Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Клепикова, О классификации четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с изотропным тензором Вейля, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 7, 86–90

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-7-86-90>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 06:31:35

Краткое сообщение, представленное С.К. Водопьяновым

С.В. КЛЕПИКОВА

О КЛАССИФИКАЦИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ИЗОТРОПНЫМ ТЕНЗОРОМ ВЕЙЛЯ

Аннотация. Исследуются четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Вейля. Описан алгоритм получения полной классификации таких многообразий.

Ключевые слова: локально однородное псевдоримановое многообразие, алгебра Ли, изотропный тензор Вейля.

УДК: 514.764.2

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-7-86-90

ВВЕДЕНИЕ

Работы многих математиков посвящены изучению (псевдо)римановых конформно плоских многообразий, т. е. многообразий с тривиальным тензором Вейля. Кроме того, можно рассматривать многообразия, тензор Вейля которых имеет нулевой квадрат длины, а сам он не является нулевым. В этом случае такие многообразия называют многообразиями с изотропным тензором Вейля. Данные пространства тесно связаны с локально конформно однородными пространствами [1].

Отметим, что в случае римановой метрики квадрат длины тензора в некотором ортонормированном базисе представляет собой сумму квадратов всех компонент, и равен нулю тогда и только тогда, когда сам тензор тривиален. Поэтому естественно рассматривать лишь случай псевдоримановой метрики. В трехмерном случае тензор Вейля тривиален, роль его аналога играет тензор Схоутена–Вейля (тензор Коттона). В [2], [3] исследовался тензор Схоутена–Вейля для левоинвариантной лоренцевой метрики на группах Ли размерности 3, что является продолжением исследований Дж. Милнора [4] по левоинвариантным римановым метрикам на трехмерных группах Ли.

В данной работе изучаются четырехмерные локально однородные пространства с левоинвариантной псевдоримановой метрикой и изотропным тензором Вейля с нетривиальной подгруппой изотропии. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [3], [5].

Поступила в редакцию 01.02.2019, после доработки 01.02.2019. Принята к публикации 27.03.2019

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №18-31-00033 мол_а.

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФАКТЫ

Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности n . Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G , через $\mathfrak{h}$ — подалгебру изотропии, а через $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ однозначно определяет представление изотропии $\psi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом $\psi_X(Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}} \forall X \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{m}$. Инвариантной (псевдо)римановой метрике на G/H соответствует невырожденная билинейная форма g на $\mathfrak{m}$ такая, что

$$(\psi_X)^t \cdot g + g \cdot \psi_X = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{h},$$

где $(\psi_X)^t$ — транспонированная матрица. Эта форма однозначно определяет связность Леви-Чивита $\nabla : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом

$$\nabla_X(Y_{\mathfrak{m}}) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + v(X, Y),$$

где отображение $v : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{m}$ определяется формулой

$$2g(v(X, Y), Z_{\mathfrak{m}}) = g(X_{\mathfrak{m}}, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) + g(Y_{\mathfrak{m}}, [Z, X]_{\mathfrak{m}}).$$

Тензору кривизны связности ∇ соответствует отображение $R : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такое, что

$$R(X, Y) = [\nabla_Y, \nabla_X] + \nabla_{[X, Y]}.$$

Тензор Риччи r и скалярная кривизна s определяются формулами

$$r(X, Y) = \text{tr}(Z \rightarrow R(X, Z)Y), \quad s = \text{tr}_g(r).$$

Тензор Вейля (или тензор конформной кривизны) W имеет вид

$$W = R - A \oslash g,$$

где

$$A = \frac{1}{n-2} \left(r - \frac{sg}{2(n-1)} \right) \text{ — тензор Схоутена,}$$

$$(A \oslash g)(X, Y, Z, V) = A(X, Z)g(Y, V) + A(Y, V)g(X, Z) - A(X, V)g(Y, Z) - A(Y, Z)g(X, V)$$

— произведение Кулкарни-Номидзу [6].

Квадрат длины тензора Вейля вычисляется по следующей формуле

$$\|W\|^2 = W_{ijkl} W_{lmqr} g^{il} g^{jm} g^{kq} g^{tr}.$$

Определение 1. Многообразие M с псевдоримановой метрикой g будем называть многообразием с изотропным тензором Вейля, если для метрики g одновременно выполняется $\|W\|^2 = 0$ и $W \neq 0$.

При достаточно малой размерности локально однородного (псевдо)риманова пространства становится возможным применение систем компьютерной математики для изучения локально однородных (псевдо)римановых многообразий с изотропным тензором Вейля. Далее приведем математическую модель, позволяющую вычислять квадрат длины тензора Вейля на локально однородном (псевдо)римановом пространстве (подробнее см. [7]–[9]).

Пусть, как и ранее, $(M = G/H, g)$ — однородное (псевдо)риманово многообразие размерности n , $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G , $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — дополнение к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, $h = \dim \mathfrak{h}$, $m = \dim \mathfrak{m}$.

Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_h, u_1, u_2, \dots, u_m\}$ — базис $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = c_{ij}^k u_k, \quad [u_i, u_j]_{\mathfrak{h}} = C_{ij}^k e_k, \quad [e_i, u_j]_{\mathfrak{m}} = \bar{c}_{ij}^k u_k,$$

где c_{ij}^k , C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров.

Первым шагом вычислим представление изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)_j^k = (\psi(e_i))_j^k = \bar{c}_{ij}^k, \quad (1)$$

и запишем условие инвариантности метрического тензора g :

$$(\psi_i)^t \cdot g + g \cdot \psi_i = 0, \quad i = 1, \dots, h, \quad (2)$$

где $(\psi_i)^t$ — транспонированная матрица.

Далее, с помощью уже известных структурных констант и матрицы метрического тензора найдем компоненты связности Леви-Чивита ∇ :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(c_{ij}^k + g^{sk} c_{sj}^l g_{il} + g^{sk} c_{si}^l g_{jl} \right), \quad \bar{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \bar{c}_{ij}^k - \frac{1}{2} g^{sk} \bar{c}_{is}^l g_{jl},$$

где $\nabla_{u_i} u_j = \Gamma_{ij}^k u_k$, $\nabla_{e_i} u_j = \bar{\Gamma}_{ij}^k u_k$ и $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R , тензора Риччи r и скалярной кривизны s :

$$R_{ijks} = \left(\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p + c_{ij}^l \Gamma_{lk}^p + C_{ij}^l \bar{\Gamma}_{lk}^p \right) g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks} g^{js}, \quad s = r_{ik} g^{ik}.$$

Далее, находятся компоненты тензора Схоутена

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2} \left(r_{ij} - \frac{s g_{ij}}{2(n-1)} \right),$$

вычисляется тензор Вейля

$$W_{ijkt} = R_{ijkt} - A_{ik} g_{jt} - A_{jt} g_{ik} + A_{it} g_{jk} + A_{jk} g_{it},$$

а также квадрат его длины

$$\|W\|^2 = W_{ijkt} W_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{i\alpha} g^{j\beta} g^{k\gamma} g^{t\delta}.$$

В данной работе будем использовать классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий, полученную в [10]. Далее по тексту будем ссылаться на случаи из данной классификации по их номеру (например, “2.1^{3.5}”).

2. ИЗОТРОПНОСТЬ ТЕНЗОРА ВЕЙЛЯ

Далее рассмотрим один из ста восьмидесяти шести случаев, которые содержатся в классификации [10].

Случай 1.1^{1.1}. В данном случае скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы изометрий, имеют вид

$$[e_1, u_1] = u_1, \quad [e_1, u_3] = -u_3, \quad [u_1, u_3] = u_2, \quad [u_2, u_4] = u_2, \quad [u_3, u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \text{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Вычислим представление изотропии (1):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix};$$

запишем условие инвариантности метрического тензора (2):

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{13} \neq 0, \quad \alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}.$$

Ненулевыми компонентами тензора Вейля являются

$$\begin{aligned} W_{1234} &= -W_{2314} = \frac{(\alpha_{24}(\alpha_{13} + 2\alpha_{24})(\alpha_{13} + \alpha_{24}) - \alpha_{22}\alpha_{44}(3\alpha_{13} + 2\alpha_{24}))\alpha_{22}}{12(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{13}}, \\ W_{1223} &= -\frac{(\alpha_{13}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{44} + 2\alpha_{24}^2)\alpha_{22}^2}{12(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{13}}, \quad W_{1434} = \frac{(\alpha_{13}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{44} + 2\alpha_{24}^2)\alpha_{44}\alpha_{22}}{2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{13}}, \\ W_{1313} &= \frac{(\alpha_{13}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{44} + 2\alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{6(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}, \quad W_{2424} = -\frac{(\alpha_{13}^2 - 2\alpha_{22}\alpha_{44} + 2\alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{6\alpha_{13}^2}, \\ W_{1324} &= -\frac{\alpha_{22}}{2}. \end{aligned}$$

Квадрат длины тензора Вейля имеет вид

$$\|W\|^2 = \frac{\alpha_{22}^2(2\alpha_{13}^4 + (\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)(4(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2) - 13\alpha_{13}^2))}{3(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^2\alpha_{13}^4}.$$

Он равен нулю в двух случаях:

- 1) $\alpha_{22} = 0$. Однако при этом зануляются все компоненты тензора Вейля. Следовательно, при $\alpha_{22} = 0$ тензор Вейля не является изотропным.
- 2) $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{13}^2(13 \pm 3\sqrt{17}) + 8\alpha_{24}^2}{8\alpha_{44}}$. В этом случае нетривиальные компоненты тензора Вейля равны:

$$\begin{aligned} W_{1234} &= -W_{2314} = -\frac{(\omega\alpha_{13}^2 + 8\alpha_{24}^2)(3\omega\alpha_{13} + 2\omega\alpha_{24} - 8\alpha_{24})}{96\omega\alpha_{13}\alpha_{44}}, \\ W_{1223} &= \frac{(\omega\alpha_{13}^2 + 8\alpha_{24}^2)^2(\omega - 4)}{384\alpha_{13}\alpha_{44}^2\omega}, \quad W_{1434} = -\frac{(\omega\alpha_{13}^2 + 8\alpha_{24}^2)(\omega - 4)}{48\omega\alpha_{13}}, \\ W_{1313} &= -\frac{(\omega\alpha_{13}^2 + 8\alpha_{24}^2)(\omega - 4)}{24\omega\alpha_{44}}, \quad W_{2424} = \frac{(\omega\alpha_{13}^2 + 8\alpha_{24}^2)(\omega - 4)}{192\alpha_{44}}, \\ W_{1324} &= -\frac{\omega\alpha_{13}^2 + 8\alpha_{24}^2}{16\alpha_{44}}, \end{aligned}$$

где $\omega = 13 \pm 3\sqrt{17}$. В данном случае, например, компонента W_{1324} не может равняться нулю, так как $\omega > 0$ и $\alpha_{13} \neq 0$ из-за невырожденности метрического тензора.

Таким образом, в случае 1.1¹.1 тензор Вейля является изотропным, если инвариантная метрика имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{13}^2(13 \pm 3\sqrt{17}) + 8\alpha_{24}^2}{8\alpha_{44}} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{13} \neq 0, \alpha_{44} \neq 0.$$

Рассматривая аналогичным образом оставшиеся случаи из классификацию [10], получаем полную классификацию четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с изотропным тензором Вейля.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Балащенко В.В., Никоноров Ю.Г., Родионов Е.Д., Славский В.В. *Однородные пространства: теория и приложения: монография* (Ханты-Мансийск, Полиграфист, 2008).
- [2] Rodionov E.D., Slavskii V.V., Chibrikova L.N. *Left-invariant Lorentz metrics on three-dimensional Lie groups with a Schouten-Weyl tensor of squared length zero*, Dokl. Math. **71** (2), 238–240 (2005).
- [3] Khromova O.P., Klepikov P.N., Klepikova S.V., Rodionov E.D. *About Schouten-Weyl tensor on 3-dimensional Lorentzian Lie groups*, arXiv:1708.06614 (2017).
- [4] Milnor J. *Curvatures of left invariant metric on Lie group*, Advances in Math., **21** (3), 293–329 (1976).
- [5] Gladunova O.P., Rodionov E.D., Slavskii V.V. *On harmonic tensors on three-dimensional Lie groups with left-invariant Riemannian metric*, Dokl. Math. **77** (2), 306–309 (2008).
- [6] Besse A. *Einstein manifolds* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1987).
- [7] Хромова О.П. *Применение пакетов аналитических вычислений для определения основных геометрических характеристик передуктивных однородных псевдоримановых многообразий*, в сб. “Математика и ее приложения: фундамент. пробл. науки и техники” (Барнаул, 2015), с. 320–326.
- [8] Клепиков П.Н., Родионов Е.Д. *Применение пакетов символьных вычислений к исследованию алгебраических солитонов Риччи на однородных (псевдо)римановых многообразиях*, Изв. Алтайск. гос. ун-та, № 4(96), 306–309 (2017).
- [9] Calvaruso G., Zaeim A. *Conformally flat homogeneous pseudo-riemannian four-manifolds*, Tohoku Math. J. **66** (1), 31–54 (2014).
- [10] Komrakov B.B. *Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces*, Lobachevskii J. Math. **8**, 33–165 (2001).

Светлана Владимировна Клепикова

Алтайский государственный университет,
пр. Ленина, д. 61, г. Барнаул, 656049, Россия,

e-mail: klepikova.svetlana.math@gmail.com

S.V. Klepikova

Four-dimensional locally homogeneous pseudo-Riemannian manifolds with an isotropic Weyl tensor

Abstract. We investigate four-dimensional locally homogeneous pseudo-Riemannian manifolds with an isotropic Weyl tensor. An algorithm for obtaining a complete classification of such manifolds is described.

Keywords: locally homogeneous pseudo-Riemannian manifold, Lie algebra, isotropic Weyl tensor.

Svetlana Vladimirovna Klepikova

Altai State University,
61 Lenina Ave., Barnaul, 656049 Russia,

e-mail: klepikova.svetlana.math@gmail.com