Общероссийский математический портал

Э. В. Скворцов, Т. В. Никоненкова, Двойные несобственные интегралы с логарифмическим ядром, вычисляемые методами теории упругости, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 7, 65–71

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-7-65-71>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 11:40:56

Э.В. СКВОРЦОВ, Т.В. НИКОНЕНКОВА

ДВОЙНЫЕ НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ, ВЫЧИСЛЯЕМЫЕ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Аннотация. Целью работы является вычисление нескольких двойных несобственных интегралов. Рассматривается плоская деформация упругого полупространства под действием усилий на его поверхности. Выписаны известные выражения для одного из нормальных напряжений. Оно представлено также в иной форме, содержащей тройной определенный несобственный интеграл с логарифмическим ядром. Это позволяет упростить указанный интеграл. Даны примеры вычисления тройного интеграла при конкретных усилиях. В результате пять двойных несобственных интегралов выражены через элементарные функции.

Ключевые слова: двойной несобственный интеграл, краевая задача, уравнение Пуассона.

УДК: 517.382: 539.3

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-7-65-71

ВВЕДЕНИЕ

При решении тех или иных задач прикладной математики в предметных физических областях иногда имеется возможность, используя аппарат математической физики, представить результат решения задачи в двух различных эквивалентных формах. Приравнивание таких форм одна к другой может привести к упрощению возникающих в процессе решения определенных интегралов. Такой прием, в частности, позволил выразить определенный интеграл с ядром, содержащим функцию ошибок, через элементарные функции [1]. Целью данной работы является вычисление нескольких определенных двойных несобственных интегралов с логарифмическим ядром. Они возникают при анализе решения двух классических задач теории упругости. Рассматривается плоская деформация упругого полупространства под действием либо нормальных, либо касательных усилий на его поверхности. Выписаны известные выражения для одного из нормальных напряжений. Показано, что это напряжение является решением первой краевой задачи для уравнения Пуассона в полуплоскости. Представление напряжения в двух формах и их сопоставление позволяют найти в элементарных функциях значения пяти двойных несобственных интегралов с логарифмическим ядром, отсутствующие в известных справочных руководствах.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние упругого полупространства в условиях плоской деформации под действием произвольного усилия на его поверхности.

Декартовы координаты x и z полупространства удовлетворяют условиям $-\infty < x < \infty$, $0 \leq z < \infty$.

Компоненты напряжений σ_x , σ_z и τ_{xz} удовлетворяют условиям равновесия ([2], с. 22)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

деформации ε_x , ε_z и γ_{xz} удовлетворяют уравнению совместности ([2], с. 23)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \quad (2)$$

а связывающий напряжения и деформации закон Гука записывается в виде ([2], с. 23)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_z], \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)\sigma_z - \nu(1 + \nu)\sigma_x], \\ \gamma_{xz} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xz}, \end{aligned} \quad (3)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

Пусть на границе $z = 0$ полупространства приложены либо нормальная нагрузка

$$\sigma_z(x, 0) = \begin{cases} -\Pi(x), & -b \leq x \leq a; \\ 0, & -\infty < x < -b, \quad a < x < \infty, \end{cases} \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (4)$$

либо касательное усилие

$$\tau_{xz}(x, 0) = \begin{cases} -Q(x), & -b \leq x \leq a; \\ 0, & -\infty < x < -b, \quad a < x < \infty, \end{cases} \quad \sigma_z(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (5)$$

где Π , Q — заданные функции.

Решения задач определения компонент напряжений σ_x , σ_z , τ_{xz} , удовлетворяющих уравнениям (1)–(3) при граничных условиях (4) либо (5), известны. Сводка основных результатов приведена в ([2] с. 30). Пусть

$$J(x, z) = \sigma_x + \sigma_z, \quad (6)$$

$$h(x, \zeta, z) = (x - \zeta)^2 + z^2. \quad (7)$$

Тогда при граничном условии (4)

$$\sigma_z(x, z) = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{\Pi(\zeta) d\zeta}{h^2(x, \zeta, z)}, \quad (8)$$

$$J(x, z) = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{\Pi(\zeta) d\zeta}{h(x, \zeta, z)}, \quad (9)$$

при граничном условии (5)

$$\sigma_z(x, z) = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{Q(\zeta)(x - \zeta) d\zeta}{h^2(x, \zeta, z)}, \quad (10)$$

$$J(x, z) = -\frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{Q(\zeta)(x - \zeta) d\zeta}{h(x, \zeta, z)}. \quad (11)$$

В дальнейшем рассматриваются лишь такие нагрузки Π , Q , при которых интегралы (8), (10), а также (9), (11), сходятся. Предполагается также, что интегралы (9), (11) допускают двукратное дифференцирование по x .

Используя результаты работы [3], получим теперь иные представления величины σ_z , нежели формулами (8), (10).

Из уравнения (1) вытекает

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}, \quad (12)$$

а из формул (6), (12) следует

$$\Delta \sigma_z - \frac{\partial^2 J(x, z)}{\partial x^2} = 0. \quad (13)$$

В случае приложения нагрузки (4) при $z = 0$ выполняется граничное условие

$$\sigma_z(x, 0) = \begin{cases} -\Pi(x), & -b \leq x \leq a; \\ 0, & -\infty < x < -b, \quad a < x < \infty. \end{cases} \quad (14)$$

Таким образом, определение функции σ_z сводится к решению первой краевой задачи (13), (14) для уравнения Пуассона в полуплоскости. Здесь J определяется равенством (9). Решение задачи (13), (14) имеет вид ([4] с. 425)

$$\sigma_z(x, z) = -\frac{z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{\Pi(\zeta) d\zeta}{h(x, \zeta, z)} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial^2 J(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} F(x, \xi, z, \eta) d\xi d\eta. \quad (15)$$

Здесь

$$F(x, \xi, z, \eta) = \ln \frac{(x - \xi)^2 + (z - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (z + \eta)^2}. \quad (16)$$

Из формул (9), (15), (16) найдем

$$\sigma_z(x, z) = -\frac{z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{\Pi(\zeta) d\zeta}{h(x, \zeta, z)} + \frac{1}{\pi^2} I_1(x, z), \quad (17)$$

где

$$I_1(x, z) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-b}^a \frac{\eta \Pi(\zeta) [3(\xi - \zeta)^2 - \eta^2] d\zeta}{h^3(\xi, \zeta, \eta)} F(x, \xi, z, \eta) d\xi d\eta. \quad (18)$$

Сопоставление представлений (8) и (17) позволяет свести интеграл (18) к виду

$$I_1(x, z) = \pi z \int_{-b}^a \frac{\Pi(\zeta) [(x - \zeta)^2 - z^2] d\zeta}{h^2(x, \zeta, z)}. \quad (19)$$

В случае, когда задано граничное условие (5), и, следовательно,

$$\sigma_z(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty,$$

воспроизводя выполненные выше рассуждения с учетом формул (10), (11), найдем

$$\sigma_z(x, z) = -\frac{1}{\pi^2} I_2(x, z),$$

где

$$I_2(x, z) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-b}^a \frac{Q(\zeta)(\xi - \zeta)[3\eta^2 - (\xi - \zeta)^2] d\zeta}{h^3(\xi, \zeta, \eta)} F(x, \xi, z, \eta) d\xi d\eta, \quad (20)$$

причем интеграл (20) можно привести к виду

$$I_2(x, z) = 2\pi z^2 \int_{-b}^a \frac{Q(\zeta)(x - \zeta) d\zeta}{h^2(x, \zeta, z)}. \quad (21)$$

Необходимо отметить, что формула (15) имеет смысл лишь при условии, что второе слагаемое в правой части — сходящийся интеграл. В нижеследующих примерах соответствующие исследования проводятся.

2. ПРИМЕРЫ

Остановимся сначала на некоторых частных случаях задачи о нормальной нагрузке.

1. При $\Pi(x) = \Pi_0 \delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция, а Π_0 здесь и всюду ниже — постоянная, согласно формулам (8), (9), (19) имеем

$$\sigma_z(x, z) = -\frac{2\Pi_0 z^3}{\pi(x^2 + z^2)^2}, \quad J(x, z) = -\frac{2\Pi_0 z}{\pi(x^2 + z^2)}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = -\frac{4\Pi_0 z(3x^2 - z^2)}{\pi(x^2 + z^2)^3},$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\eta(3\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 + \eta^2)^3} F(x, \xi, z, \eta) d\xi d\eta = \frac{\pi z(x^2 - z^2)}{(x^2 + z^2)^2} \quad [x^2 + z^2 \neq 0]. \quad (22)$$

Для исследования сходимости интеграла в (22) сначала рассмотрим в полярных координатах $\xi = x + \rho \cos \varphi$, $\eta = z + \rho \sin \varphi$ при $x \neq 0$, $z > 0$ интеграл

$$G_1(r, x, z) = \int_0^\pi \int_0^r g_1(x, z, \rho, \varphi) \rho \ln g_2(z, \rho, \varphi) d\rho d\varphi,$$

где $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$,

$$g_1(x, z, \rho, \varphi) = \frac{(z + \rho \sin \varphi)[3(x + \rho \cos \varphi)^2 - (z + \rho \sin \varphi)^2]}{[(x + \rho \cos \varphi)^2 + (z + \rho \sin \varphi)^2]^3},$$

$$g_2(z, \rho, \varphi) = \frac{\rho^2}{\rho^2 \cos^2 \varphi + (2z + \rho \sin \varphi)^2}$$

Получим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} g_1(\rho) = \frac{z(3x^2 - z^2)}{(x^2 + z^2)^3}, \quad \rho \ln g_2(\rho) \leq \rho \ln \left(1 + \frac{2z}{\rho}\right)^2, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln \left(1 + \frac{2z}{\rho}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow 0} G_1(r, x, z) = 0.$$

Отметим, что в нижеследующих примерах (см. п.п. 2–5) сходимость соответствующих интегралов доказывается аналогично описанному выше.

Переходя к полярным координатам $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$, рассмотрим теперь интеграл

$$G_2(R, x, z) = \int_0^\infty \int_R^\infty g_3(x, z, \rho, \varphi) F(x, z, \rho, \varphi) d\rho d\varphi,$$

где $R > (x^2 + z^2)^{1/2}$,

$$g_3(x, z, \rho, \varphi) = \frac{\sin \varphi (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{\rho^2},$$

$$F(x, z, \rho, \varphi) = \ln \frac{x^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho(x \cos \varphi + z \sin \varphi)}{x^2 + z^2 + \rho^2 - 2\rho(x \cos \varphi - z \sin \varphi)}.$$

Так как $\lim_{\rho \rightarrow \infty} F(x, z, \rho, \varphi) = 0$, интеграл в (22) сходится.

2. При

$$\Pi(x) = \begin{cases} \Pi_0, & 0 \leq x \leq \infty; \\ 0, & -\infty < x < 0, \end{cases}$$

$$\sigma_z(x, z) = -\frac{\Pi_0}{\pi} \left(\frac{xz}{x^2 + z^2} + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{z} \right), \quad J(x, z) = -\frac{\Pi_0}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{z} \right), \quad \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \frac{4\Pi_0 xz}{\pi(x^2 + z^2)^2},$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\xi \eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} F(x, \xi, z, \eta) d\xi d\eta = \frac{\pi x z}{x^2 + z^2} \quad [x^2 + z^2 \neq 0]. \quad (23)$$

Для исследования сходимости интеграла в (23) рассмотрим интеграл

$$S(R, x, z) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{\sin 2\varphi F(x, z, \rho, \varphi)}{\rho} d\rho d\varphi.$$

Так как

$$F(x, z, \rho, \varphi) = -\frac{4z \sin \varphi}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right),$$

$$S(R, x, z) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_R^\infty \sin 2\varphi \left[-\frac{4z \sin \varphi}{\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right) \right] d\rho d\varphi,$$

и интеграл в (23) сходится.

3. При

$$\Pi(x) = \begin{cases} \Pi_0, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

$$\sigma_z(x, z) = -\frac{\Pi_0 z}{\pi} \left[\frac{x+1}{(x+1)^2 + z^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2 + z^2} - \frac{1}{z} \left(\arctg \frac{x-1}{z} - \arctg \frac{x+1}{z} \right) \right],$$

$$J(x, z) = -\frac{2\Pi_0}{x} \left(\arctg \frac{x+1}{z} - \arctg \frac{x-1}{z} \right),$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = -\frac{4\Pi_0 z}{\pi} \left\{ \frac{x-1}{[(x-1)^2 + z^2]^2} - \frac{x+1}{[(x+1)^2 + z^2]^2} \right\},$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta \left\{ \frac{\xi-1}{[(\xi-1)^2 + \eta^2]^2} - \frac{\xi+1}{[(\xi+1)^2 + \eta^2]^2} \right\} F(x, \xi, z, \eta) d\xi d\eta =$$

$$= \pi z \left[\frac{x-1}{(x-1)^2 + z^2} - \frac{x+1}{(x+1)^2 + z^2} \right] \quad [(x-1)^2 + z^2 \neq 0, (x+1)^2 + z^2 \neq 0]. \quad (24)$$

Для исследования сходимости интеграла в (24) рассмотрим интеграл

$$T(R, x, z) = \int_0^\pi \int_R^\infty \rho^2 T_1(\rho, \varphi) F(x, z, \rho, \varphi) d\rho d\varphi,$$

где

$$T_1(\rho, \varphi) = \sin \varphi \left[\frac{\rho \cos \varphi - 1}{(\rho^2 - 2\rho \cos \varphi + 1)^2} - \frac{\rho \cos \varphi + 1}{(\rho^2 + 2\rho \cos \varphi + 1)^2} \right].$$

Так как

$$\rho^2 T_1(\rho, \varphi) = -\frac{2 \sin \varphi}{\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right),$$

интеграл в (24) сходится.

Два последующих примера относятся к задаче о касательном усилии.

4. При $Q(x) = Q_0 \delta(x)$, $Q_0 = \text{const}$, имеем

$$\sigma_z(x, z) = -\frac{2Q_0 x z^2}{\pi(x^2 + z^2)^2}, \quad J(x, z) = -\frac{2Q_0 x}{\pi(x^2 + z^2)}, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \frac{4Q_0 x(3z^2 - x^2)}{\pi(x^2 + z^2)^3},$$

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\eta(3\eta^2 - \xi^2)}{(\xi^2 + \eta^2)^3} F(x, \xi, z, \eta) d\xi d\eta = \frac{2\pi x z^2}{(x^2 + z^2)^2} \quad [x^2 + z^2 \neq 0]. \quad (25)$$

Сходимость интеграла в (25) устанавливается аналогично сходимости интеграла в (22).

5. При

$$Q(x) = \begin{cases} Q_0, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

$Q_0 = \text{const}$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, z) &= -\frac{Q_0 z^2}{\pi} \left[\frac{1}{(x+1)^2 + z^2} - \frac{1}{(x-1)^2 + z^2} \right], \quad J(x, z) = -\frac{Q_0}{\pi} \ln \frac{(x-1)^2 + z^2}{(x+1)^2 + z^2}, \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} &= -\frac{2Q_0}{\pi} \left\{ \frac{z^2 - (x-1)^2}{[z^2 + (x-1)^2]^2} - \frac{z^2 - (x+1)^2}{[z^2 + (x+1)^2]^2} \right\}, \\ \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty &\left\{ \frac{\eta^2 - (\xi-1)^2}{[(\xi-1)^2 + \eta^2]^2} - \frac{\eta^2 - (\xi+1)^2}{[(\xi+1)^2 + \eta^2]^2} \right\} F(x, \xi, z, \eta) d\xi d\eta = \\ &= 2\pi z^2 \left[\frac{1}{(x-1)^2 + z^2} - \frac{1}{(x+1)^2 + z^2} \right] \quad [(x-1)^2 + z^2 \neq 0, (x+1)^2 + z^2 \neq 0]. \quad (26) \end{aligned}$$

Сходимость интеграла в (26) устанавливается аналогично сходимости интеграла в (24).

Авторы выражают глубокую признательность М.М. Карчевскому за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kosterin A.V., Skvortsov E.V. *Analytical formula for integral whose kernel containing error function*, Lobachevskii J. Math. **37** (3), 266–267 (2016).
- [2] Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия* (Мир, М., 1989).
- [3] Костерин А.В., Скворцов Э.В. *Фильтрационная консолидация при плоской деформации упругого пространства*, Изв. РАН. Механ. жидкости и газа, № 2, 99–104 (2018).
- [4] Полянин А.Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики* (Физматлит, М., 2001).

Эдуард Викторович Скворцов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: eduard.scvortsov@mail.ru

Татьяна Владимировна Никоненкова

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: nikonentv@gmail.com

E.V.Skvortsov and T.V.Nikonenkova

Improper double integrals with a logarithmic kernel calculated by methods of elasticity theory

Abstract. The aim of this paper is to calculate some improper double integrals. We consider the plane deformation of an elastic half-space under the action of load applied to its surface. It is shown that a well-known expressions for one of the normal stresses can be represented in another form containing a definite improper triple integral with a logarithmic kernel. We give examples of calculating the triple integral for specific loads. As a result, five improper double integrals are expressed in terms of elementary functions.

Keywords: improper double integral, boundary-value problem, Poisson equation.

Eduard Viktorovich Skvortsov

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
e-mail: eduard.scvortsov@mail.ru*

Tat'yana Vladimirovna Nikonenkova

*Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
e-mail: nikonentv@gmail.com*