Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Кац, Зигзаги и спирали в краевых задачах, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 7, 39–47

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-7-39-47>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:25:00

Б.А. КАЦ

ЗИГЗАГИ И СПИРАЛИ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ

Аннотация. Исследуются контурные интегралы по негладким дугам и их приложения при решении краевых задач. Выясняется, что на картину разрешимости однородной краевой задачи Римана сильно влияют геометрические свойства дуги: если на зигзагообразной дуге нет никаких отличий от классических результатов, то на спиралеобразной число решений может оказаться иным.

Ключевые слова: негладкая дуга, контурный интеграл, интеграл типа Коши, краевая задача Римана.

УДК: 517.544

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-7-39-47

ВВЕДЕНИЕ

Решения многих краевых задач комплексного анализа записываются в форме контурных интегралов. Рассмотрим в качестве примера краевую задачу Римана.

Эта задача ставится так. Пусть Γ — заданная на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ направленная кривая. Требуется найти аналитическую в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию $\Phi(z)$, имеющую во всех внутренних точках t контура Γ предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ слева и справа соответственно, удовлетворяющие краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на Γ функции. Обычно это краевое условие дополняется условием $\Phi(\infty) = 0$ и каким-либо ограничением на рост искомой функции на концах дуги Γ . Это классическая задача комплексного анализа, имеющая большое число приложений (см. монографии [1]–[3] и многие др.).

Во всей этой литературе решения задачи строятся в виде интегралов по контуру Γ . Например, при $G(t) \equiv 1$ (так называемая задача о скачке) решением является интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t) dt}{t - z}, \quad z \notin \Gamma. \quad (1)$$

В данной заметке рассматриваются негладкие дуги бесконечной длины, для которых этот интеграл может расходиться. В этой связи в дальнейшем (обобщенным) интегралом типа Коши по дуге Γ с плотностью $g(t)$ будем называть любую голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию

Поступила в редакцию 27.05.2018, после доработки 07.08.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан, грант 18-41-160003 р_а.

$\Phi(z)$, имеющую во всех внутренних точках t дуги Γ предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ слева и справа соответственно, удовлетворяющие краевому условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t)$$

и обращающуюся в нуль в бесконечно удаленной точке. Если такая функция существует, то теми же свойствами обладает ее сумма с любой функцией, голоморфной во всех точках $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением концов дуги Γ и исчезающей в бесконечности. То, что обобщенный интеграл типа Коши определен не единственным образом, как правило, не приводит к путанице. Но мы введем еще один термин: будем называть такой интеграл 2-интегрируемым, если в малых окрестностях концов дуги функция $\Phi(z)$ интегрируема в квадрате (по стандартной мере на плоскости). Нетрудно доказать, что если любая порция (термин “порция” принадлежит, по-видимому, Н.И. Лузину, см. [4]; здесь под ним можно понимать любую поддугу Γ , содержащую более одной точки) Γ содержит спрямляемую дугу и 2-интегрируемый обобщенный интеграл типа Коши по этой дуге существует, то только один.

Мы увидим, что свойства интегралов типа Коши для зигзагообразных и спиралеобразных дуг в определенном смысле противоположны, и это отражается на разрешимости краевых задач Римана на таких дугах.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Здесь и ниже считаем, что Γ есть простая ориентированная жорданова дуга с началом и концом в точках 0 и 1 соответственно, и ее негладкость сосредоточена в точке 0. Иными словами, Γ есть образ отрезка $I := [0, 1]$ при непрерывном взаимно однозначном отображении $\phi : I \mapsto \mathbb{C}$ таком, что $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ и при любом положительном $\varepsilon < 1$ функция $\phi(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\varepsilon, 1]$.

С каждой дугой Γ свяжем логарифмическое ядро $K_\Gamma(z)$ — однозначную ветвь функции

$$K_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z-1}{z},$$

выделяемую в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ условием $K_\Gamma(\infty) = 0$. В окрестности точки 1 она ведет себя как $\frac{1}{2\pi i} \ln |z-1| + O(1)$, а в начале координат ее особенность определяется геометрией Γ . Во внутренних точках дуги Γ ее логарифмическое ядро имеет единичный скачок.

Допустим, что заданная на дуге функция $f(t)$ является сужением на Γ заданной на всей комплексной плоскости функции $F(z)$, обладающей следующими свойствами:

- (i) функция F имеет компактный носитель;
- (ii) функция F непрерывна в $\mathbb{C}$ и непрерывно дифференцируема в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, причем производная $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ интегрируема в $\mathbb{C}$.

Если произведение $K_\Gamma(z) \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ также интегрируемо в $\mathbb{C}$, то согласно формуле Грина

$$\int_\Gamma f(t) = - \iint_{\mathbb{C}} K_\Gamma(z) \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z},$$

причем интеграл в левой части сходится, и отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t) dt}{t-z} = K_\Gamma(z) F(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}} \frac{K_\Gamma(\zeta) d\zeta d\bar{\zeta}}{\zeta-z}. \quad (2)$$

Таким образом, при сформулированных выше условиях интеграл типа Коши (1) сходится. При этом длина дуги Γ может быть бесконечной.

2. Зигзаги

Будем относить дугу Γ к классу $\mathfrak{Z}$ и называть зигзагом, если точки 0 и 1 можно соединить гладкой дугой Λ так, что замкнутую самопересекающуюся кривую $\Gamma \cup \Lambda$ можно представить как объединение счетного семейства кусочно-гладких границ γ_n не налегающих друг на друга областей d_n , сгущающихся к начальной точке 0.

Пример 1. Примером может служить график

$$\Gamma = \{z = x + x \sin(\pi x^{-p}) : 0 < x \leq 0\} \cup \{0\}, \quad p > 0.$$

Здесь в качестве дуги Λ можно использовать отрезок I ; объединение $\Gamma \cup I$ состоит из замкнутых кривых γ_n , ограничивающих области d_n , равные $\{z = x + iy : (n+1)^{-1/p} < x < n^{-1/p}, x \sin(\pi x^{-p}) < y < 0\}$ при нечетном $n \geq 1$ и $\{z = x + iy : (n+1)^{-1/p} < x < n^{-1/p}, 0 < y < x \sin(\pi x^{-p})\}$ при четном $n \geq 2$. При нечетных n положительное относительно области d_n направление обхода замкнутой кривой γ_n совпадает с направлением Γ , а при четном противоположно ему. При $p \geq 1$ длина дуги Γ бесконечна.

Для зигзагов разность логарифмических ядер $K_\Gamma - K_\Lambda$ есть знакопеременная сумма характеристических функций областей d_n . Поскольку эти области не налегающие, то эта разность не превосходит единицы по абсолютной величине, и в окрестности нуля $K_\Gamma(z) = -\frac{1}{2\pi i} \ln|z| + O(1)$. Таким образом, вопрос сходимости интегралов по зигзагам сводится к вопросу о продолжимости их плотностей до функций с нужными свойствами.

Предположим, что заданная на Γ функция f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\nu \in (0, 1]$

$$h_\nu(f; \Gamma) := \sup \left\{ \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\nu} : t_{1,2} \in \Gamma, t_1 \neq t_2 \right\} < \infty,$$

и обозначим класс всех таких функций $H_\nu(\Gamma)$. Наиболее известным инструментом для продолжения таких функций на всю плоскость является оператор Уитни $\mathcal{E}_0$ (например, [5]). Продолжение Уитни $F := \mathcal{E}_0 f$ функции $f \in H_\nu(A)$ с компакта $A \subset \mathbb{C}$ — это такая определенная в $\mathbb{C}$ функция, что

(W1) $F|_A = f$;

(W2) $F \in H_\nu(\mathbb{C})$;

(W3) функция F имеет в $\mathbb{C} \setminus A$ частные производные по x и по y , причем

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \leq \frac{h_\nu(f; A)}{\text{dist}^{1-\nu}(z, A)}, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \leq \frac{h_\nu(f; A)}{\text{dist}^{1-\nu}(z, A)}.$$

Эту функцию можно умножить на функцию-срезку класса $C_0^\infty(\mathbb{C})$, равную единице в окрестности A . В результате получим продолжение f , обладающее теми же свойствами (лишь могут увеличиться числители дробей в последних неравенствах), и имеющее вдобавок компактный носитель. Такое продолжение с дуги Γ будет обозначаться f^w . Известно [6] (см. также [7], [8]), что первые частные производные продолжения Уитни интегрируемы вблизи A в любой степени, меньшей величины

$$p = \frac{2 - \overline{\text{dm}}A}{1 - \nu}, \quad (3)$$

где $\overline{\text{dm}}A$ означает верхнюю метрическую размерность множества A , называемую также размерностью Колмогорова, размерностью Минковского и box-dimension (например, [9]). Для любой плоской кривой эта размерность заключена в интервале $[1, 2]$, а для спрямляемой кривой она равна единице.

Величина (3) превосходит единицу при $\nu > \overline{\text{dm}}A - 1$, что приводит к следующим условиям сходимости интегралов по зигзагам.

Лемма 1. *Интеграл $\int_{\Gamma} f dt$ по зигзагу Γ сходится, если $f \in H_{\nu}(\Gamma)$ и $\nu > \overline{\text{dm}}\Gamma - 1$.*

Ослабить ограничения этой леммы можно, разбив Γ на малую дугу Γ^* , содержащую начало координат, и ее дополнение $\Gamma \setminus \Gamma^*$. Это дополнение является гладкой дугой, что немедленно приводит к следующему результату.

Лемма 2. *Интеграл $\int_{\Gamma} f dt$ по зигзагу Γ сходится, если f удовлетворяет на Γ условию Гёльдера с любым показателем, а в некоторой сколь угодно малой окрестности γ начала этого зигзага — с показателем $\nu > \overline{\text{dm}}\gamma - 1$.*

Условия этих лемм обеспечивают сходимость интеграла типа Коши. Хорошо известно (например, [10]), что интегральное слагаемое в правой части (2) представляет непрерывную во всей комплексной плоскости функцию, если его плотность $K_{\Gamma}(z) \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ интегрируема в степени, большей двух. Величина (3) превосходит два при $\nu > \overline{\text{dm}}A/2$, что приводит к следующему результату.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma \in \mathfrak{Z}$, и заданная на этой дуге функция $g(t)$ удовлетворяет на ней условию Гёльдера с любым показателем, а в некоторой сколь угодно малой окрестности γ ее начала — с показателем*

$$\nu > \frac{1}{2} \overline{\text{dm}}\gamma. \quad (4)$$

Тогда интеграл типа Коши (1) сходится и представляет функцию $\Phi(z)$, обладающую следующими свойствами:

- а) *функция Φ голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ и исчезает в бесконечно удаленной точке;*
- б) *в каждой внутренней точке t дуги Γ она имеет предельные значения $\Phi^{\pm}(t)$ с обеих сторон, связанные соотношением*

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = g(t), \quad t \in \Gamma \setminus \{0, 1\}; \quad (5)$$

- с) *вблизи концов 0 и 1 справедливы асимптотические оценки*

$$\Phi(z) = -\frac{g(0)}{2\pi i} \ln |z| + O(1), \quad \Phi(z) = \frac{g(1)}{2\pi i} \ln |z - 1| + O(1)$$

соответственно.

Иными словами, интеграл типа Коши по зигзагу аналогичен по своим свойствам интегралу типа Коши по кусочно гладкой дуге, и имеет такую же асимптотику на концах этой дуги [1], [2]. Поэтому на зигзаги переносятся все классические результаты о краевой задаче Римана на кусочно-гладких дугах. Для сравнения со следующим разделом приведем один из таких результатов, касающихся однородной задачи Римана. Рассмотрим следующую формулировку этой задачи.

Задача. *Даны простая жорданова дуга Γ и заданная на ней функция $G(t)$. Требуется найти голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ и исчезающую в бесконечно удаленной точке функцию $\Phi(z)$, которая имеет предельные значения с обеих сторон $\Phi^{\pm}(t)$ во внутренних точках Γ , связанные соотношением*

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t),$$

а вблизи ее концов ограничена.

Повторяя построения [1], [2] и используя результаты теоремы 1, получаем

Следствие. Пусть коэффициент $G(t)$ удовлетворяет на зигзаге Γ условию Гёльдера с любым показателем, а в некоторой сколь угодно малой окрестности γ его начала — с показателем ν , удовлетворяющим условию (4). Пусть, кроме того, он не обращается в нуль на Γ . Тогда картина разрешимости сформулированной выше однородной задачи Римана определяется величиной $\varkappa := \varkappa_0 + \varkappa_1$, где $\varkappa_0 = \left[\operatorname{Re} \left(-\frac{g(0)}{2\pi i} \right) \right]$, $\varkappa_1 = \left[\operatorname{Re} \left(\frac{g(1)}{2\pi i} \right) \right]$, $g(t)$ — любая непрерывная и однозначная на Γ ветвь $\ln G(t)$, а $[\cdot]$ означает целую часть. А именно, при $\varkappa \leq 0$ задача не имеет нетривиальных решений, а при $\varkappa > 0$ ее общее решение есть $\Phi(z) = P(z)z^{-\varkappa_0}(z-1)^{-\varkappa_1} \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t)dt}{t-z}$, где $P(z)$ — произвольный алгебраический многочлен степени ниже $\varkappa$.

Таким образом, картина разрешимости краевой задачи Римана на зигзаге мало зависит от этого зигзага. Она зависит лишь от значений на его концах коэффициента G .

В заключение раздела приведем пример вычисления верхней метрической размерности окрестности начала дуги Γ .

Пример 2. Разделим отрезок $I = \{x + iy : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ на сегменты $I_n := \{2^{-n} \leq x \leq 2^{-n+1}, y = 0\}$, $n = 1, 2, \dots$. Зафиксируем число $\beta \geq 1$, и поделим каждый сегмент I_n на $2^{[n\beta]}$ равных частей; как и выше, здесь $[\cdot]$ означает целую часть. Обозначим $x_{n,j}$ точки деления сегмента I_n в убывающем порядке, т. е. $x_{n,j} = 2^{-n+1} - (j-1)a_n$, $j = 1, 2, \dots, n$, где $a_n = 2^{-n-[n\beta]}$. Пусть $p_{n,j} := \{x + iy : x_{n,j} - C_n \leq x \leq x_{n,j}, 0 \leq y \leq 2^{-n}\}$ и $C_n = \frac{1}{2}a_n^\alpha$. Тогда прямоугольники $p_{n,j}$ попарно не пересекаются. Пусть кривая Γ есть ломаная, состоящая из вертикальных и верхних горизонтальных сторон этих прямоугольников, а также из соединяющих полученные П-образные ломаные отрезков вещественной оси. Очевидно, $\Gamma \in \mathfrak{Z}$. Сходная ломаная была построена в [6]. Из проведенных нами вычислений следует, что верхняя метрическая размерность любой дуги $\gamma \subset \Gamma$ с началом в точке 0 равна $2\beta/(\beta+1)$.

Отметим, что во всех леммах и теоремах данного раздела речь идет об интегралах, сходящихся в классическом, а не каком-либо обобщенном смысле.

3. СПИРАЛИ

Будем относить дугу Γ к классу $\mathfrak{S}$ и называть спиралью, если она может быть задана уравнением вида

$$\Gamma = \{z = r \exp i\theta(r) : 0 < r \leq 1\} \cup \{0\},$$

где $\theta(r)$ есть заданная при $0 < r \leq 1$ непрерывно дифференцируемая вещественная функция, причем $\theta(1) = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, предел $\lim_{r \rightarrow 0} \theta(r)$ равен $+\infty$ или $-\infty$, а вблизи нуля эта функция монотонна.

Пример 3. Примером может служить график

$$\Gamma = \{z = r \exp(2\pi i r^{-q}) : 0 < r \leq 1\} \cup \{0\}, \quad q > 0.$$

Он пересекает отрезок $I = (0, 1]$ в точках $x_n = n^{-1/q}$, $n = 1, 2, \dots$. При $q \geq 1$ длина этого графика бесконечна. Виток $\Gamma_n = \{z = r \exp(\pi i r^{-q}) : x_{n+1} < r \leq x_n\}$ вместе с отрезком $[x_{n+1}, x_n]$ ограничивает область Δ_n , содержащую точку 0. Объединение $\Gamma \cup I$ состоит из границ этих последовательно вложенных друг в друга областей, сгущающихся к началу координат. Поэтому разность $K_\Gamma(z) - K_I(z)$ при $z \in \Delta_n \setminus \Delta_{n+1}$ равна $-n$, т. е. $\operatorname{Re} K_\Gamma(z)$ при $z \rightarrow 0$ стремится к $-\infty$. Далее, в области $\Delta_n \setminus \Delta_{n+1}$ имеем $x_{n+1} < |z| < x_n$, т. е. $|z|^{-q} - 1 < n < |z|^{-q}$ и $-|z|^{-q} < K_\Gamma(z) - K_I(z) < 1 - |z|^{-q}$. Итак, при $z \rightarrow 0$ логарифмическое

ядро спирали Γ стремится к бесконечности как $|z|^{-q}$, и при $q \geq 2$ оно не интегрируемо в окрестности нуля. Простой подсчет показывает, что интеграл $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$ расходится при $q \geq 2$, т. е. даже интеграл с гладкой плотностью по спирали может расходиться.

Очевидно, для спирали двойной интеграл в формуле (2) может оказаться расходящимся. Это значит, что классический интеграл типа Коши по спирали может расходиться. Но мы увидим, что обобщенный интеграл типа Коши здесь существует при некоторых дополнительных ограничениях на гладкость его плотности. Будем относить заданную на Γ функцию f к классу $H_{\nu}^{\infty}(\Gamma)$, если $f \in H_{\nu}(\Gamma)$, а в малой окрестности точки 0 эта функция является сужением на Γ некоторой заданной на всей плоскости функции с компактным носителем F , имеющей частные производные всех порядков. Для любого натурального k эта функция представима в виде

$$f(t) = P_k(t, \bar{t}) + f_k(t),$$

где $P_k(t, \bar{t})$ — ее многочлен Маклорена степени k , а $f_k \in H_{\nu}^{\infty}(\Gamma)$ имеет нуль порядка $k+1$ в точке 0 и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем 1 в окрестности нуля. Для упрощения выкладок ниже считаем, что это представление справедливо во всей комплексной плоскости.

Будем говорить, что спираль Γ имеет порядок $\varkappa$, если $K_{\Gamma}(z) = O(z^{-\varkappa})$ при $z \rightarrow 0$. Очевидно, если $k = [\varkappa]$ и $P_k \equiv 0$, то двойной интеграл в формуле (2) сходится. Тогда и интеграл типа Коши сходится, и определяет функцию, ограниченную вблизи нуля. Если многочлен Маклорена P_k не равен тождественному нулю, то все это верно для интеграла

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_k(t) dt}{t - z}, \quad z \notin \Gamma.$$

Он имеет на Γ скачок f_k , и чтобы получить аналог интеграла Коши с плотностью f мы должны прибавить к нему голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию со скачком $p_k := P_k|_{\Gamma}$ на Γ . Построим ее в виде суммы следующих трех функций.

Первая из этих функций

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{p_k(t) dt}{t - z}, \quad z \notin I,$$

имеет скачок p_k на I , а ее поведение в точках 0 и 1 определяется классическими оценками интеграла типа Коши по гладкой дуге [1]–[3].

При построении второй функции для конкретности будем считать, что функция $\theta(r)$ убывает на отрезке $[0, 1]$ от $+\infty$ до 2π . Тогда соответствующая спираль пересекает отрезок I в точках $r_n = \theta^{-1}(n)$, $n = 1, 2, \dots$. На окружности $C_n := \{z : |z| = r_n\}$ имеем $\bar{z} = r_n^2 z^{-1}$. Поэтому если

$$P_k(z, \bar{z}) = \sum_{m+n \leq k} a_{m,n} z^m \bar{z}^n,$$

то функция

$$\Phi_2(z) = \sum_{m+n \leq k} a_{m,n} \sum_{\iota=1}^{\infty} \phi_{\iota, m, n}(z),$$

где $\phi_{\iota, m, n}(z)$ равняется $r_{\iota}^{2n} z^{m-n}$ при $|z| < r_{\iota}$ и нулю при $|z| > r_{\iota}$, кусочно голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ (входящая в нее сумма локально конечна при $z \neq 0$), имеет скачок p_k на каждой окружности C_{ι} , и равна нулю в бесконечно удаленной точке.

Наконец, рассмотрим две области, на которые спираль Γ и отрезок I делят кольцо $R_n := \{z : r_{n+1} < |z| < r_n\}$. Обозначим через δ_n ту из них, которая примыкает к окружности C_n . Эта окружность и ограничивающий δ_n виток Γ ориентированы положительно относительно этой области, а замыкающий ее границу отрезок $[r_{n+1}, r_n]$ — отрицательно. Поэтому функция

$$\Phi_3(z) = P_k(z, \bar{z})\chi(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n} \frac{\partial P_k}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\zeta - z},$$

где $\chi(z)$ — характеристическая функция объединения областей $\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$, имеет скачок p_k на $\partial\delta_n$ при любом n . С учетом ориентации заключаем, что сумма $\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, а на Γ имеет скачок p_k . Значит, обобщенным интегралом типа Коши по спирали Γ порядка $\varkappa$ является

$$\begin{aligned} \Phi_*(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_k(t) dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{p_k(t) dt}{t - z} + P_k(z, \bar{z})\chi(z) - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \iint_{\bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n} \frac{\partial P_k}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\zeta - z} - \sum_{m+n \leq k} a_{m,n} \sum_{\iota=1}^{\infty} \phi_{\iota,m,n}(z). \end{aligned}$$

Эта функция голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, на Γ имеет скачок f , а в бесконечности исчезает. Ее можно рассматривать как реализацию для данного случая идеи Адамара [11] регуляризации расходящихся интегралов.

Итак, получена

Теорема 2. Пусть $\Gamma \in \mathfrak{S}$ имеет порядок $\varkappa$, $[\varkappa] = k$, и $f(t) \in H_{\nu}^{\infty}(\Gamma)$ с любым положительным показателем ν . Тогда обобщенный интеграл типа Коши $\Phi_*(z)$ существует и обладает следующими свойствами:

- а) эта функция голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и исчезает в бесконечно удаленной точке;
- б) в каждой внутренней точке t дуги Γ она имеет передельные значения с обеих сторон, связанные соотношением (5);
- с) вблизи концов 0 и 1 справедливы асимптотические оценки

$$\begin{aligned} \Phi_*(z) = & -\frac{f(0)}{2\pi i} \ln |z| + \sum_{m+n \leq k} a_{m,n} \sum_{\iota=1}^{\infty} \phi_{\iota,m,n}(z) + O(1), \\ \Phi_*(z) = & \frac{f(1)}{2\pi i} \ln |z - 1| + O(1) \end{aligned}$$

соответственно.

Легко видеть, что эта теорема справедлива для всего класса $\mathfrak{S}$, т.е. введенное при ее доказательстве дополнительное условие убывания $\theta(r)$ на всем отрезке $(0, 1]$ может быть опущено.

Основное аналитическое отличие спиралей от зигзагов состоит в появлении в асимптотике суммы $\sum_{m+n \leq k} a_{m,n} \sum_{\iota=1}^{\infty} \phi_{\iota,m,n}(z)$. Сохраним за этой суммой обозначение $\Phi_2(z)$. Положим

$$\varrho_n(r) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=\iota} r_{\sigma}^{2n} \text{ при } r_{\iota+1} < r < r_{\iota} \text{ и } \varrho(r) = 0 \text{ при } r > 1. \text{ Очевидно, } \sum_{\iota=1}^{\infty} \phi_{\iota,m,n}(z) = z^{m-n} \varrho_n(|z|)$$

при $r_{l+1} < |z| < r_l$, т. е.

$$\Phi_2(z) = \sum_{m+n \leq k} a_{m,n} \varrho_n(|z|) z^{m-n}, \quad r_{l+1} < |z| < r_l, \quad a_{m,n} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} F}{\partial z^m \partial \bar{z}^n}(0).$$

Появление этой суммы существенно меняет картину разрешимости однородной задачи Римана. Мы видели, что на зигзагах, как и на кусочно-гладких дугах число ее линейно независимых решений зависит лишь от коэффициента $G(t)$ и всегда конечно. Изменение асимптотики интеграла типа Коши приводит к тому, что это число существенно зависит от контура Γ и может оказаться бесконечным.

Будем относить заданную в окрестности отрезка $I = [0, 1]$ функцию f к классу $\mathcal{H}^\infty$, если f в этой окрестности удовлетворяет условию Гёльдера, а в окрестности точки 0 совпадает с некоторой функцией $F(x, y)$, имеющей частные производные всех порядков. Ясно, что класс всех сужений таких функций на спираль Γ , лежащую в этой окрестности отрезка I , совпадает с $\bigcup_{(0,1]} H_\nu^\infty(\Gamma)$.

Теорема 3. *Существует функция $f \in \mathcal{H}^\infty$, обладающая следующим свойством: для любого целого n , $0 \leq n \leq +\infty$, существует спираль, на которой задача, приведенная выше, с коэффициентом $G(t) = \exp f(t)$ имеет n линейно независимых решений.*

Доказательство. Зафиксируем функцию $f \in \mathcal{H}^\infty$ такую, что в окрестности нуля она совпадает с функцией $F(x, y)$ такой, что $\frac{\partial^{m+n} F}{\partial z^m \partial \bar{z}^n}(0) = 0$ при $m \neq n$, $m + n \leq k$, а производные $\frac{\partial^{2m} F}{\partial z^m \partial \bar{z}^m}(0)$ действительны и отрицательны при $2m \leq k$. В качестве Γ возьмем спираль, совпадающую со спиралью из предыдущего примера в малой окрестности нуля. Тогда из полученной выше асимптотической оценки следует, что функция $\Phi_s(z) := z^{-s} \exp \Phi_*(z)$ голоморфна в точке нуля при любом натуральном s . Это доказывает теорему для $n = +\infty$. Чтобы доказать ее для конечных значений n , достаточно рассмотреть спирали, задаваемые вблизи нуля уравнениями вида $z = r \exp ic \ln r$, $r > 0$, при различных действительных c .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, зигзаги и спирали отличны по своим аналитическим свойствам настолько, что эти отличия индуцируют существенные различия в картинах разрешимости краевых задач Римана на дугах этих двух классов.

Сделаем несколько замечаний.

Во-первых, результаты последнего пункта сохраняют справедливость для функций F , имеющих в окрестности нуля производные не всех порядков, а лишь достаточно высокого порядка, определяемого порядком рассматриваемой спирали.

Далее, в класс рассматриваемых спиралей можно включить дуги Γ , концы которых можно соединить гладкой дугой Λ так, чтобы объединение $\Gamma \cup \Lambda$ состояло из границ счетного семейства последовательно вложенных друг в друга областей, сгущающихся к началу Γ . Таким образом, различие между зигзагами и спиралями — это прежде всего топологическое различие кривых $\Gamma \cup \Lambda$, где Λ — гладкая дуга.

При исследовании интегралов вблизи нуля можно заменить верхнюю метрическую размерность показателями Марцинкевича, введенными недавно Д.Б. Кацем [12].

Полученные здесь асимптотические оценки обобщенных интегралов типа Коши по спиралям оставляют большой простор для дальнейшего развития исследований. Существуют возможности для изучения спиралей со сверхстепенными порядками закручивания, с бесконечным числом точек изменения направления кручения, задач с особенностями в фокусе

спирали. Собственно, даже довольно простая задача с бесконечным индексом, описанная в доказательстве последней теоремы, изучена далеко не в полной мере. Отдельное направление могут составить неоднородные задачи на негладких дугах различных типов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Наука, М., 1977).
- [2] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1962).
- [3] Lu Jian-Ke. *Boundary value problems for analytic functions* (World Scientific, 1993).
- [4] Маркушевич А.И. *Избранные главы теории аналитических функций* (Наука, М., 1976).
- [5] Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* (Мир, М., 1973).
- [6] Кац Б.А. *Задача Римана на замкнутой жордановой кривой*, Изв. вузов. Матем., № 4, 68–80 (1983).
- [7] Harrison J., Norton A. *Geometric integration on fractal curves in the plane*, Indiana Univ. Math. J. **40** (2), 567–594 (1991).
- [8] Kats B.A. *The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions*, Complex Var. Elliptic Equat. **59** (8), 1053–1069 (2014).
- [9] Falconer K.J. *Fractal geometry*, 3rd edition (Wiley and Sons, 2014).
- [10] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции* (Наука, М., 1988).
- [11] Hadamard J.S. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations* (Yale Univ. Press, Oxford Univ. Press 1923, Reprint Dover 2003).
- [12] Katz D.B. *Local and weighted Marcinkiewicz exponents with applications*. J. Math. Anal. Appl. **440** (1), 74–85 (2016).

Борис Александрович Кац

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: katsboris877@gmail.com

B.A. Kats

Zigzag-like and spiral-like arcs in boundary-value problems

Abstract. In the paper we are dealing with curvilinear integrals over non-smooth paths with application in boundary-value problems. We show that geometry of end-points of the path is of importance for solvability of homogeneous Riemann boundary-value problem on this arc. On a zigzag-like path the numbers of solutions and conditions of solvability are the same as for smooth arcs, but for spiral-like paths these numbers can vary.

Keywords: non-smooth path, curvilinear integral, Cauchy type integral, Riemann boundary-value problem.

Boris Aleksandrovich Kats

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: katsboris877@gmail.com