Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. М. Чудинов, В. В. Малыгина, Признаки осцилляции решений дифференциальных уравнений первого порядка с последействием, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 7, 72–85

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-7-72-85>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:43:18

К.М. ЧУДИНОВ, В.В. МАЛЫГИНА

ПРИЗНАКИ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Аннотация. Для линейных дифференциальных уравнений первого порядка с последствием установлено несколько новых эффективных условий осцилляции решений. Развита новая методика получения признаков осцилляции в виде верхнего предела функции от параметров уравнения. Методика применена к уравнениям с одним и несколькими сосредоточенными запаздываниями и с распределенным запаздыванием. Показаны преимущества новых результатов перед известными.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, последствие, осцилляция, эффективный признак, несколько запаздываний, распределенное запаздывание, итерационный подход.

УДК: 517.929

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-7-72-85

ВВЕДЕНИЕ

Появление осциллирующих решений у линейных уравнений первого порядка — одно из качественных отличий уравнений с последствием от обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. С середины XX века систематически разрабатываются методы исследования, позволяющие отделять осциллирующие решения уравнений с последствием от знакопостоянных. Первые признаки осцилляции были получены для простейших уравнений с последствием. С усложнением объекта получение признаков осцилляции также становилось более сложной задачей. Право на обобщение получали признаки, которые удовлетворяли ряду требований, среди которых эффективная проверяемость, простота и точность.

Данная статья посвящена семейству признаков осцилляции, ведущих родословную от результатов, полученных в 70-х гг. прошлого века в работах [2], [3]. Приведем обобщаемый далее результат в виде, предложенном в монографии [4].

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + p(t)x(h(t)) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где функции p и h непрерывны, $p(t) \geq 0$, $h(t) \leq t$ для всех $t \geq 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$.

Теорема 1. Пусть функция h монотонно возрастает и

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{h(t)}^t p(s) ds > 1.$$

Поступила в редакцию 15.05.2018, после доработки 15.05.2018. Принята к публикации 20.06.2018

Благодарности. Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 1.5336.2017/8.9) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Тогда все решения уравнения (1) осциллируют.

Доказательство проводится просто и представляет собой довольно грубую интегральную оценку коэффициента p , справедливости которой достаточно для осцилляции. Вскоре появились уточнения и обобщения этого результата. Мы рассмотрим идеи, которые считаем наиболее плодотворными. Основным результатом работы является использование основной идеи работы [5], для того, чтобы усилить известные достаточные условия осцилляции всех решений уравнений с последствиями различных видов.

В первом разделе статьи рассматриваются возможности уточнения теоремы 1, во втором — уравнение с несколькими запаздываниями, для которого приводятся несколько известных и новых результатов и их сравнения между собой. В третьем разделе получены условия осцилляции решений уравнения с распределенным запаздыванием. Этот результат применяется к интегро-дифференциальному уравнению и также сопоставляется с известными результатами.

1. Пути уточнения теоремы 1

Выясним, какие имеются возможности ослабить условия осцилляции из теоремы 1.

В работе [3] показано, что константа в правой части неравенства не может быть уменьшена. Более того, нетрудно, модифицировав рассуждение из [3], показать, что строгое неравенство нельзя заменить нестрогим.

Требование монотонности функции h в теореме 1 является существенным. Более того, в работе [6] показано, что если функция h не предполагается монотонной, то не существует такой положительной константы A , что неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{h(t)}^t p(s) ds > A$$

влечет осцилляцию всех решений уравнения (1). Тем не менее, требование монотонности запаздывания можно ослабить, используя функции, построенные на основе функции h .

Обозначим $g(t) = \sup_{s \leq t} h(s)$. Очевидно, что функция g монотонно возрастает и $g(t) \geq h(t)$ для всех t .

Теорема 2. Пусть

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t p(s) ds > 1. \quad (2)$$

Тогда все решения уравнения (1) осциллируют.

Теорема 1 является следствием теоремы 2, поскольку если функция h монотонно возрастает, то $g(t) \equiv h(t)$. Теорема 2, в свою очередь, уточняется увеличением подинтегрального выражения.

Теорема 3 ([7], [6]). Пусть

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t p(s) \exp \left\{ \int_{h(s)}^{g(t)} p(\tau) d\tau \right\} ds > 1. \quad (3)$$

Тогда все решения уравнения (1) осциллируют.

Далее уравнение (1) рассматривается в следующих предположениях: функция p локально суммируема, функция h измерима по Лебегу и $h(t) \leq t$ для почти всех (п. в.) $t \geq 0$. Решением уравнения (1) называется локально абсолютно-непрерывная функция $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которой существует начальная функция $\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для п. в. $t \geq 0$ справедливо равенство (1), где $x(\xi) = \varphi(\xi)$ для $\xi \leq 0$. Для любой ограниченной функции φ , измеримой по Борелю, существует единственное решение уравнения (1) ([8], гл. 5).

Уравнение, все решения которого осциллируют, будем называть *осциллирующим*.

Все дальнейшие результаты рассматриваются в предположении, что $p(t) \geq 0$ при п. в. $t \geq 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$. Положим $g(t) = \operatorname{ess\,sup}_{s \leq t} h(s)$.

Неравенство (3) можно уточнять далее. В работе [9] была предложена идея замены функции $\exp \int_{h(s)}^{g(t)} p(\tau) d\tau$ бóльшими функциями, получаемыми с помощью рекуррентного соотношения. В более общем случае идея реализована в работе [10], причем для уравнения с несколькими запаздываниями.

По отношению к уравнению (1) результат выглядит следующим образом. Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Положим

$$a_0(t, s) = 1; \quad a_{k+1}(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t p(\tau) a_k(\tau, h(\tau)) d\tau \right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (4)$$

Теорема 4 ([10]). Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t p(s) a_k(g(t), h(s)) ds > 1. \quad (5)$$

Тогда уравнение (1) является осциллирующим.

Рассмотрим еще один недавний подход к уточнению теоремы 2.

Обозначим $H(t) = \{s \mid h(s) \leq t \leq s\}$.

Теорема 5 ([5]). Пусть

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{H(t)} p(s) ds > 1.$$

Тогда уравнение (1) является осциллирующим.

Доказательство теоремы 5 почти столь же просто, как доказательство теоремы 2. В случае монотонной функции h эти теоремы равносильны, в противном случае теорема 5 всегда дает большее значение интеграла в левой части неравенства, чем теорема 2. Более того, теорема 5 может работать в некоторых ситуациях, когда не работает теорема 3.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (1), где

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t \in [2n, 2n+1); \\ \frac{5}{9}, & t \in [2n+1, 2n+2), \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} 2n, & t \in [2n, 2n+1); \\ 2n-1, & t \in [2n+1, 2n+2), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

По теореме 5 такое уравнение является осциллирующим. Действительно, поскольку $H(2n+1) = [2n+1, 2n+2) \cup [2n+3, 2n+4)$, имеем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{H(t)} p(s) ds \geq \int_{H(2n+1)} p(s) ds = \int_{2n+1}^{2n+2} \frac{5}{9} ds + \int_{2n+3}^{2n+4} \frac{5}{9} ds = \frac{10}{9} > 1.$$

Однако теорема 3 не позволяет установить осцилляцию. Действительно, для $t \in [2n, 2n+2)$, $n \in \mathbb{N}_0$, имеем $g(t) = 2n$. Отсюда

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t p(s) \exp \left\{ \int_{h(s)}^{g(t)} p(\tau) d\tau \right\} ds &= \int_{2n}^{2n+2} p(s) \exp \left\{ \int_{h(s)}^{2n} p(\tau) d\tau \right\} ds = \\ &= \int_{2n+1}^{2n+2} \frac{5}{9} \exp \left\{ \int_{2n-1}^{2n} \frac{5}{9} d\tau \right\} ds = \frac{5 \exp \frac{5}{9}}{9} < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема 3, которая является первой итерацией теоремы 4, не сильнее теоремы 5. Однако последующие итерации могут компенсировать недостаток. В следующем разделе получим результат, объединяющий в себе достоинства теорем 4 и 5.

2. УРАВНЕНИЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

2.1. *Несколько известных результатов.* Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^m p_i(t)x(h_i(t)) = 0, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где для $i = \overline{1, m}$ функции p_i локально суммируемы, функции h_i измеримы по Лебегу и $h_i(t) \leq t$ для п.в. $t \geq 0$. Для любой ограниченной борелевской начальной функции существует единственное решение уравнения (6), определение которого дословно повторяет определение решения уравнения (1).

Везде ниже полагаем, что $p_i(t) \geq 0$ и $\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow +\infty} h_i(t) = +\infty$, $i = \overline{1, m}$. Положим $g_i(t) = \operatorname{ess} \sup_{s \leq t} h_i(s)$, $g(t) = \max_i g_i(t)$.

Нетрудно установить следующее обобщение теоремы 2.

Теорема 6 ([11], с. 44). *Пусть*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t \sum_{i=1}^m p_i(s) ds > 1.$$

Тогда уравнение (6) является осциллирующим.

Очевидной слабостью этого условия осцилляции является то, что значение интеграла не увеличивается при уменьшении значений $h_i(t)$ с сохранением $g(t)$, хотя в наибольшей степени обуславливают появление осцилляции уравнения (6) именно слагаемые с относительно большими разностями $t - h_i(t)$. В частности, при добавлении в уравнение слагаемого без запаздывания теорема 6 полностью теряет силу.

Представляется естественным следующее обобщение неравенства (2) для уравнения (6):

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_{g_i(t)}^t p_i(s) ds > 1. \quad (7)$$

Однако приведенный в работе [5] пример показывает, что неравенство (7) не влечет осцилляцию уравнения (6). С другой стороны, применяя рассуждения из работы [6], получаем следующее уточнение теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t \sum_{i=1}^m p_i(s) \exp \int_{h_i(s)}^{g(t)} \sum_{l=1}^m p_l(u) du ds > 1. \quad (8)$$

Тогда уравнение (6) является осциллирующим.

Теорема 7 является обобщением теоремы 3 для уравнения (6).

Левую часть неравенства (8) можно увеличивать далее, уточняя условие осцилляции. Положим

$$a_0(t, s) = 1; \quad a_{k+1}(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t \sum_{i=1}^m p_i(\tau) a_k(\tau, h_i(\tau)) d\tau \right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (9)$$

Теорема 8 ([10]). Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t \sum_{i=1}^m p_i(s) a_k(g(t), h_i(s)) ds > 1. \quad (10)$$

Тогда уравнение (6) является осциллирующим.

Применяя теорему 8 к уравнению (1), получаем теорему 4, а в случае $k = 1$ теорема 8 дает теорему 7. О некоторых недавних попытках усиления теоремы 8 см. в подразделе 2.3.

Рассмотрим другой подход. Для $i = \overline{1, m}$ обозначим

$$H_i(t) = \{s \mid h_i(s) \leq t \leq s\}. \quad (11)$$

Теорема 9 ([5]). Пусть

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_{H_i(t)} p(s) ds > 1.$$

Тогда уравнение (6) является осциллирующим.

Обратим внимание: для осцилляции уравнения (6) недостаточно выполнения условия (7), но замена интегрирования по отрезкам $[g_i(t), t]$ интегрированием по множествам $H_i(t)$ приводит к обобщению теоремы 5 теоремой 9, где каждый из коэффициентов p_i интегрируется по своему множеству.

Пример 1 показывает, что теорема 5 может работать в некоторых ситуациях, когда не работает теорема 3. В силу вышесказанного переход к нескольким запаздываниям усиливает эффект. Это наводит на мысль о возможности объединения достоинств теорем 8 и 9 в одном утверждении.

2.2. Новые результаты. Используем последовательность функций $\{a_k\}$, определенную формулами (9), и семейство множеств $\{H_i\}$, определенных формулой (11).

Лемма 1 ([10]). Пусть x является положительным решением уравнения (6). Тогда для всех $k \in \mathbb{N}_0$, $s, t \in \mathbb{R}$, $0 \leq s \leq t$ имеем $x(t) a_k(t, s) \leq x(s)$.

Теорема 10. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_{H_i(t)} p_i(s) a_k(t, h_i(s)) ds > 1.$$

Тогда уравнение (6) является осциллирующим.

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены, но решение x уравнения (6) не осциллирует. Без ограничения общности полагаем, что найдется такое $t_0 \geq 0$, что $x(t) > 0$ для всех $t \geq t_0$. Поскольку $\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow +\infty} h_i(t) = +\infty$, найдется такое $t_1 \geq t_0$, что $h_i(t) \geq t_0$ для $i = \overline{1, m}$ и п. в. $t \geq t_0$. Имеем $\dot{x}(t) \leq 0$ для п. в. $t \geq t_1$. Следовательно, найдется $t_2 \geq t_1$ такое, что $x(h_i(t)) \geq x(t)$ для всех $t \geq t_2$ и $i = \overline{1, m}$, при этом

$$\sum_{i=1}^m \int_{H_i(t_2)} p_i(s) a_k(t_2, h_i(s)) ds > 1.$$

Наконец, найдется также $t_3 \geq t_2$ такое, что

$$\sum_{i=1}^m \int_{S_i} p_i(s) a_k(t_2, h_i(s)) ds > 1,$$

где $S_i = H_i(t_2) \cap [t_2, t_3]$. Таким образом, в силу (6) и леммы 1

$$\begin{aligned} x(t_3) &= x(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} \dot{x}(s) ds = x(t_2) - \int_{t_2}^{t_3} \sum_{i=1}^m p_i(s)x(h_i(s)) ds \leq \\ &\leq x(t_2) - \sum_{i=1}^m \int_{S_i} p_i(s)x(h_i(s)) ds \leq x(t_2) - \sum_{i=1}^m \int_{S_i} p_i(s)x(t_2)a_k(t_2, h_i(s)) ds = \\ &= x(t_2) \left(1 - \sum_{i=1}^m \int_{S_i} p_i(s)a_k(t_2, h_i(s)) ds \right) < 0, \end{aligned}$$

что противоречит предположению. $\square$

Теорема 8 вытекает из теоремы 10. Действительно, для $i = \overline{1, m}$ и п.в. $t \geq 0$ имеем $[g(t), t] \subset H_i(g(t))$. Следовательно, если выполнено условие (10), то выполнено и условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_{H_i(g(t))} p_i(s)a_k(g(t), h_i(s)) ds > 1.$$

Остается заметить, что $g(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Фиксируя $k = 1$, получаем

Следствие 1. Пусть

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_{H_i(t)} p_i(s) \exp \int_{h_i(s)}^t \sum_{l=1}^m p_l(\tau) d\tau ds > 1.$$

Тогда уравнение (6) является осциллирующим.

Поскольку теорема 8 вытекает из теоремы 10, то теорема 7 вытекает из следствия 1. С другой стороны, пример 1 показывает, что даже среди уравнений вида (1) существуют такие, осцилляция которых устанавливается следствием 1, но не может быть установлена теоремой 7. Для уравнения (6) можно сказать больше: следующий пример показывает, что следствие 1 эффективнее теоремы 7 даже в случае постоянных коэффициентов и запаздываний.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{4}x(t-1) + \frac{1}{4}x(t-2) = 0.$$

Применим теорему 7. Имеем $g(t) = t-1$,

$$\begin{aligned} \int_{g(t)}^t \sum_{i=1}^m p_i(s) \exp \int_{h_i(s)}^{g(t)} \sum_{l=1}^m p_l(u) du ds &= \int_{t-1}^t \frac{1}{4} \left(\exp \int_{s-1}^{t-1} \frac{1}{2} du + \exp \int_{s-2}^{t-1} \frac{1}{2} du \right) ds = \\ &= \frac{1}{4} \int_{t-1}^t \left(\exp \frac{t-s}{2} + \exp \frac{t-s+1}{2} \right) ds = \frac{1}{4} \int_0^2 \exp \frac{s}{2} ds = \frac{e-1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Теперь применим следствие 1. Имеем $H_1(t) = [t, t+1]$, $H_2(t) = [t, t+2]$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_{H_i(t)} p_i(s) \exp \int_{h_i(s)}^t \sum_{l=1}^m p_l(u) du ds &= \int_t^{t+1} \frac{1}{4} \exp \int_{s-1}^t \frac{1}{2} du ds + \\ &+ \int_t^{t+2} \frac{1}{4} \exp \int_{s-2}^t \frac{1}{2} du ds = \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \exp \frac{s}{2} ds + \int_0^2 \exp \frac{s}{2} ds \right) = \frac{e^{\frac{1}{2}} - 1 + e - 1}{2} > 1. \end{aligned}$$

Таким образом, количество итераций теоремы 10, требуемых для обоснования осцилляции уравнения (6), не может быть бóльшим, но может быть меньшим, чем количество требуемых итераций теоремы 8.

2.3. Некоторые сравнения. Прежде чем сравнивать полученные выше результаты с результатами других недавних работ, применим приведенные в разделе 1 теоремы к простейшему случаю уравнения (1) — автономному уравнению.

Пусть $p(t) \equiv c = \text{const} > 0$, $h(t) \equiv t - r$, $r = \text{const} > 0$. Уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x}(t) + cx(t - r) = 0, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Как известно ([1], гл. 4), все решения уравнения (12) осциллируют, если и только если характеристическое уравнение $\lambda + ce^{-\lambda r} = 0$ не имеет вещественных корней, что равносильно условию $cr > \frac{1}{e}$.

Применение к уравнению (12) теорем 1 и 2 дает условие осцилляции $cr > 1$, теоремы 3 — условие $cr > \ln 2$. Покажем, что из теоремы 4 выводится условие $cr > \frac{1}{e}$.

Из (4) получаем

$$a_{k+1}(t, s) = \exp \left\{ c \int_s^t a_k(\tau, \tau - r) d\tau \right\},$$

откуда

$$a_1(t, s) = e^{c \int_s^t d\tau} = e^{c(t-s)}, \quad a_2(t, s) = e^{c \int_s^t e^{cr} d\tau} = e^{(t-s)ce^{cr}}, \dots, \quad a_k(t, s) = e^{(t-s)ce^{cre^{cr} \dots e^{cr}}}.$$

Обозначим левую часть неравенства (5) $F(k) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t p(s) a_k(g(t), h(s)) ds$. Имеем

$$F(k) = c \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-r}^t a_k(t, s) ds = c \int_0^r a_k(r, s) ds = \frac{f(k+1) - 1}{f(k)}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

где рекуррентная последовательность $\{f(k)\}$ является решением задачи

$$f(k+1) = (e^{cr})^{f(k)}, \quad f(0) = 1.$$

Положим $u(x) = e^{crx} - x$. В случае $cr > \frac{1}{e}$ имеем $\min_{x \geq 0} u(x) > 0$, следовательно, $\inf_{k \in \mathbb{N}_0} f(k+1) - f(k) > 0$, и значит, $f(k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда, поскольку $\frac{e^{crx}}{x} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, получаем

$$F(k) = \frac{(e^{cr})^{f(k)} - 1}{f(k)} \rightarrow +\infty \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

По теореме 4 уравнение (12) является осциллирующим.

Более того, теорема 4 показывает, что условие осцилляции $cr > \frac{1}{e}$ является точным. Действительно, рассмотрим случай $cr \leq \frac{1}{e}$. Тогда существует такое $x_1 \in (1, e]$, что $u(x_1) = 0$. Имеем $f(0) = 1 < x_1$, и если $f(k) < x_1$, то $f(k+1) = e^{crf(k)} < e^{crx_1} = x_1$, откуда в силу принципа индукции $f(k) < x_1 \leq e$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Нетрудно видеть, что функция $v(x) = \frac{e^{crx} - 1}{x}$ возрастает на промежутке $[1, e]$, следовательно, для всех $k \in \mathbb{N}_0$

$$F(k) = v(f(k)) \leq v(e) \leq \frac{e - 1}{e} < 1.$$

После выхода работы [10] в международной печати было опубликовано несколько статей, авторы которых претендуют на усиление теоремы 8 и, более того, называют каждый свой новый набор условий осцилляции уравнений (1) и (6) “улучшающим все известные в литературе”.

Теорема 11 ([12]). Положим $p_0(t) = p(t)$ и для всех $k = 0, 1, 2, \dots$

$$p_{k+1}(t) = p_0(t) \left[1 + \int_{h(t)}^t p_0(s) \exp \left(\int_{h(s)}^{g(t)} p_k(\tau) d\tau \right) ds \right]. \quad (13)$$

Если для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t p_0(s) \exp \left(\int_{h(s)}^{g(t)} p_k(\tau) d\tau \right) ds > 1, \quad (14)$$

то уравнение (1) является осциллирующим.

Следующий пример показывает, что теорема 11 не позволяет получить критерий осцилляции $cr > \frac{1}{e}$ автономного уравнения (12).

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{5}x(t-2) = 0, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Поскольку $cr = \frac{1}{5} \cdot 2 > \frac{1}{e}$, уравнение (15) является осциллирующим.

Применим к нему теорему 11. Поскольку $p(t) \equiv p_0 = \text{const}$ и $h(t) \equiv g(t) = t-2$, то в силу определения (13) и принципа индукции для всех $k \in \mathbb{N}_0$ имеем $p_k(t) \equiv p_k = \text{const}$, при этом

$$p_{k+1} = \frac{1}{5} \left[1 + \int_{t-2}^t \frac{1}{5} \exp \left(\int_{s-2}^{t-2} p_k du \right) ds \right] = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{5} \int_0^2 e^{p_k s} ds \right) = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{e^{2p_k} - 1}{5p_k} \right).$$

Обозначим $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$. Легко видеть, что $f(x)$ растет при $x > 0$. Следовательно, если $p_k \in (0, \frac{1}{2})$, то

$$0 < p_{k+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} f(p_k) < \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \cdot 2(e-1) < \frac{1}{2}.$$

Так как $p_0 = \frac{1}{5} \in (0, \frac{1}{2})$, то $p_k \in (0, \frac{1}{2})$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$.

Проверим выполнение неравенства (14). Имеем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \int_{t-2}^t \exp(p_k \cdot (t-s)) ds = \frac{1}{5} \int_0^2 e^{p_k s} ds = \frac{e^{2p_k} - 1}{5p_k} = \frac{f(p_k)}{5} < \frac{f(\frac{1}{2})}{5} = \frac{2(e-1)}{5} < 1.$$

Неравенство (14) не выполняется ни для какого $k \in \mathbb{N}_0$, следовательно, теорема 11 неприменима к уравнению (15).

В последующих работах теорема 11 уточнялась путем наращивания количества интегралов в формулах (13) и (14) и уточнения функции p_0 . Результат применялся как к уравнению (1), так и к уравнению (6).

Теорема 12 ([13]). Положим

- $h(t) = \max_i h_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, и $P(t) = \sum_{j=1}^m p_j(t)$;
- $\alpha = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \int_{h(t)}^t P(s) ds$ и $\lambda = \lambda_0$ — наименьший корень уравнения $\lambda = e^{\alpha\lambda}$;
- $P_0(t) = \lambda_0 P(t)$ и для всех $k = 0, 1, 2, \dots$

$$P_{k+1}(t) = P(t) \left[1 + \int_{h(t)}^t P(s) \exp \left(\int_{h(s)}^t P(u) \exp \left(\int_{h(u)}^u P_k(v) dv \right) du \right) ds \right]. \quad (16)$$

Если для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t P(s) \exp \left(\int_{h(s)}^{g(t)} P(u) \exp \left(\int_{h(u)}^u P_k(v) dv \right) du \right) ds > 1, \quad (17)$$

то уравнение (6) является осциллирующим.

Следующий пример показывает, что теорема 12 не только не обобщает теорему 8, она не обобщает даже теорему 7. Причина аналогична указанному выше свойству теоремы 6: левая часть неравенства (17) не увеличивается при уменьшении части функций h_i .

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{10}(x(h_1(t)) + x(h_2(t))) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (18)$$

где

$$h_1(t) = \begin{cases} t-1, & t \in [2n, 2n+1); \\ t-12, & t \in [2n+1, 2n+2), \end{cases} \quad h_2(t) = \begin{cases} t-12, & t \in [2n, 2n+1); \\ t-1, & t \in [2n+1, 2n+2). \end{cases}$$

Применим теорему 7. Поскольку $g(t) \equiv t-1$, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{g(t)}^t \sum_{i=1}^m p_i(s) \exp \int_{h_i(s)}^{g(t)} \sum_{l=1}^m p_l(u) du ds &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{10} \int_{t-1}^t \left(\sum_{l=1}^2 \exp \frac{1}{5} \int_{h_l(s)}^{t-1} du \right) ds \geq \\ &\geq \frac{1}{10} \int_{t-1}^t \left(\exp \frac{1}{5}(t-s+11) + \exp \frac{1}{5}(t-s) \right) ds = \frac{1}{2} \left(\exp \frac{12}{5} - \exp \frac{11}{5} + \exp \frac{1}{5} - 1 \right) > 1. \end{aligned}$$

Применяя теорему 9, получаем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \int_{H_i(t)} p_i(s) ds = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+1} \frac{1}{10} ds + \int_t^{t+12} \frac{1}{10} ds = \frac{13}{10} > 1.$$

Таким образом, теорема 7, т.е. первая же итерация теоремы 8, а также теорема 9 позволяют обнаружить осцилляцию уравнения (18).

Теперь применим теорему 12. Поскольку $p(t) \equiv p_0 = \frac{\lambda_0}{5} = \text{const}$ и $h(t) = t-1$, то в силу определения (16) и принципа индукции для всех $k \in \mathbb{N}_0$ имеем $P_k(t) \equiv p_k = \text{const}$, при этом

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \frac{1}{5} \left[1 + \int_{t-1}^t \frac{1}{5} \exp \left(\int_{s-1}^t \frac{1}{5} \exp \left(\int_{u-1}^u p_k d\xi \right) du \right) ds \right] = \\ &= \frac{1}{5} \left[1 + \frac{1}{5} \int_{t-1}^t \exp \left(\frac{1}{5} e^{p_k}(t-s+1) \right) ds \right] = \frac{1}{5} \left[1 + \frac{e^{\frac{2}{5}e^{p_k}} - e^{\frac{1}{5}e^{p_k}}}{e^{p_k}} \right]. \end{aligned}$$

Имеем $\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t \frac{1}{5} ds = \frac{1}{5}$. Для наименьшего корня λ_0 уравнения $\lambda = e^{\frac{\lambda}{5}}$ имеем $\lambda_0 < 5$,

откуда $p_0 = \frac{\lambda_0}{5} < 1$.

Обозначим $f(x) = \frac{e^{\frac{2x}{5}} - e^{\frac{x}{5}}}{x}$. Легко видеть, что $f(x)$ растет при $x > 0$. Если $p_k \in (0, 1)$, то

$$0 < p_{k+1} = \frac{1}{5} [1 + f(e^{p_k})] < \frac{1 + f(e)}{5} = \frac{1 + e^{\frac{2e}{5}-1} - e^{\frac{e}{5}-1}}{5} < 1.$$

В силу принципа индукции получаем $p_k < 1$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$.

Проверим выполнение условия (17). Имеем

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{t-1}^t \frac{1}{5} \exp \left(\int_{s-1}^{t-1} \frac{1}{5} \exp \left(\int_{u-1}^u p_k dv \right) du \right) ds = \frac{1}{5} \int_0^1 \exp \frac{e^{p_k} s}{5} ds = \frac{e^{\frac{1}{5} e^{p_k}} - 1}{e^{p_k}}.$$

Функция $f_1(x) = \frac{e^{\frac{x}{5}} - 1}{x}$ растёт на промежутке $(1, e)$, следовательно, для $p_k < 1$ имеем

$$f_1(e^{p_k}) \leq f_1(e) = \frac{e^{\frac{e}{5}} - 1}{e} < 1.$$

Таким образом, никакая итерация теоремы 12 не позволяет установить осцилляцию уравнения (18).

Замечание. В работах [12] и [13] уравнение (6) рассматривается в более узких предположениях, чем в настоящей статье: функции p_i и h_i предполагаются непрерывными. Однако, очевидно, что функции h_1 и h_2 в уравнении (18) можно сделать непрерывными, не нарушив полученных в примере 4 оценок.

3. УРАВНЕНИЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Зададимся следующими вопросами: насколько важно в теоремах 1–5, что запаздывание в уравнении (1) сосредоточенное? Можно ли перенести обобщение теорем 4 и 5 на интегро-дифференциальные уравнения и уравнения с распределенным запаздыванием?

3.1. *Основной результат.* Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + \int_{h(t)}^t x(s) d_s r(t, s) = 0, \quad t \geq 0, \quad (19)$$

в следующих предположениях: функция $r(t, \cdot)$ имеет ограниченную вариацию, $r(t, 0) = 0$, функция $\rho(t) = \text{var}_{h(t) \leq s \leq t} r(t, s)$ локально суммируема, функция $h(t)$ измерима, $h(t) \leq t$, интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса.

Везде ниже полагаем, что функция $r(t, \cdot)$ монотонно возрастает и $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$.

Уравнение (19) включает уравнения (1) и (6) как частные случаи. Определение решения уравнения (19) дословно повторяет определения для уравнений (1) и (6). В принятых предположениях для любой ограниченной борелевской начальной функции существует единственное решение уравнения (19).

По аналогии с (9) положим

$$P_0(t, s) = 1, \quad P_{k+1}(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t \left(\int_{h(\zeta)}^\zeta P_k(\zeta, \eta) d_\eta r(\zeta, \eta) \right) d\zeta \right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

По аналогии с леммой 1 получим следующий факт.

Лемма 2. Пусть x — решение уравнения (19) и $x(t) > 0$ для $t \geq t_0$. Тогда существует такое $t_1 \geq t_0$, что для $t \geq s \geq t_1$ имеем

$$x(t) P_k(t, s) \leq x(s). \quad (20)$$

Доказательство. Применим индукцию по k . Перепишем уравнение (19) в виде

$$\dot{x}(t) + \rho(t)x(t) = \int_{h(t)}^t (x(t) - x(\eta)) d_\eta r(t, \eta).$$

Поскольку при $t \geq t_0$ решение $x(t)$ монотонно убывает, имеем $x(t) \leq x(\eta)$, следовательно, $\dot{x}(t) + \rho(t)x(t) \leq 0$. По формуле представления решения

$$x(t) = \exp \left(- \int_{t_0}^t \rho(\zeta) d\zeta \right) x(t_0) + \int_{t_0}^t \exp \left(- \int_s^t \rho(\zeta) d\zeta \right) \int_{h(s)}^s (x(s) - x(\eta)) d_\eta r(s, \eta) ds,$$

получаем

$$x(t) \leq x(s) \exp \left(- \int_s^t \rho(\zeta) d\zeta \right) = x(s) P_1(t, s),$$

т. е. для $k = 1$ утверждение леммы справедливо.

Предположим, что неравенство (20) справедливо для некоторого $k \geq 1$. Тогда $x(t) P_k(t, \eta) \leq x(\eta)$, следовательно,

$$\dot{x}(t) + x(t) \int_{h(t)}^t P_k(t, \eta) d_\eta r(t, \eta) \leq 0.$$

Применяя неравенство Гронулла–Беллмана, имеем

$$x(t) \leq x(s) \exp \left\{ - \int_s^t \left(\int_{h(\zeta)}^\zeta P_k(\zeta, \eta) d_\eta r(\zeta, \eta) \right) d\zeta \right\}.$$

Учитывая определение P_{k+1} , получаем $x(s) \geq x(t) P_{k+1}(t, s)$. □

Как в разделе 1, обозначим $H(t) = \{s \mid h(s) \leq t \leq s\}$.

Теорема 13. Если для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{H(t)} \int_{h(s)}^t P_k(t, \eta) d_\eta r(s, \eta) ds > 1,$$

то уравнение (19) осциллирует.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, т. е. решение уравнения (19) остается положительным начиная с некоторой точки. Поскольку $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$, то оно монотонно убывает начиная с некоторой точки T . Не нарушая общности считаем, что

$$\int_{H(T)} \int_{h(s)}^T P_k(T, \eta) d_\eta r(s, \eta) ds > 1.$$

Из (19)

$$x(t) = x(T) - \int_T^t \int_{h(s)}^s x(\eta) d_\eta r(s, \eta) ds > 0, \quad t \geq T.$$

Используя включение $H(T) \subset [T, \infty)$ и определение множества $H(T)$, имеем

$$x(T) \geq \int_T^\infty \int_{h(s)}^s x(\eta) d_\eta r(s, \eta) ds \geq \int_{H(T)} \int_{h(s)}^s x(\eta) d_\eta r(s, \eta) ds \geq \int_{H(T)} \int_{h(s)}^T x(\eta) d_\eta r(s, \eta) ds.$$

По лемме 2 имеем $x(\eta) \geq x(T) P_k(T, \eta)$, значит, учитывая условия теоремы, получаем

$$x(T) \geq \int_{H(T)} \int_{h(s)}^T x(\eta) d_\eta r(s, \eta) ds \geq x(T) \int_{H(T)} \int_{h(s)}^T P_k(T, \eta) d_\eta r(s, \eta) ds > x(T),$$

что невозможно. □

Следствие 2. Если

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{H(t)} \int_{h(s)}^t d_\eta r(s, \eta) ds > 1,$$

то уравнение (19) осциллирует.

Доказательство следует из очевидного неравенства $P_k(t, \eta) \geq 1$ и монотонности функции $r(t, \cdot)$.

Для уравнения (1) следствие 2 совпадает с теоремой 5.

3.2. *Интегро-дифференциальное уравнение.* Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \int_{h(t)}^t k(t, s)x(s) ds = 0, \quad t \geq 0, \quad (21)$$

являющееся частным случаем (19).

Для уравнения (21) функции $P_k(t, s)$ имеют вид

$$P_0(t, s) = 1, \quad P_{k+1}(t, s) = \exp \left\{ \int_s^t \left(\int_{h(\zeta)}^\zeta P_k(\zeta, \eta) k(\zeta, \eta) d\eta \right) d\zeta \right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Применяя к (21) теорему 13, получаем следующие условия осцилляции.

Теорема 14. Пусть $k(t, s) \geq 0$. Если для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{H(t)} \int_{h(s)}^t P_k(t, \eta) k(s, \eta) d\eta ds > 1,$$

то уравнение (21) является осциллирующим.

Из теоремы 14 следуют известные условия осцилляции для уравнения (21).

Следствие 3 ([14]). Пусть $k(t, s) \geq 0$. Если

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{H(t)} \int_{h(s)}^t k(s, \eta) d\eta ds > 1,$$

то уравнение (21) является осциллирующим.

Доказательство следует из очевидного неравенства $P_k(t, \eta) \geq 1$ и неотрицательности функции $k(t, s)$.

В работе [15] рассмотрено уравнение с распределенным запаздыванием, записанное в отличном от (21) виде

$$\dot{x}(t) + \int_0^{b(t)} R(t, s)x(t-s) ds = 0, \quad t \geq 0. \quad (22)$$

Здесь функция b непрерывна и положительна на полуоси $[0, \infty)$, функция R кусочно-непрерывна на отрезке $[0, \infty) \times [0, b(t)]$.

Теорема 15 ([15]). Пусть $R(t, s) \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - b(t)) = \infty$ и функция b монотонно возрастает на $[0, \infty)$. Если

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_0^{b(t)} \int_t^{t+s} R(\eta, s) d\eta ds > 1,$$

то уравнение (22) осциллирует.

Покажем, что теорема 15 вытекает из следствия 3. Заметим, что уравнение (22) может быть приведено к виду (21) заменой переменных $t - s = \tau$ в интеграле и переобозначениями $t - b(t) = h(t)$, $R(t, t - \tau) = k(t, \tau)$.

Поскольку функция b монотонно возрастает, имеем $b(\eta) \geq b(t)$ для $\eta \geq t$, и если $t \leq \eta \leq t + b(t)$, то $\eta - b(\eta) \leq t \leq \eta$, следовательно, $\eta \in H(t)$. Так как функция R неотрицательна, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \int_0^{b(t)} \int_t^{t+s} R(\eta, s) d\eta ds &= \int_t^{t+b(t)} \left(\int_{\eta-t}^{b(t)} R(\eta, s) ds \right) d\eta = \\ &= \int_t^{t+b(t)} \int_{\eta-b(t)}^t R(\eta, \eta - \tau) d\tau d\eta \leq \int_t^{t+b(t)} \int_{h(\eta)}^t k(\eta, \tau) d\tau d\eta \leq \int_{H(t)} \int_{h(\eta)}^t k(\eta, \tau) d\tau d\eta, \end{aligned}$$

откуда следует, что условия теоремы 15 обеспечивают условия следствия 3. Обратное неверно, поскольку монотонность функции $b(t) = t - h(t)$ в следствии 3 не требуется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Условия осцилляции уравнений (1), (6) и (19) традиционно формулируются в виде оценок интегралов от коэффициентов уравнения по промежуткам, определяемым запаздываниями. В настоящей работе показано, что замена промежутков интегрирования на множества H и H_i выделяет существенно более широкие классы осциллирующих уравнений, при этом известные результаты оказываются следствиями новых.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом* (ГИТТЛ, М.–Л., 1951).
- [2] Ladas G., Lakshmikantham V., Papadakis J.S. *Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by the retarded argument*, Delay and functional differential equations and their applications (Proc. Conf., Park City, Utah, 1972), pp. 219–231 (Academic Press, New York, 1972).
- [3] Трамов М.И. *Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом*, Изв. вузов. Матем., № 3, 92–96 (1975).
- [4] Ladde G.S., Lakshmikantham V., Zhang B.G. *Oscillation theory of differential equations with deviating arguments* (Marcel Dekker, New York, 1987).
- [5] Chudinov K. *Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations*, Electron. J. Qual. Theory Diff. Equat., Paper No. 2, 1–10 (2016).
- [6] Braverman E., Karpuz B. *On oscillation of differential and difference equations with non-monotone delays*, Appl. Math. Comput. **218** (7), 3880–3887 (2011).
- [7] Коплатадзе Р.Г. *Нули решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом*, Тр. ин-та прикл. матем. им. И.Н. Векуа **14**, 128–134 (1983).
- [8] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1991).
- [9] Koplatadze R., Kvinikadze G. *On the oscillation of solutions of first-order delay differential inequalities and equations*, Georgian Math. J. **1** (6), 675–685 (1994).
- [10] Braverman E., Chatzarakis G.E., Stavroulakis I.P. *Iterative oscillation tests for differential equations with several non-monotone arguments*, Adv. Diff. Equat. 2016:87, 1–18 (2016).
- [11] Agarwal R.P., Berezhansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. *Nonoscillation theory of functional differential equations with applications* (Springer, New York, 2012).
- [12] Chatzarakis G.E. *Differential equations with non-monotone arguments: iterative oscillation results*, J. Math. Comput. Sci. **6** (5), 953–964 (2016).
- [13] Chatzarakis G.E., Li T. *Oscillations of differential equations generated by several deviating arguments*, Adv. Diff. Equat. 2017:292, 24 p. (2017).
- [14] Malygina V., Sabatulina T. *On oscillation of solutions of differential equations with distributed delay*, Electron. J. Qual. Theory Diff. Equat. Paper No. 116, 1–15 (2016).
- [15] Tang X.H. *Oscillation of first order delay differential equations with distributed delay*, J. Math. Anal. Appl. **289** (2), 367–378 (2004).

Кирилл Михайлович Чудинов

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия,*

e-mail: cyril@list.ru

Вера Владимировна Малыгина

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия,*

e-mail: mavera@list.ru

K.M. Chudinov and V.V. Malygina

On conditions for the oscillation of solutions to a first-order differential equation with aftereffect

Abstract. We establish some new effective conditions for the oscillation of solutions to linear first-order differential equations with aftereffect. We develop a new approach to obtaining oscillation conditions in the form of the upper limit of a function of parameters of an equation. The approach is applied to equations with one and several concentrated delays, and to one with distributed delay. We show the advantages of the new results over known results.

Keywords: functional differential equation, aftereffect, oscillation, effective tests, several delays, distributed delay, iterative approach.

Kirill Mikhailovich Chudinov

*Perm National Research Polytechnic University,
29 Komsomolskiy Ave., Perm, 614990 Russia,*

e-mail: cyril@list.ru

Vera Vladimirovna Malygina

*Perm National Research Polytechnic University,
29 Komsomolskiy Ave., Perm, 614990 Russia,*

e-mail: mavera@list.ru