Общероссийский математический портал

В. С. Абрамов, А. А. Бободжанов, М. А. Бободжанова, Метод нормальных форм для нелинейных сингулярно возмущенных систем в случае пересечения собственных значений предельного оператора, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 8, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-8-3-12>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:34:49

В.С. АБРАМОВ, А.А. БОБОДЖАНОВ, М.А. БОБОДЖАНОВА

МЕТОД НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ В СЛУЧАЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Аннотация. Метод регуляризации Ломова обобщается на слабо нелинейные сингулярно возмущенные задачи в случае пересечения корней характеристического уравнения предельного оператора. Для построения асимптотического решения исходной задачи применяется идея регуляризации с помощью нормальных форм, впервые реализованная в нелинейных системах В.Ф. Сафоновым и А.А. Бободжановым.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, нормальная форма, регуляризация, асимптотическая сходимость.

УДК: 517.928

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-8-3-12

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Везде в работе приняты следующие обозначения. Векторы-строки обозначаются в круглых скобках: $b = (b_1, \dots, b_r)$, а векторы-столбцы — в фигурных скобках: $a = \{a_1, \dots, a_r\}$ (так что $a^T = (a_1, \dots, a_r)$). Звездочка означает транспонирование и сопряжение: $b^* = (\bar{b}^T)$. Вводятся мультииндексы $k = (k_1, \dots, k_n)$ измерения $|k| = k_1 + \dots + k_n$. Через $\lambda(t)$ обозначена вектор-строка $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$, а через e_j обозначен j -й орт в пространстве $\mathbb{C}^n$ комплекснозначных n -мерных столбцов. Далее, $(m, \lambda(t)) \equiv m_1 \lambda_1(t) + \dots + m_n \lambda_n(t)$, $(m, u) \equiv m_1 u_1 + \dots + m_n u_n$. Скалярное произведение в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ n -мерных вектор-столбцов (или вектор-строк) вводится обычным образом: для любых векторов $y = \{y_1, \dots, y_n\}$, $z = \{z_1, \dots, z_n\}$, принадлежащих пространству $\mathbb{C}^n$, полагаем по определению $(y, z)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{j=1}^n y_j \bar{z}_j$ (индекс $\mathbb{C}^n$ везде опускается). И, наконец, через $\varphi_j(t)$ будем обозначать $\lambda_j(t)$ -собственный вектор матрицы $A(t)$ ($A(t)\varphi_j(t) \equiv \lambda_j(t)\varphi_j(t)$), а через $\chi_i(t)$ — i -й столбец матрицы $[\Phi^*(t)]^{-1}$, где $\Phi(t) \equiv (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$. Тогда $\chi_i(t)$ — $\bar{\lambda}_i(t)$ -собственный вектор матрицы $A^*(t)$, причем $(\varphi_j(t), \chi_i(t)) = \delta_{ji}$ — символ Кронекера, $i, j = \overline{1, n}$.

Рассмотрим нелинейную сингулярно возмущенную задачу

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \varepsilon f(t, y) + h(t), \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $y = \{y_1, \dots, y_n\}$ — неизвестные вектор-функции, $A(t)$ — известная матрица размера $n \times n$, $f(t, y) = \{f_1, \dots, f_n\}$, $h(t) = \{h_1, \dots, h_n\}$ — известные вектор-функции, $y^0 = \{y_1^0, \dots, y_n^0\} \in \mathbb{C}^n$ — известный постоянный вектор, ε — малый положительный параметр. Предполагаются выполненными следующие условия:

Поступила в редакцию 17.06.2018, после доработки 17.06.2018. Принята к публикации 26.09.2018

1) вектор-функция $h(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$, матрица $A(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^{n \times n})$, $f(y, t)$ — многочлен по y , т. е.

$$f(y, t) = \sum_{0 \leq |m| \leq N} f^{(m)}(t) y^m \equiv \sum_{m_1 + \dots + m_n = 0}^N f^{(m_1, \dots, m_n)}(t) y_1^{m_1} \dots y_n^{m_n}$$

с коэффициентами

$$f^{(m)}(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n), \quad |m| = \overline{0, N}, \quad N < \infty;$$

2) спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет при всех $t \in [0, T]$ требованиям:

- а) $\lambda_1(t) - \lambda_2(t) \equiv tk(t)$, $k(t) \neq 0$, $\lambda_j(t) \neq 0$, $j = \overline{1, n}$;
- б) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $i \neq j$, $i, j = \overline{3, n}$; $\lambda_j(t) \neq \lambda_1(t)$, $\lambda_j(t) \neq \lambda_2(t)$, $j = \overline{3, n}$;
- с) существует матрица $\Phi(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^{n \times n})$ такая, что

$$\Phi^{-1}(t) A(t) \Phi(t) = \Lambda(t) \equiv \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t));$$

- д) $\text{Re } \lambda_j(t) \leq 0$, $j = \overline{1, n}$;

3) спектр $\sigma(A(t)) \equiv \{\lambda_j(t)\}$ нерезонансный, т. е. уравнение (относительно неизвестного мультииндекса m)

$$(m, \lambda(t)) \equiv m_1 \lambda_1(t) + \dots + m_n \lambda_n(t) = \lambda_j(t), \quad |m| \geq 2,$$

не имеет решений ни при каких $t \in [0, T]$ и $j \in \{1, \dots, n\}$ в множестве мультииндексов $\{m\} \equiv \{(m_1, \dots, m_n)\}$ с $|m| = m_1 + \dots + m_n \geq 2$.

Из условий 2а) и 2б) вытекает, что только две точки спектра $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ пересекаются при $t = 0$, оставаясь различными при $t \in (0, T]$. Другие же точки спектра $\{\lambda_j(t)\}$ нигде не пересекаются. При указанных условиях требуется построить регуляризованное асимптотическое решение [1], [2] задачи (1) при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Для этой задачи разработаем алгоритм, основанный на регуляризации системы (1) с помощью нормальных форм, развитый В.Ф. Сафоновым и А.А. Бободжановым и подробно описанный в монографии [3]. В случае стабильности спектра $\sigma(A(t)) \equiv \{\lambda_j(t)\}$ этот алгоритм базируется на идее регуляризации сингулярно возмущенной задачи с помощью вектора $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ регуляризирующих переменных, удовлетворяющих некоторой *диагональной линейной нормальной форме* ([3]). Оказалось, что в случае пересечения корней характеристического уравнения с условиями 2) нормальная форма не будет диагональной, а будет состоять из двух клеток, образующих квазидиагональную матрицу $\{A_1(\varepsilon), \Lambda_0\}$, где $\Lambda_0 = \text{diag}(\lambda_3(t), \dots, \lambda_n(t))$, а $A_1(\varepsilon)$ — многочленная по ε матрица второго порядка. Заметим, что в линейном случае (т. е. при $f(t, y) \equiv 0$) в работе [4] задача (1) была решена с помощью методики, несколько отличной от метода нормальных форм (см. также работу [5]).

2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ (1). РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Пусть выполнены условия 1)–3). Поскольку спектр $\sigma(A(t))$ матрицы $A(t)$ нерезонансный (см. условие 3)), то регуляризацию задачи (1) произведем с помощью вектора $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ регуляризирующих переменных, удовлетворяющих линейной нормальной форме

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = \Lambda(t) u + \sum_{k=1}^{r+1} \varepsilon^k \left(\mu_2^{(k)} e_1 u_2 + \mu_1^{(k)} e_2 u_1 \right), \quad u(0, \varepsilon) = \bar{1}, \quad (2)$$

где $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$, $\bar{1} = \{1, \dots, 1\}$, $e_j = \left\{0, \dots, 0, \underset{(j)}{1}, 0, \dots, 0\right\}$ — j -й орт в $\mathbb{C}^n$,

а постоянные $\mu_j^{(k)}$ определяются в процессе построения асимптотического решения задачи (1). Обращаем внимание на то, что *регуляризирующая нормальная форма* (2) (порядка $r+1$) не будет диагональной. Это вызвано нестабильностью спектра $\{\lambda_j(t)\}$ (см. условие 2а)). Вместо задачи (1) рассмотрим “расширенную задачу”

$$\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial u} \left[\Lambda(t) u + \sum_{k=1}^{r+1} \varepsilon^k \left(\mu_2^{(k)} e_1 u_2 + \mu_1^{(k)} e_2 u_1 \right) \right] - \\ - A(t) \tilde{y} - \varepsilon f(y, t) = h(t), \quad \tilde{y}(t, u, \varepsilon)|_{t=0, u=\bar{1}} = y^0 \quad (3)$$

для функции $\tilde{y} = \tilde{y}(t, u, \varepsilon)$ переменных $t, u = (u_1, \dots, u_n)$ и ε . Ясно, что если $\tilde{y} = \tilde{y}(t, u, \varepsilon)$ — решение задачи (3), то его сужение $y(t, \varepsilon) = \tilde{y}(t, u(t, \varepsilon), \varepsilon)$ на решении $u = u(t, \varepsilon)$ регуляризирующей нормальной формы (2) будет точным решением исходной задачи (1). Поскольку порядок системы дифференциальных уравнений (3) при $\varepsilon = 0$ не понижается, то ее решение можно определять в виде ряда

$$\tilde{y}(t, u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, u) \quad (4)$$

по неотрицательным степеням параметра ε . Подставляя ряд (4) в (3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие итерационные задачи:

$$\mathcal{L} y_0(t, u) \equiv \frac{\partial y_0}{\partial u} \Lambda(t) u - A(t) y_0 = h(t), \quad y_0(0, \bar{1}) = y^0; \quad (4_0)$$

$$\mathcal{L} y_1(t, u) = -\frac{\partial y_0}{\partial t} - \frac{\partial y_0}{\partial u} \left(\mu_2^{(1)} e_1 u_2 + \mu_1^{(1)} e_2 u_1 \right) + f(y, t), \quad y_1(0, \bar{1}) = 0; \quad (4_1)$$

...

$$\mathcal{L} y_{k+1}(t, u) = -\frac{\partial y_k}{\partial t} - \frac{\partial y_k}{\partial u} \left(\mu_2^{(k+1)} e_1 u_2 + \mu_1^{(k+1)} e_2 u_1 \right) - \\ - \sum_{s=1}^k \frac{\partial y_s}{\partial u} \left(\mu_2^{(k+1-s)} e_1 u_2 + \mu_1^{(k+1-s)} e_2 u_1 \right) + P_k(t, y_0, \dots, y_k), \quad y_k(0, \bar{1}) = 0, \quad k \geq 1, \quad (4_k)$$

где $P_k(t, y_0, \dots, y_k)$ — некоторый многочлен от $y_1, \dots, y_{k-1}$ с коэффициентами, зависящими от частных производных функции $f(t, y)$ в точке $y = y_0(t, u)$, причем $P_k(t, y_0, \dots, y_k)$ линеен относительно последнего аргумента y_k .

Решение задач (4_k) будем определять в классе U вектор-функций вида

$$z(t, u) = z_0(t) + \sum_{j=0}^n z_j(t) u_j + \sum_{2 \leq |m| \leq N_z} z^{(m)}(t) u^m, \quad (5)$$

$$z_0(t), z_j(t), z^{(m)}(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n), \quad 2 \leq |m| \leq N_z < \infty,$$

где степень N_z многочлена $z(t, u)$ не фиксируется и зависит от этого многочлена. Изучим сначала разрешимость в классе U первой итерационной задачи (4₀). Имеет место

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1), 2а)–2с). Тогда система (4₀) имеет решение в классе U , представимое в виде

$$y_0(t, u) = \Phi(t) \mathfrak{A}(t) u + y_0^{(0)}(t) \equiv \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \varphi_j(t) u_j + y_0^{(0)}(t), \quad (6)$$

где $\mathfrak{A}(t) = \text{diag}(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$, $\Phi(t) \equiv (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ — матрица из собственных векторов $\varphi_j(t)$ оператора $A(t)$, $y_0^{(0)}(t) \equiv -A^{-1}(t)h(t)$, $\alpha_i(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ — произвольные скалярные функции.

Доказательство. Определяя решение системы (4₀) в виде суммы

$$y_0(t, u) = y_0^{(0)}(t) + \sum_{j=1}^n y_j^{(0)}(t) u_j, \quad (7)$$

получим следующие уравнения для коэффициентов суммы (7):

$$-A(t) y_0^{(0)}(t) = h(t), \quad (7_0)$$

$$[\lambda_i(t) I - A(t)] y_i^{(0)}(t) = 0, \quad i = \overline{3, n}, \quad (7_i)$$

$$[\lambda_1(t) I - A(t)] y_1^{(0)}(t) = 0, \quad (7_1)$$

$$[\lambda_2(t) I - A(t)] y_2^{(0)}(t) = 0. \quad (7_2)$$

Так как $\det A(t) \neq 0 \quad (\forall t \in [0, T])$, то система (7₀) обладает единственным решением $y_0^{(0)}(t) = -A^{-1}(t)h(t)$ в классе $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$. Система (7_i) имеет ([6], с. 84–85) бесчисленное множество решений, представимых в виде $y_i^{(0)}(t) = \alpha_i(t) \varphi_i(t)$, где $\alpha_i(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ — произвольные скалярные функции, $i = \overline{3, n}$. Рассмотрим систему (7₁). Определяя ее решение в виде $y_1^{(0)}(t) = \Phi(t) \xi$ ($\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$), получим следующие уравнения для компонент вектора ξ :

$$0 \cdot \xi_1 = 0, \quad (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \xi_2 = 0, \quad (\lambda_1(t) - \lambda_j(t)) \xi_j = 0 \quad (j = \overline{3, n}). \quad (8)$$

Первое уравнение (8) имеет решение в виде произвольной функции $\xi_1 = \alpha_1(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$; последние уравнения (8) имеют единственные тривиальные решения $\xi_j \equiv 0 \quad (j = \overline{3, n})$. Так как $\lambda_1(0) - \lambda_2(0) = 0$, $\lambda_1(t) - \lambda_2(t) \neq 0 \quad (\forall t \in (0, T])$, то второе уравнение (8) имеет решения, представимые в виде

$$\xi_2 = \xi_2(t) = \begin{cases} \gamma, & t = 0; \\ 0 & \forall t \in (0, T], \end{cases}$$

где γ — произвольная постоянная. Таким образом, формальное решение системы (7₁) имеет вид $y_1^{(0)}(t) = \alpha_1(t) \varphi_1(t) + \xi_2(t) \varphi_2(t)$. Однако поскольку ищем решение системы (4₀) в пространстве U , то $y_1^{(0)}(t) = \alpha_1(t) \varphi_1(t) + \xi_2(t) \varphi_2(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$. Умножая это равенство скалярно на вектор $\chi_2(t)$, получим $\xi_2(t) = (y_1^{(0)}(t), \chi_2(t))$, значит, $\xi_2(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$. В частности, функция $\xi_2(t)$ должна быть непрерывной в точке $t = 0$, т. е. $\lim_{t \rightarrow +0} \xi_2(t) = \xi_2(0)$, откуда вытекает, что $\gamma = 0$, а значит, $\xi_2(t) \equiv 0 \quad (\forall t \in [0, T])$ и решение системы (7₁) имеет вид $y_1^{(0)}(t) = \alpha_1(t) \varphi_1(t)$. Аналогично доказываем, что $y_2^{(0)}(t) = \alpha_2(t) \varphi_2(t)$. Следовательно, решение системы (4₀) имеет вид (6). $\square$

Введем следующие обозначения. Если $w(t, u)$ — многочлен $\sum_{|m|=0}^{N_w} w^{(m)}(t) u^m$, то через $w^{(k)}(t, u)$ будем обозначать сумму его членов измерения $|m| = k$, т. е.

$$w^{(k)}(t, u) = \sum_{|m|=k} w^{(m)}(t) u^m, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_w,$$

а через $U^{(k)} \subset U$ — подпространство класса U , состоящее из всевозможных таких сумм (считаем, что элемент $0 \equiv \sum_{|m|=k} 0 \cdot u^m$ принадлежит пространству $U^{(k)}$). В пространстве

$U^{(k)}$ введем скалярное (при каждом $t \in [0, T]$) произведение

$$\langle w^{(k)}(t, u), z^{(k)}(t, u) \rangle \equiv \left\langle \sum_{|m|=k} w^{(k)}(t) u^m, z^{(k)}(t) u^m \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|m|=k} (w^{(k)}(t), z^{(k)}(t)) = \sum_{|m|=k} (w^{(k)}(t))^T \cdot \overline{z^{(k)}(t)},$$

где $(,)$ — обычное скалярное произведение (при каждом $t \in [0, T]$) в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим в $U^{(1)}$ оператор $\mathcal{L} \equiv \frac{\partial}{\partial u} \Lambda(t) u - A(t)$. Сопряженный к нему оператор имеет вид $\mathcal{L}^* \equiv \frac{\partial}{\partial u} \bar{\Lambda}(t) u - A^*(t)$, а базисом ядра этого оператора будут вектор-функции $\nu_j(t, u) = \chi_j(t) u_j$, $j = \overline{1, n}$. Подчиняя решение (6) системы (40) начальному условию $y_0(0, \bar{1}) = y^0$, будем иметь

$$\alpha_1(0) \varphi_1(0) + \dots + \alpha_n(0) \varphi_n(0) = A^{-1}(0) h(0) + y^0,$$

откуда находим

$$\alpha_j(0) = (A^{-1}(0) h(0) + y^0, \chi_j(0)), \quad j = \overline{1, n}.$$

Если подставим функцию (6) в $f(t, y_0)$, то получим многочлен

$$f(t, y_0(t, u)) = f(t, y_0^{(0)}(t)) + \frac{\partial f(t, y_0^{(0)}(t))}{\partial y} \Phi(t) \text{diag}(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) u + \dots,$$

где точками обозначены члены измерения $|m| \geq 2$ относительно u , откуда

$$f^{(1)}(t, y_0(t, u)) = \frac{\partial f(t, y_0^{(0)}(t))}{\partial y} \Phi(t) \text{diag}(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) u \equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(t, y_0^{(0)}(t))}{\partial y} \varphi_j(t) \alpha_j(t) u_j.$$

Ниже будет показано (см. теорему 3, в которой $H(t, u) \equiv h(t)$), что для разрешимости системы (41) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы имели место тождества

$$\left\langle -\frac{\partial y_0^{(1)}}{\partial t} + f^{(1)}(t, y_0(t, u)), \chi_j(t) u_j \right\rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad j = \overline{1, n}.$$

Подставляя сюда функции (6) и $f^{(1)}(t, y_0(t, u))$, будем иметь

$$\left\langle -\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} (\alpha_j(t) \varphi_j(t)) u_j - \frac{\partial f(t, y_0^{(0)}(t))}{\partial y} \varphi_j(t) \alpha_j(t) u_j \right], \chi_j(t) u_j \right\rangle \equiv 0,$$

или

$$-\dot{\alpha}_j(t) + \left(\frac{\partial f(t, y_0^{(0)}(t))}{\partial y} \varphi_j(t) - \dot{\varphi}_j(t), \chi_j(t) \right) \alpha_j(t) \equiv 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Присоединяя к этим уравнениям начальные условия $\alpha_j(0) = (A^{-1}(0) h(0) + y^0, \chi_j(0))$, $j = \overline{1, n}$, найдем однозначно функции

$$\alpha_j(t) = (A^{-1}(0) h(0) + y^0, \chi_j(0)) \exp \left\{ \int_0^t \left(\frac{\partial f(\theta, y_0^{(0)}(\theta))}{\partial y} \varphi_j(\theta) - \dot{\varphi}_j(\theta), \chi_j(\theta) \right) d\theta \right\}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (9)$$

а значит, построим решение (6) задачи (40) в пространстве U однозначным образом.

Доказана

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1), 2а)–2с). Тогда система (4₀) при дополнительных условиях

$$y_0(0, \bar{1}) = y^0, \quad \left\langle -\frac{\partial y_0^{(1)}}{\partial t} + f^{(1)}(t, y_0(t, u)), \chi_j(t) u_j \right\rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad j = \overline{1, n}, \quad (10)$$

имеет единственное решение в классе U , представимое в виде (6), где скалярные функции $\alpha_j(t)$ имеют вид (9).

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННЫХ ЗАДАЧ (4_k) ПРИ $k \geq 1$

Каждую из итерационных систем (4_k) при их последовательном решении можно представить в виде системы

$$\mathcal{L}y(t, u) = -\frac{\partial y_0}{\partial u}(\mu_2 e_1 u_2 + \mu_1 e_2 u_1) + H(t, u), \quad (11)$$

где $y_0 = y_0(t, u)$ — решение первой итерационной задачи (4₀), μ_1, μ_2 — пока неизвестные числа, $H(t, u) = H_0(t) + \sum_{j=1}^n H_j(t) u_j + \sum_{|m|=2}^{N_H} H^{(m)}(t)$ — известная вектор-функция пространства U .

Теорема 3. Пусть в системе (11) вектор-функция $H(t, u) \in U$, выполнены условия 1, 2а)–2с), 3). Пусть, кроме того, числа $\alpha_j(0) = (y^0 - y_0^{(0)}(0), \chi_j(0)) \neq 0$ ($j = 1, 2$). Тогда существуют единственные постоянные μ_1 и μ_2 такие, что система (11) будет разрешимой в пространстве U тогда и только тогда, когда

$$\langle H(t, u), \nu_j(t, u) \rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad j = \overline{1, n}. \quad (11_a)$$

Доказательство. С учетом формулы (6) запишем правую часть $H(t, u)$ системы (11)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial y_0}{\partial u}(\mu_2 e_1 u_2 + \mu_1 e_2 u_1) + H(t, u) &= -\Phi(t) \mathfrak{A}(t)(\mu_2 e_1 u_2 + \mu_1 e_2 u_1) + H(t, u) = \\ &= -\alpha_1(t) \mu_2 \varphi_1(t) u_2 - \alpha_2(t) \mu_1 \varphi_2(t) u_1 + H_0(t) + \sum_{j=1}^n H_j(t) u_j + \sum_{|m|=2}^{N_H} H^{(m)}(t). \end{aligned}$$

Будем искать решение системы (11) в виде суммы

$$y(t, u) = y_0(t) + \sum_{j=0}^n y_j(t) u_j + \sum_{2 \leq |m| \leq N_y} y^{(m)}(t) u^m. \quad (12)$$

Подставляя эту сумму в (11) и приравнивая отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых u^m , получим следующие системы:

$$-A(t) y_0(t) = H_0(t), \quad (12_0)$$

$$[\lambda_i(t) I - A(t)] y_i(t) = H_i(t), \quad i = \overline{3, n}, \quad (12_i)$$

$$[\lambda_1(t) I - A(t)] y_1(t) = -\alpha_2(t) \mu_1 \varphi_2(t) + H_1(t), \quad (12_1)$$

$$[\lambda_2(t) I - A(t)] y_2(t) = -\alpha_1(t) \mu_2 \varphi_1(t) + H_2(t); \quad (12_2)$$

$$[(m, \lambda(t)) I - A(t)] y^{(m)}(t) = H^{(m)}(t), \quad 2 \leq |m| \leq N_y. \quad (12_m)$$

Система (12₀) имеет единственное решение $y_0(t) = -A^{-1}(t) H_0(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$. Такое же утверждение (в силу условия 3)) справедливо и для систем (12_m). При этом их решения имеют вид $y^{(m)}(t) = [(m, \lambda(t)) I - A(t)]^{-1} H^{(m)}(t)$, $2 \leq |m| \leq N_y$. Для разрешимости систем (12_i) в пространстве $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы имели место тождества

$(H_i(t), \chi_i(t)) \equiv 0 \Leftrightarrow \langle H(t, u), \nu_i(t, u) \rangle \equiv 0 \ (i = \overline{3, n})$. При этом решения систем (12_i) ([6], с. 84–85) записываются в виде

$$y_i(t) = \beta_i(t) \varphi_i(t) + \sum_{s=1, s \neq i}^n \frac{(H_i(t), \chi_s(t))}{\lambda_i(t) - \lambda_s(t)} \varphi_s(t), \quad i = \overline{3, n}, \quad (13)$$

где $\beta_i(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ — произвольные функции, $i = \overline{3, n}$. Рассмотрим систему (12₁). Определяя ее решение в виде $y_1(t) = \Phi(t) \eta$, получим следующие уравнения для компонент вектора $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$:

$$\begin{aligned} (\lambda_1(t) - \lambda_1(t)) \eta_1 &= (-\alpha_2(t) \mu_1 \varphi_2(t) + H_1(t), \chi_1(t)), \\ (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \eta_2 &= (-\alpha_2(t) \mu_1 \varphi_2(t) + H_1(t), \chi_2(t)), \\ (\lambda_1(t) - \lambda_3(t)) \eta_3 &= (-\alpha_2(t) \mu_1 \varphi_2(t) + H_1(t), \chi_3(t)), \\ &\dots \\ (\lambda_1(t) - \lambda_n(t)) \eta_n &= (-\alpha_2(t) \mu_1 \varphi_2(t) + H_1(t), \chi_n(t)). \end{aligned}$$

Здесь воспользовались тем, что

$$\Phi^{-1}(t) g(t) \equiv \{(g(t), \chi_1(t)), \dots, (g(t), \chi_n(t))\}.$$

Учитывая биортонормированность системы векторов $\{\varphi_j(t)\}$ и $\{\chi_i(t)\}$, перепишем предыдущие уравнения в виде

$$\begin{aligned} 0 \cdot \eta_1 &= (H_1(t), \chi_1(t)), \\ (\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \eta_2 &= -\alpha_2(t) \mu_1 + (H_1(t), \chi_2(t)), \\ (\lambda_1(t) - \lambda_3(t)) \eta_3 &= (H_1(t), \chi_3(t)), \\ &\dots \\ (\lambda_1(t) - \lambda_n(t)) \eta_n &= (H_1(t), \chi_n(t)). \end{aligned}$$

Для разрешимости первого уравнения этой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$(H_1(t), \chi_1(t)) \equiv 0 \Leftrightarrow \langle H(t, u), \nu_1(t, u) \rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

При этом $\eta_1 = \eta_1(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция. Уравнения для η_i , $i = \overline{3, n}$, имеют единственные решения

$$\eta_i = \frac{(H_1(t), \chi_i(t))}{\lambda_1(t) - \lambda_i(t)}, \quad i = \overline{3, n}. \quad (14)$$

Уравнение $(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \eta_2 = -\alpha_2(t) \mu_1 + (H_1(t), \chi_2(t))$ при $t \in (0, T]$ имеет решение

$$\eta_2 = \eta_2(t) = \frac{-\alpha_2(t) \mu_1 + (H_1(t), \chi_2(t))}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)} = \frac{-\alpha_2(t) \mu_1 + (H_1(t), \chi_2(t))}{tk(t)},$$

а при $t = 0$ приобретает вид $0 \cdot \eta_2(0) = -\alpha_2(0) \mu_1 + (H_1(0), \chi_2(0))$, откуда с необходимостью получаем

$$\mu_1 = (H_1(0), \chi_2(0)) / \alpha_2(0). \quad (15)$$

При этом $\eta_2(0) = \sigma$ — произвольное число, а решение уравнения $(\lambda_1(t) - \lambda_2(t)) \eta_2 = -\alpha_2(t) \mu_1 + (H_1(t), \chi_2(t))$ запишется в виде

$$\eta_2(0) = \sigma, \eta_2(t) = \frac{-\frac{\alpha_2(t)}{\alpha_2(0)} (H_1(0), \chi_2(0)) + (H_1(t), \chi_2(t))}{t \cdot k(t)} = \psi(t), \quad t \in (0, T]. \quad (16)$$

Вектор-функция $y_1(t) = \Phi(t)\eta(t) = \eta_2(t)\varphi_2(t) + \sum_{j=1, j \neq 2}^n \eta_j(t)\varphi_j(t)$ принадлежит классу $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$, значит, $\eta_2(t) = (y_1(t), \chi_2(t)) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$. Отсюда, в частности, получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} \eta_2(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \psi(t) = \sigma,$$

т. е. σ в (16) определяется однозначно. Заметим, что формулу для $\eta_2(t)$ можно записать единым образом: $\eta_2(t) = \psi(t) \forall t \in [0, T]$, считая, что это равенство в точке $t = 0$ понимается в предельном смысле. Таким образом, выбирая постоянную μ_1 в виде (15), найдем решение системы (12₁) в виде суммы

$$y_1(t) = \Phi(t)\eta(t) = \eta_1(t)\varphi_1(t) + \psi(t)\varphi_2(t) + \sum_{i=3}^n \frac{(H_1(t), \chi_i(t))}{\lambda_1(t) - \lambda_i(t)} \varphi_i(t), \quad (17)$$

где $\eta_1(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция, а все остальные слагаемые вычисляются однозначно.

Рассмотрим теперь систему (12₂). Рассуждая аналогичным образом, показываем, что выбирая постоянную μ_2 в виде

$$\mu_2 = (H_2(0), \chi_1(0)) / \alpha_1(0), \quad (18)$$

убеждаемся, что для разрешимости системы (12₂) в пространстве $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись тождества

$$(H_2(t), \chi_2(t)) \equiv 0 \rightarrow \langle H(t, u), \nu_2(t, u) \rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

При этом решение (12₂) системы запишется в виде суммы

$$y_2(t) = \Phi(t)\varsigma(t) = \varsigma_2(t)\varphi_2(t) + \frac{-\frac{\alpha_1(t)}{\alpha_1(0)}(H_2(0), \chi_1(0)) + (H_2(t), \chi_1(t))}{-t \cdot k(t)} \varphi_1(t) + \sum_{i=3}^n \frac{(H_2(t), \chi_i(t))}{\lambda_2(t) - \lambda_i(t)} \varphi_i(t), \quad (19)$$

где $\varsigma_2(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ — произвольная функция, а остальные слагаемые вычисляются однозначно. $\square$

Перейдем к выяснению условий однозначной разрешимости итерационной системы (11) при дополнительных условиях

$$y(0, \bar{1}) = y_*, \left\langle -\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y_0}{\partial u} (\hat{\mu}_2 e_1 u_2 + \hat{\mu}_1 e_2 u_1) + G(t, u), \nu_j(t, u) \right\rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad j = \overline{1, n}, \quad (20)$$

где $\hat{\mu}_2, \hat{\mu}_1$ — произвольные постоянные, $G(t, u) \in U$ — известная вектор-функция, $y_* \in \mathbb{C}^n$ — известный постоянный вектор. Имеет место

Теорема 4. Пусть в системе (11) вектор-функция $H(t, u) \in U$ удовлетворяет условиям ортогональности (11а) и выполнены условия 1, 2а)–2с), 3). Пусть, кроме того, числа $\alpha_j(0) = (y^0 - y_0^{(0)}(0), \chi_j(0)) \neq 0$, $j = 1, 2$, а постоянные μ_1 и μ_2 выбраны в виде (15) и (18). Тогда задача (12), (20) однозначно разрешима в пространстве U .

Доказательство. Поскольку выполнены условия ортогональности (11а), то система (11) имеет решение в классе U в виде вектор-функции (12), в которой все слагаемые $y_0(t), y^{(m)}(t)$ ($2 \leq |m| \leq N_y$) найдены однозначно; коэффициенты $y_i(t)$ при $i = \overline{3, n}$ имеют вид (13), а при $i = 1, 2$ — вид (17) и (19). При этом $\beta_i(t), \eta_1(t)$ и $\varsigma_2(t)$ — пока произвольные функции класса

$C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ (все остальные слагаемые в (17) и (19) найдены однозначно). Подчиняя (12) начальному условию $y(0, \bar{1}) = y_*$, получим равенство

$$\eta_1(0)\varphi_1(0) + \varsigma_2(0)\varphi_2(0) + \sum_{i=1}^n \beta_i(0)\varphi_i(0) = z_*,$$

где $z_* \in \mathbb{C}^n$ — известный постоянный вектор. Умножая скалярно это равенство поочередно на $\chi_1(0)$, $\chi_2(0)$ и $\chi_i(0)$, $i = \overline{3, n}$, найдем значения

$$\eta_1(0) = (z_*, \chi_1(0)), \quad \varsigma_2(0) = (z_*, \chi_2(0)), \quad \beta_i(0) = (z_*, \chi_i(0)), \quad i = \overline{3, n}. \quad (21)$$

Подставляя функцию (12) во второе условие (20), получим n скалярных, не зависящих друг от друга линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\eta_1(t)$, $\varsigma_2(t)$, $\beta_i(t)$, $i = \overline{3, n}$, решая которые совместно с начальными условиями (21), найдем однозначно функции $\eta_1(t)$, $\varsigma_2(t)$, $\beta_i(t)$, $i = \overline{3, n}$, а значит, построим решение системы (11) в пространстве U однозначным образом. $\square$

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ХАРАКТЕР ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)

Пусть выполнены условия 1)–3). Тогда (согласно теоремам 1–4) для всех итерационных задач (4₀), ..., (4_r) будут однозначно найдены решения $y_0(t, u)$, ..., $y_r(t, u)$ в пространстве U при одновременном построении регуляризирующей нормальной формы (2) порядка $r+1$. При указанных условиях можно построить частичную сумму $S_r(t, u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^r \varepsilon^k y_k(t, u)$ ряда (4), в которой все $y_k(t, u) \in U$. В силу условий 2с), 2d) фундаментальная матрица Коши $Y(t, s, \varepsilon) = \exp(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \Lambda(\theta) d\theta)$ однородной системы $\varepsilon \frac{dy}{dt} = \Lambda(t)y$ ограничена при всех $(t, s, \varepsilon) \in \{0 \leq s \leq t \leq T\} \times \{\varepsilon > 0\}$. Отсюда следует, что решение нормальной формы удовлетворяет оценкам

$$|u_i(t, \varepsilon)| < 1 + \delta \quad \forall (t, \varepsilon) \in [0, T] \times (0, \varepsilon_0], \quad i = \overline{1, n},$$

где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, $\delta > 0$ не зависит от ε , поэтому сужение $y_{\varepsilon r}(t)$ частичной суммы $S_r(t, u, \varepsilon)$ на решении $u = u(t, \varepsilon)$ регуляризирующей формы (2) порядка $r+1$ будет формальным асимптотическим решением задачи (1), т. е. имеет место тождество

$$\varepsilon dy_{\varepsilon r}(t)/dt - A(t)y_{\varepsilon r}(t) - \varepsilon F(y_{\varepsilon r}(t), t) \equiv h(t) + \varepsilon^{r+1}R_r(t, \varepsilon), \quad y_{\varepsilon r}(0) = y^0, \quad (22)$$

где $\|R_r(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} \leq \bar{R}_r > 0$ — постоянная, не зависящая от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r)$. Используя тождество (23) и результаты монографии ([6], с. 163–166), нетрудно доказываем

Теорема 5. Пусть для системы (1) выполнены условия 1, 2а)–2d), 3. Пусть, кроме того, числа $\alpha_j(0) = (y^0 - y_0^{(0)}(0), \chi_j(0)) \neq 0$, $j = 1, 2$, а постоянные $\mu_1^{(k)}$ и $\mu_2^{(k)}$ выбраны в соответствии с разрешимостью итерационных задач (4_k) в пространстве U . Тогда задача (1) однозначно разрешима в пространстве $C^1([0, T], \mathbb{C}^\infty)$ и для ее решения $y(t, \varepsilon)$ справедлива оценка $\|y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon r}(t)\|_{C[0, T]} \leq C_r \varepsilon^{r+1}$ ($r = 0, 1, 2, \dots$), где постоянная $C_r > 0$ не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r)$.

Заметим, что метод нормальных форм обобщается и на более сложные нелинейные сингулярно возмущенные задачи (например, [7], [8]). Однако для нелинейных резонансных систем в случае пересечения собственных значений он пока не разработан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений* (Наука, М., 1981).
- [2] Ломов С.А., Ломов И.С. *Основы математической теории пограничного слоя* (Изд-во Моск. ун-та, М., 2011).
- [3] Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А. *Метод нормальных форм для нелинейных резонансных сингулярно возмущенных задач* (Изд-во "Спутник+", М., 2016).
- [4] Елисеев А.Г. *Теория сингулярных возмущений в случае "слабой" точки поворота у предельного оператора*, Вестн. МЭИ, № 6, 31–41 (1997).
- [5] Елисеев А.Г., Ломов С.А. *Теория сингулярных возмущений в случае сингулярных особенностей предельного оператора*, Матем. сб. **131** (4), 544–557 (1986).
- [6] Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А. *Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации: учебное пособие* (Изд. дом МЭИ, М., 2012).
- [7] Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. *Асимптотика решений нелинейных сингулярно возмущенных систем в критическом случае*, Вестн. МЭИ, № 6, 10–17 (1997).
- [8] Сафонов В.Ф. *Регуляризованные асимптотические решения сингулярно возмущенных задач в критическом случае*, Изв. вузов. Матем. **384** (5), 41–48 (1994).

Владислав Сергеевич Абрамов
 Национальный исследовательский университет МЭИ,
 Красноказарменная ул., д. 14, г. Москва, 111250, Россия,
 e-mail: bajldau@ya.ru

Абдухафиз Абдурасулович Бободжанов
 Национальный исследовательский университет МЭИ,
 Красноказарменная ул., д. 14, г. Москва, 111250, Россия,
 e-mail: bobojanova@mpei.ru

Машхура Абдухафизовна Бободжанова
 Национальный исследовательский университет МЭИ,
 Красноказарменная ул., д. 14, г. Москва, 111250, Россия,
 e-mail: bobojanovama@mpei.ru

V.S. Abramov, A.A. Bobodzhonov, and M.A. Bobodzhonova

A method of normal forms for nonlinear singularly perturbed systems in case of intersection of eigenvalues of limit operator

Abstract. The Lomov regularization method is generalized on weakly nonlinear singularly perturbed problems in the case of intersection of the roots of the characteristic equation of the limit operator. To construct asymptotic solutions, we use the idea of initial problems with the use of normal forms, first realized in nonlinear systems by Safonov V.F. and Bobodzhonov A.A.

Keywords: singularly perturbed, normal form, regularization, asymptotic convergence.

Vladislav Sergeevich Abramov
 National research University "MEI",
 14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250 Russia,
 e-mail: bajldau@ya.ru

Abdukhafiz Abdurasulovich Bobodzhonov
 National research University "MEI",
 14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250 Russia,
 e-mail: bobojanova@mpei.ru

Mashkhura Abdukhafizovna Bobodzhonova
 National research University "MEI",
 14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250 Russia,
 e-mail: bobojanovama@mpei.ru