Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. С. Кудрявцева, А. П. Солодов, Двусторонняя оценка областей однолистности голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 7, 91–95

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-7-91-95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 05:18:28

Краткое сообщение, представленное Ф.Г. Авхадиевым

О.С. КУДРЯВЦЕВА, А.П. СОЛОДОВ

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ОБЛАСТЕЙ ОДНОЛИСТНОСТИ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА В СЕБЯ С ИНВАРИАНТНЫМ ДИАМЕТРОМ

Аннотация. Получена асимптотически точная двусторонняя оценка областей однолиственности на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя граничными неподвижными точками и инвариантным диаметром. Оценка зависит от значения произведения угловых производных в граничных неподвижных точках.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижная точка, угловая производная, область однолиственности.

УДК: 517.54

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-7-91-95

Введение. В работах [1], [2] исследовалась задача существования областей однолиственности на классе голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ в себя, оставляющих неподвижными две граничные точки (в смысле углового предела), а также имеющих в них конечные угловые производные.

В данной заметке приведем асимптотически точную двустороннюю оценку областей однолиственности на наиболее интересном с точки зрения приложений подклассе, состоящем из отображений, сохраняющих вещественный диаметр. Такой класс функций естественно возникает, например, при исследовании некоторых вопросов теории ветвящихся случайных процессов. Полученные в работе результаты могут рассматриваться как развитие исследований, проведенных в [3], на пути решения задачи получения точных областей однолиственности на классах функций с двумя неподвижными точками.

Определения и основные результаты. Пусть $\mathcal{B}$ — совокупность голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D}$ в себя. Через $\mathcal{B}[-1, 1]$ обозначим подмножество функций f из $\mathcal{B}$, которые сохраняют неподвижными точки $z = \pm 1$ и имеют в них конечные угловые производные $f'(1)$ и $f'(-1)$:

$$\mathcal{B}[-1, 1] = \left\{ f \in \mathcal{B}: \angle \lim_{z \rightarrow \pm 1} f(z) = \pm 1, \quad \angle \lim_{z \rightarrow \pm 1} f'(z) = f'(\pm 1) < \infty \right\}.$$

Поступила в редакцию 20.02.2019, после доработки 20.02.2019. Принята к публикации 27.03.2019

Благодарности. Исследование А.П. Солодова выполнено при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-6222.2018.1).

Хорошо известно, что угловые производные положительны, а для их произведения справедлива оценка снизу $f'(1)f'(-1) \geq 1$, являющаяся следствием теоремы Жюлиа–Каратеодори ([4], гл. 1, § 1.4, теорема 1.5).

В.В. Горайнов обнаружил, что на подклассе $\mathcal{B}[-1, 1]$, состоящем из функций с фиксированным значением произведения угловых производных $f'(1)f'(-1)$, меньшим девяти, могут быть найдены нетривиальные области однолиственности. А именно, для $\alpha > 1$ в классе $\mathcal{B}[-1, 1]$ выделим подкласс $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$ функций, удовлетворяющих условию $f'(1)f'(-1) \leq \alpha$.

Теорема А ([2]). Пусть $f \in \mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$, $1 < \alpha < 9$. Тогда f однолистна в области

$$\mathcal{J}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - z^2|}{1 - |z|^2} < \frac{1}{\cos y^*(\alpha)} \right\},$$

где $y^*(\alpha)$ — единственный в интервале $0 < y < \pi/2$ корень уравнения

$$\cos^2 y = (\alpha - 1) \cos^3 \frac{\pi - 2y}{3}.$$

Области $\mathcal{J}(\alpha)$ при каждом α , $1 < \alpha < 9$, содержат вещественный диаметр и ограничены двумя дугами окружностей, проходящих через точки $z = \pm 1$. Нетрудно заметить, что условие $\alpha < 9$ точное. Действительно, функция $f(z) = z^3$ принадлежит классу $\mathcal{B}_9[-1, 1]$, но не является однолистной ни в какой окрестности вещественного диаметра.

В то же время сами области однолиственности $\mathcal{J}(\alpha)$, как отмечено В.В. Горайновым, не являются неувлучшаемыми. Верхняя оценка, полученная в данной работе, не дает ответ на вопрос, сколь точны области $\mathcal{J}(\alpha)$. Тем не менее, на подклассе $\mathcal{D}_\alpha[-1, 1]$ класса $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$, состоящем из функций, сохраняющих вещественный диаметр, получена близкая к неувлучшаемой двусторонняя оценка области однолиственности, асимптотически точная как при $\alpha \rightarrow 1+0$, так и при $\alpha \rightarrow 9-0$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[-1, 1] &= \{f \in \mathcal{B}[-1, 1] : \operatorname{Im} f(x) = 0 \text{ при } x \in (-1, 1)\}, \\ \mathcal{D}_\alpha[-1, 1] &= \{f \in \mathcal{D}[-1, 1] : f'(1)f'(-1) \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{D}_\alpha[-1, 1]$, $1 < \alpha < 9$. Тогда f однолистна в области

$$\mathcal{U}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - z^2|}{1 - |z|^2} < \sqrt{1 + \left(\sqrt{k(\alpha)} + 1 + \operatorname{sgn}(25 - 9\alpha) \sqrt{k(\alpha)} \right)^2} \right\}, \quad (1)$$

где

$$k(\alpha) = \frac{(9\alpha - 25)^2 (183 - 37\sqrt{\alpha})}{128(\alpha - 1)(9 - \alpha)(85 - 12\sqrt{\alpha})}.$$

Теорема 2. Пусть $\alpha > 1$. Для каждой точки z_0 границы области

$$\overline{\mathcal{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - z^2|}{1 - |z|^2} < \frac{2 \sqrt[4]{\alpha}}{\sqrt{(3 + \sqrt{\alpha})(\sqrt{\alpha} - 1)}} \right\} \quad (2)$$

найдется функция $f_{z_0} \in \mathcal{D}_\alpha[-1, 1]$, производная которой в точке z_0 обращается в нуль.

Доказательство теоремы 1 основано на методе, разработанном в [1] и модифицированном в [3]. При этом используется следующая связь между функциями f класса $\mathcal{D}[-1, 1]$ с заданными значениями угловых производных в граничных неподвижных точках и интегральным представлением Рисса–Герглотца функции $(1 + f)/(1 - f)$.

Лемма. Функция f принадлежит классу $\mathcal{D}[-1, 1]$ в том и только том случае, если функция $h(z) = (1 + f(z))/(1 - f(z))$ допускает представление в виде

$$h(z) = \rho \left(\lambda \frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda) \frac{1-z^2}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \operatorname{Re} \kappa}{(1 - \kappa z)(1 - \bar{\kappa} z)} d\mu(\kappa) \right), \quad (3)$$

где $\rho > 0$, $\lambda \in (0, 1)$, μ — вероятностная мера на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, удовлетворяющая условию $\mu(\{-1, 1\}) = 0$. При этом $f'(-1) = \rho$, $f'(1) = 1/(\rho\lambda)$.

Схема доказательства теоремы 1. Пусть $f \in \mathcal{D}_\alpha[-1, 1]$, $1 < \alpha < 9$. Согласно лемме функция $h(z) = (1 + f(z))/(1 - f(z))$ представима в виде (3), где $\lambda = 1/\alpha$. Тогда функция $g(\zeta) = h \circ L(\zeta)$, где $L(\zeta) = (\zeta - 1)/(\zeta + 1)$, отображает правую полуплоскость $\mathbb{H} = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta > 0\}$ в себя и имеет вид

$$g(\zeta) = \rho \left(\lambda \zeta + (1-\lambda) \zeta \int_{\mathbb{T}} \frac{1 + \operatorname{Re} \kappa}{1 + \zeta^2 + \operatorname{Re} \kappa (1 - \zeta^2)} d\mu(\kappa) \right).$$

Оценивая снизу действительную часть производной функции g , получаем

$$\operatorname{Re}(g'(\zeta)) \geq \rho \left(\lambda + (1-\lambda) \min_{\kappa \in \mathbb{T}} \operatorname{Re} \left(\frac{(1 + \operatorname{Re} \kappa)(1 - \zeta^2 + \operatorname{Re} \kappa (1 + \zeta^2))}{(1 + \zeta^2 + \operatorname{Re} \kappa (1 - \zeta^2))^2} \right) \right). \quad (4)$$

Замена $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$, где $\theta = \arg \kappa$, позволяет преобразовать (4) к виду

$$\operatorname{Re}(g'(\zeta)) \geq \rho \left(\lambda + (1-\lambda) \inf_{t \in \mathbb{R}} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \zeta^2 t^2}{(1 + \zeta^2 t^2)^2} \right) \right). \quad (5)$$

Далее выясняем при каких ζ правая часть (5) положительна. Легко показать, что для этого, применяя обозначения $\operatorname{Re} \zeta^2 = x$ и $\operatorname{Im} \zeta^2 = y$, на плоскости Oxy достаточно найти такую область, в которой при всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\frac{(x^3 + xy^2)t^6 + (x^2 + 3y^2)t^4 - xt^2 - 1}{((x^2 + y^2)t^4 + 2xt^2 + 1)^2} < \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

Последнее, в свою очередь, равносильно положительности при всех $t \in \mathbb{R}$ многочлена восьмой степени

$$(x^2 + y^2)^2 t^8 + (5 - \alpha)(x^2 + y^2) x t^6 + ((7 - \alpha)x^2 + (5 - 3\alpha)y^2) t^4 + (3 + \alpha) x t^2 + \alpha,$$

коэффициенты которого являются непрерывными функциями переменных x и y , определенных в некоторой области. Преодолевая ряд технических трудностей, показываем, что в качестве такой области можно взять сектор $|y| < x/\sqrt{k(\alpha)}$, если $1 < \alpha < 25/9$, сектор $|y| > -x/\sqrt{k(\alpha)}$, если $25/9 < \alpha < 9$, и правую полуплоскость, если $\alpha = 25/9$. Тем самым, находим сектор в полуплоскости $\mathbb{H}$, в точках которого действительная часть производной функции g положительна. По теореме Носиро–Варшавского ([5], гл. 2, § 2.6, теорема 2.16) это влечет однолистность функции g в соответствующем секторе. Отсюда выводим однолистность функции $f = L \circ g \circ L^{-1}$ в образе сектора при отображении L — области $\mathcal{U}(\alpha)$ (см. (1)).

Схема доказательства теоремы 2. При каждом $s \in (-1, 1)$ рассмотрим функцию

$$f_s(z) = \frac{a(s)z^3 + b(s)z^2 + c(s)z + d(s)}{d(s)z^3 + c(s)z^2 + b(s)z + a(s)},$$

где $a(s) = (1 + \sqrt{\alpha})(s^2 + 1)$, $b(s) = -2(\sqrt{\alpha} + 3)s$, $c(s) = (3 - \sqrt{\alpha})(s^2 + 1)$, $d(s) = 2(\sqrt{\alpha} - 1)s$. Легко проверить, что функция $f_s(z)$ при каждом $s \in (-1, 1)$ принадлежит классу $\mathcal{D}_\alpha[-1, 1]$, причем $f'_s(\pm 1) = \sqrt{\alpha}$, и имеет нулевую производную в точках

$$z_{1,2}(s) = \frac{-2\sqrt[4]{\alpha} + p_1(\alpha) \pm i p_2(\alpha)s}{(-2\sqrt[4]{\alpha} + p_1(\alpha))s \pm i p_2(\alpha)},$$

где $p_1(\alpha) = \sqrt{(\sqrt{\alpha} - 1)(3 + \sqrt{\alpha})}$, $p_2(\alpha) = \sqrt{(\sqrt{\alpha} + 1)(3 - \sqrt{\alpha})}$. Кривые $z_1(s)$ и $z_2(s)$, $s \in (-1, 1)$, представляют собой дуги окружностей — границу области $\bar{U}(\alpha)$ (см. (2)).

Сравнение результатов. Поскольку граничные точки области $\bar{U}(\alpha)$ являются нулями производных функций из класса $\mathcal{D}_\alpha[-1, 1]$, каждая точка границы области $\bar{U}(\alpha)$ является препятствием на пути распространения однолиственности. Тем самым, теорема 2 дает верхнюю оценку области однолиственности для класса $\mathcal{D}_\alpha[-1, 1]$, и тем более для класса $\mathcal{B}_\alpha[-1, 1]$.

Проанализируем разницу между верхней и нижней оценками в окрестности граничных значений параметра α . Поскольку границами областей $\mathcal{J}(\alpha)$, $\mathcal{U}(\alpha)$ и $\bar{U}(\alpha)$ являются дуги окружностей, достаточно сравнить тангенсы углов, образованных этими дугами с вещественной осью в точках $z = \pm 1$. Пусть $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ — углы, соответствующие областям $\mathcal{J}(\alpha)$ и $\bar{U}(\alpha)$. Тогда справедливы следующие порядковые соотношения:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1(\alpha) &\sim \frac{1}{\alpha - 1}, & \operatorname{tg} \varphi_2(\alpha) &\sim \frac{2}{\alpha - 1} & \text{при } \alpha \rightarrow 1 + 0, \\ \operatorname{tg} \varphi_1(\alpha) &\sim \frac{(9 - \alpha)^2}{768}, & \operatorname{tg} \varphi_2(\alpha) &\sim \frac{9 - \alpha}{18} & \text{при } \alpha \rightarrow 9 - 0. \end{aligned}$$

При α близких к единице верхняя и нижняя оценки имеют один порядок, однако при α близких к девяти зазор между верхней и нижней оценкой большой. Авторам неизвестно, можно ли усилить оценку снизу, полученную В.В. Горяйновым.

Что касается оценки снизу на классе $\mathcal{D}_\alpha[-1, 1]$, она не просто дает большую область, что ожидаемо, но и асимптотически близка к верхней оценке как при $\alpha \rightarrow 1 + 0$, так и при $\alpha \rightarrow 9 - 0$. Обозначая через $\varphi_3(\alpha)$ угол, который образует граница области $\mathcal{U}(\alpha)$ с вещественной осью в точках $z = \pm 1$, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_2(\alpha) &\sim \operatorname{tg} \varphi_3(\alpha) \sim \frac{2}{\alpha - 1} & \text{при } \alpha \rightarrow 1 + 0, \\ \operatorname{tg} \varphi_2(\alpha) &\sim \operatorname{tg} \varphi_3(\alpha) \sim \frac{9 - \alpha}{18} & \text{при } \alpha \rightarrow 9 - 0. \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Горяйнов В.В. Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками, Матем. сб. **208** (3), 54–71 (2017).
- [2] Горяйнов В.В. Голоморфные отображения полосы в себя с ограниченным искажением на бесконечности, Тр. МИАН, **298**, 101–111 (2017).
- [3] Кудрявцева О.С., Солодов А.П. Двусторонние оценки областей однолиственности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками, Матем. сб. **210** (7), 120–144 (2019).
- [4] Ahlfors L.V. *Conformal invariants: Topics in geometric function theory* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1973).
- [5] Duren P.L. *Univalent functions* (Springer-Verlag, New York, 1983).

Ольга Сергеевна Кудрявцева

Волгоградский государственный технический университет,
пр. им. Ленина, д. 28, г. Волгоград, 400005, Россия,

e-mail: Kudryavceva_OS@mail.ru

Алексей Петрович Солодов

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
ул. Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,*

e-mail: *apsolodov@mail.ru*

O.S. Kudryavtseva and A.P. Solodov

**Two-sided estimate of univalence domains of holomorphic mappings of the disc into itself
with an invariant diameter**

Abstract. We obtain an asymptotically sharp two-sided estimate of univalence domains on classes of holomorphic mappings of the unit disc into itself with two boundary fixed points and an invariant diameter. The estimate depends on the value of the product of the angular derivatives at the boundary fixed points.

Keywords: holomorphic mapping, fixed point, angular derivative, domain of univalence.

Olga Sergeevna Kudryavtseva

*Volgograd State Technical University,
28 Lenin Ave., Volgograd, 400005 Russia,*

e-mail: *Kudryavceva_OS@mail.ru*

Aleksei Petrovich Solodov

*Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory str., Moscow, 119991 Russia,*

e-mail: *apsolodov@mail.ru*