случае неограниченного оператора A при выполнении условия 1 справедливо представление

$$Y_k(t)x = \frac{2^{(k-1)/2} \Gamma((k+1)/2)}{i\pi t^{(k-1)/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{(3-k)/2} I_{(k-1)/2}(t\lambda) R(\lambda^2)x d\lambda, \quad \sigma > \omega, \quad x \in E, \quad (23)$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя, λ^2 при $\operatorname{Re} \lambda > \omega \geq 0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A , а $R(\lambda^2) = (\lambda^2 I - A)^{-1}$ — его резольвента.

В дальнейшем важную роль будет играть целая функция

$$\chi_k(\lambda) = {}_1F_2 \left(\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}, \frac{k}{2} + 1; \frac{\lambda}{4} \right). \quad (24)$$

Теорема 1. Пусть A — ограниченный оператор. Для того, чтобы определяемый равенством (21) оператор $W_k(1)$ был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие

$$\chi_k(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(A). \quad (25)$$

Доказательство. Подставив (22) в (21), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} W_k(1) &= k \int_0^1 \tau^{k-1} Y_k(\tau) d\tau = k \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A/4)^j}{j! \Gamma(j+k/2+1/2)} \int_0^1 \tau^{2j+k-1} d\tau = \\ &= \frac{k}{2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+k/2)(A/4)^j}{j! \Gamma(j+k/2+1/2) \Gamma(j+k/2+1)} = {}_1F_2\left(\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}, \frac{k}{2}+1; \frac{A}{4}\right) = \chi_k(A). \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть Ω — открытое множество комплексной плоскости, содержащее спектр $\sigma(A)$ ограниченного оператора A , граница которого $\partial\Omega$ состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда, записывая для оператора, стоящего в правой части (26), представление через резольвенту, получим

$$W_k(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \chi_k(\lambda) R(\lambda) d\lambda. \quad (27)$$

Необходимым и достаточным условием обратимости оператора $W_k(1)$ является отсутствие в спектре $\sigma(W_k(1))$ оператора $W_k(1)$ точки $\lambda = 0$. Равенство (27) означает, что оператор $W_k(1)$ является аналитической функцией оператора A , $W_k(1) = \chi_k(A)$. По теореме об отображении спектра ограниченного оператора $\sigma(W_k(1)) = \chi_k(\sigma(A))$. Таким образом, значение $\lambda = 0$ не является точкой спектра оператора $W_k(1)$ только тогда, когда на спектре $\sigma(A)$ выполнено условие (25). При этом

$$W_k^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\chi_k(\lambda)} R(\lambda) d\lambda. \quad (28)$$

□

Из теоремы 1 следует, что расположение нулей функции $\chi_k(\lambda)$ определяет обратимость оператора $W_k(1)$ в случае ограниченного оператора A . В случае неограниченного оператора A условие вида (25) уже не будет достаточным условием обратимости, хотя расположение нулей также будет играть важную роль. В этом случае, подставляя (23) в (21) и используя интеграл 2.15.2.5 ([14]), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} W_k(1) &= \frac{2^{(k-1)/2} k \Gamma((k+1)/2)}{i\pi} \int_0^1 \tau^{(k-1)/2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{(3-k)/2} I_{(k-1)/2}(\tau\lambda) R(\lambda^2) d\lambda d\tau = \\ &= \frac{2^{(k-1)/2} k \Gamma((k+1)/2)}{i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{(3-k)/2} R(\lambda^2) \int_0^1 \tau^{(k-1)/2} I_{(k-1)/2}(\tau\lambda) d\tau d\lambda = \\ &= \frac{1}{i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} {}_1F_2\left(\frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}, \frac{k}{2}+1; \frac{\lambda^2}{4}\right) \lambda R(\lambda^2) d\lambda = \frac{1}{i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \chi_k(\lambda^2) \lambda R(\lambda^2) d\lambda. \end{aligned} \quad (29)$$

Условие 2. Пусть каждый нуль λ_j , $j = 1, 2, \dots$, определяемой равенством (24) целой функции $\chi_k(\lambda)$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и существует такое $d > 0$, что

$$\sup_{j=1,2,\dots} \|R(\lambda_j)\| \leq d.$$

Будем считать условие 2 выполненным. Поскольку каждый нуль λ_j , $j = 1, 2, \dots$, функции $\chi_k(\lambda)$ принадлежит $\rho(A)$, то он принадлежит $\rho(A)$ вместе с круговой окрестностью Ω_j радиуса $1/d$, границу которой, проходящую по часовой стрелке, обозначим γ_j . Пусть

Υ_0 — контур на комплексной плоскости, состоящий из проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re} z = \sigma_0 > \omega$, Υ_0^2 — парабола, образ Υ_0 при отображении

$$w = z^2 \quad (z \in \Upsilon_0, w \in \Upsilon_0^2), \quad \Xi = \Upsilon_0^2 \bigcup_{j=1,2,\dots} \gamma_j.$$

Наша задача сводится к задаче о существовании определенного на некотором подмножестве из $D(A)$ обратного оператора, у ограниченного оператора, заданного соотношением (29) и продолженного по непрерывности на E . С этой целью при $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ введем ограниченный оператор

$$Hx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Xi} \frac{R(z)x dz}{\chi_k(z)(z - \lambda_0)^n}, \quad H : E \rightarrow E. \quad (30)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1, 2 и пусть $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\operatorname{Re} \lambda_0 > \sigma_0$ выбраны так, чтобы абсолютно сходился интеграл в формуле (30). Тогда оператор $W_k(1)$ имеет обратный $W_k^{-1}(1) : D(A^n) \rightarrow E$.

Доказательство. Пусть $x \in D(A)$, $\sigma_0 < \sigma < \operatorname{Re} \xi$. Тогда, подставляя определяемый равенством (29) оператор $W_k(1)$ в (30) и применяя тождество Гильберта

$$R(z)R(\xi^2) = \frac{R(z) - R(\xi^2)}{\xi^2 - z},$$

получим равенство

$$\begin{aligned} HW_k(1)x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Xi} \frac{R(z)}{\chi_k(z)(z - \lambda_0)^n} \frac{1}{i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \chi_k(\xi^2) \xi R(\xi^2)x d\xi dz = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\Xi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{\xi \chi_k(\xi^2) R(z)x}{\chi_k(z)(z - \lambda_0)^n(\xi^2 - z)} - \frac{\xi \chi_k(\xi^2) R(\xi^2)x}{\chi_k(z)(z - \lambda_0)^n(\xi^2 - z)} \right) d\xi dz. \end{aligned} \quad (31)$$

Интеграл в (31) абсолютно сходится. Изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} HW_k(1)x &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\Xi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\xi \chi_k(\xi^2) R(z)x d\xi dz}{\chi_k(z)(z - \lambda_0)^n(\xi^2 - z)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi \chi_k(\xi^2) R(\xi^2)x \int_{\Xi} \frac{dz}{\chi_k(z)(z - \lambda_0)^n(\xi^2 - z)} d\xi. \end{aligned} \quad (32)$$

Если контур интегрирования Υ_0^2 замкнуть влево, не пересекая $\bigcup_{j=1,2,\dots} \gamma_j$, то внутренний интеграл во втором слагаемом (32) обратится в нуль в силу выбора контура Ξ и теоремы Коши для многосвязной области. А для вычисления интегралов в первом слагаемом (32) используем интегральную формулу Коши. Таким образом,

$$\begin{aligned} HW_k(1)x &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\Xi} \int_{\Upsilon} \frac{\xi \chi_k(\xi^2) R(z)x d\xi dz}{\chi_k(z)(z - \lambda_0)^n(\xi^2 - z)} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Xi} \int_{\Upsilon^2} \frac{\chi_k(\lambda) R(z)x d\lambda dz}{\chi_k(z)(z - \lambda_0)^n(\lambda - z)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Xi} \frac{R(z)x dz}{(z - \lambda_0)^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon_0^2} \frac{R(z)x dz}{(z - \lambda_0)^n} = \frac{-1}{(n-1)!} R^{(n-1)}(\lambda_0)x = (-1)^n R^n(\lambda_0)x. \end{aligned}$$

Коммутирующие операторы H , $W_k(1)$, $R^n(\lambda_0)$ ограничены и область определения $D(A)$ плотна в E , поэтому равенство $HW_k(1)x = (-1)^n R^n(\lambda_0)x$ справедливо и для $x \in E$, при этом $HW_k(1) : E \rightarrow D(A^n)$. Отсюда следует, что оператор

$$W_k^{-1}(1)x = (-1)^n(\lambda_0 I - A)^n Hx, \quad W_k^{-1}(1) : D(A^n) \rightarrow E, \quad (33)$$

является обратным по отношению к $W_k(1)$. Действительно,

$$\begin{aligned} W_k(1)W_k^{-1}(1)x &= (-1)^n W_k(1)(\lambda_0 I - A)^n Hx = (-1)^n W_k(1)H(\lambda_0 I - A)^n x = \\ &= R^n(\lambda_0)(\lambda_0 I - A)^n x = x, \quad x \in D(A^n), \end{aligned}$$

$$W_k^{-1}(1)W_k(1)x = (-1)^n (\lambda_0 I - A)^n H W_k(1)x = (\lambda_0 I - A)^n R^n(\lambda_0)x = x, \quad x \in E. \quad \square$$

Заметим, что расположение, кратность и асимптотика нулей λ_j , определяемой равенством (24) функции $\chi_k(\lambda)$, в общем случае нам неизвестны, что приводит в формулировке теоремы 2 к условию о сходимости интеграла в формуле (30). Дополнительная информация о нулях функции $\chi_k(\lambda)$ позволит это условие конкретизировать. Например, если $k = 2$, то

$$\chi_2(\lambda) = \frac{\operatorname{ch} 2\lambda - 1}{2\lambda^2}, \quad \lambda_j = j\pi i, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

и для сходимости интеграла в формуле (30) достаточно взять $n = 4$.

В теоремах 1 и 2 указано множество, на котором у оператора $W_k(1)$ при $k > 0$ существует обратный $W_k^{-1}(1)$, имеющий вид (28) в случае ограниченного оператора A и вид (33) — в случае неограниченного A . Поэтому, в силу равенства (17), нами доказано существование обратного оператору

$$\Delta = \frac{\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(k/2 + 1)}{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} W_{k+2\beta}(1).$$

Решая матричное уравнение (15), так же как и в скалярном случае получим

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} B_4 & -B_3 \\ -B_2 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу теорем 1 и 2 приходим к следующим утверждениям, в которых важную роль играет функция

$$\chi_{k+2\beta}(\lambda) = {}_1F_2 \left(\frac{k+2\beta}{2}; \frac{k+2\beta+1}{2}; \frac{k+2\beta}{2} + 1; \frac{\lambda}{4} \right).$$

Теорема 3. Пусть $u_2, u_3 \in E$, A — ограниченный оператор и на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнено условие $\chi_{k+2\beta}(\lambda) \neq 0$. Тогда задача (1), (10), (11) имеет единственное решение, определяемое равенством (3), где

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)}{\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(k/2 + 1)} W_{k+2\beta}^{-1}(1) \times \\ &\times \left(\frac{\Gamma(k/2 + 2) L_{k+2+2\beta}(1) A u_2}{(k+2)\Gamma(k/2 + 2 + \beta)} + \frac{\Gamma(k/2 + 1) u_2}{\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} - \frac{\Gamma(k/2 + 3/2) Y_{k+2+2\beta}(1) A u_3}{(k+1)\Gamma(k/2 + 3/2 + \beta)} \right), \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)\Gamma(k/2 + 1 + \beta)}{\Gamma(k/2 + 1/2)\Gamma(k/2 + 1)} W_{k+2\beta}^{-1}(1) \times \\ &\times \left(-\frac{\Gamma(k/2 + 1) L_{k+2\beta}(1) u_2}{\Gamma(k/2 + 1 + \beta)} + \frac{\Gamma(k/2 + 1/2) Y_{k+2\beta}(1) u_3}{\Gamma(k/2 + 1/2 + \beta)} \right), \quad (35) \end{aligned}$$

$$W_{k+2\beta}^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\chi_{k+2\beta}(\lambda)} R(\lambda) d\lambda.$$

Теорема 4. Пусть выполнено условие 1, пусть также каждый нуль λ_j , $j = 1, 2, \dots$, целой функции $\chi_{k+2\beta}(\lambda)$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и существует такое $d > 0$, что

$$\sup_{j=1,2,\dots} \|R(\lambda_j)\| \leq d.$$

Если $u_2, u_3 \in D(A^{n+1})$, где $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\operatorname{Re} \lambda_0 > \sigma_0$ выбраны так, чтобы абсолютно сходился интеграл

$$\int_{\Xi} \frac{R(z) dz}{\chi_{k+2\beta}(z)(z - \lambda_0)^n},$$

то задача (1), (10), (11) имеет единственное решение, определяемое равенствами (3), (34), (35), где

$$W_{k+2\beta}^{-1}(1)x = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{\Xi} \frac{R(z) (\lambda_0 I - A)^n x dz}{\chi_{k+2\beta}(z)(z - \lambda_0)^n}.$$

Рассмотрели задачу с двумя нелокальными условиями, записанными с помощью операторов Эрдейи–Кобера. Аналогично, причем со значительными упрощениями, исследуется случай, когда вместо нелокальных условий (10), (11) задаются финальные условия вида

$$\lim_{t \rightarrow 1-} u(t) = u_2, \quad \lim_{t \rightarrow 1-} u'(t) = u_3. \quad (36)$$

Результаты о разрешимости задачи (1), (36), которую можно также назвать краевой задачей управления, получаются из теорем 3 и 4, если в них положить $\beta = 0$.

Отметим также, что при $k = \beta = 0$ ОФБ и ОФС соответственно равны $Y_0(t) = C(t)$, $L_0(t) = C_1(t)$, $\chi_0(z) = 1$. Как указано после леммы $W_0(1) = W_0^{-1}(1) = I$, и единственное решение задачи (1), (36) в этом случае существует при любых $u_2, u_3 \in D(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Глушак А.В. Абстрактная задача Коши для уравнения Бесселя–Струве, Дифференц. уравнения **53** (7), 891–905 (2017).
- [2] Zheng Q. Integrated cosine functions, Internat. J. Math. and Math. Sci. **19** (3), 575–580 (1996).
- [3] Zhang J., Zheng Q. On α -times integrated cosine functions. Math. Jap. **50** (3), 401–408 (1999).
- [4] Kostić M. Generalized semigroups and cosine functions (Beograd. Matematički institut SANU, 2011).
- [5] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения (Физматгиз, М., 1963).
- [6] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения (Наука и техника, Минск, 1987).
- [7] Камынин В.Л. Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многими пространственными переменными, Матем. заметки **97** (3), 368–381 (2015).
- [8] Тихонов И.В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве, Дифференц. уравнения **34** (6), 841–843 (1998).
- [9] Сильченко Ю.Т. Уравнение параболического типа с нелокальными условиями, СМФН **17**, 5–10 (2006).
- [10] Тихонов И.В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений, Изв. РАН. Сер. матем. **67** (2), 133–166 (2003).
- [11] Глушак А.В. Нелокальная задача для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, Изв. вузов. Матем., № 6, 1–9 (2016).
- [12] Глушак А.В. О разрешимости одной нелокальной задачи для абстрактного уравнения Мальмстена, Учен. зап. Брянк. гос. ун-та: физ.-матем. науки / биол. науки / ветер. науки **3**, 22–30 (2016).
- [13] Глушак А.В., Покручин О.А. Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, Дифференц. уравнения **52** (1), 41–59 (2016).
- [14] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции (Наука, М., 1983).

Александр Васильевич Глушак

*Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
ул. Победы, д. 85, г. Белгород, 308015, Россия,*

e-mail: aleglu@mail.ru

A. V. Glushak

Nonlocal problem for the abstract Bessel–Struve equation

Abstract. We find sufficient conditions for the unique solvability of nonlocal problem for the abstract Bessel–Struve differential equation. Both nonlocal conditions are written with the help of Erdelyi–Kober operators.

Keywords: Bessel–Struve equation, Erdelyi–Kober operator, nonlocal condition, unique solvability.

Aleksandr Vasil'evich Glushak

*Belgorod State National Research University,
85 Pobedy str., Belgorod, 308015 Russia,*

e-mail: aleglu@mail.ru