Общероссийский математический портал

А. А. Косов, Э. И. Семенов, Функция Ламберта и точные решения нелинейных параболических уравнений, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 8, 13–20

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-8-13-20>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:54:01

А.А. КОСОВ, Э.И. СЕМЕНОВ

ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. В статье рассматриваются уравнения диффузии со степенным коэффициентом и нелинейным источником. Основное внимание уделяется построению точных решений, выражаемых через функцию Ламберта. Доказан ряд утверждений, определяющих условия на функцию источника, гарантирующие существование точных решений определенного вида. Приводятся примеры точных решений нелинейных уравнений диффузии (в том числе с полиномиальными и дробно-рациональными функциями источника), иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: уравнение нелинейной диффузии, функция Ламберта, точные решения.

УДК: 517.958

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-8-13-20

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При построении точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных нахождение искомой функции зачастую сводится к разрешимости трансцендентных уравнений. Например, некоторые задачи построения точных решений нелинейных параболических уравнений приводятся к трансцендентным уравнениям следующих видов:

$$a\Phi + b \ln \Phi = g(x) \quad \text{или} \quad b\Phi e^{a\Phi} = h(x), \quad (1)$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$ — вещественные параметры, $g(x)$, $h(x)$ — некоторые заданные функции. Здесь искомой переменной является Φ . Как известно, уравнения (1) не имеют решений в элементарных функциях, однако их решения легко выписать с помощью функции Ламберта W [1]–[5]. Эти решения имеют вид

$$\Phi = \frac{b}{a} W(Z), \quad Z = \frac{a}{b} \exp\left(\frac{g(x)}{b}\right), \quad (2)$$

$$\Phi = \frac{1}{a} W(Z), \quad Z = \frac{a h(x)}{b}. \quad (3)$$

Здесь $W(Z)$ — функция Ламберта аргумента Z , которая определяется функциональным уравнением $Z = W \exp W$ или $\ln Z = W + \ln W$, а ее производная имеет вид

$$\frac{dW(Z)}{dZ} = \frac{W(Z)}{Z(1+W(Z))}. \quad (4)$$

Поступила в редакцию 18.06.2018, после доработки 18.06.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №19-08-00746).

Соотношение (4) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), которому удовлетворяет функция Ламберта. В формулах (1)–(3) переменная Φ может быть функцией независимого действительного аргумента y , т. е. $\Phi = \Phi(y)$. Если функция $\Phi(y)$ является строго монотонной, то из формул (2), (3) находим соответственно

$$y = \Phi^{-1} \left(\frac{b}{a} W \left(\frac{a}{b} \exp \left(\frac{g(x)}{b} \right) \right) \right), \quad y = \Phi^{-1} \left(\frac{1}{a} W \left(\frac{a h(x)}{b} \right) \right),$$

где Φ^{-1} — функция, обратная к функции $\Phi(y)$, существующая в силу монотонности последней. Функция Ламберта не является ни четной, ни нечетной функцией. Она определена в интервале $(-1/e, \infty)$, где принимает значения от $-\infty$ до ∞ , причем для отрицательных значений Z функция двужначна. Имеются следующие асимптотики:

$$W(Z)|_{Z \rightarrow \infty} = \log Z - \log(\log Z), \quad W(Z)|_{Z \rightarrow -\frac{1}{e}} = \sqrt{2(eZ + 1)} - 1.$$

Цель данной статьи — продемонстрировать удобство использования и эффективность функции Ламберта для построения точных решений нелинейных параболических уравнений. Будем рассматривать нелинейные уравнения диффузии различного вида. Для таких уравнений точные решения, представленные элементарными и иными классами функций, были найдены в ряде работ [6]–[12].

2. СВЕДЕНИЕ К УРАВНЕНИЮ АБЕЛЯ ВТОРОГО РОДА

Пусть дано уравнение типа нелинейной теплопроводности

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma} u_x^2 + \frac{\mu}{x} uu_x, \quad u = u(x, t), \quad (5)$$

где $\sigma \neq 0$ — вещественный параметр нелинейности, μ — произвольный вещественный параметр, который может принимать значения любого знака. Уравнение (5) простой заменой $u = v^\sigma$ можно переписать как $v_t = (v^\sigma v_x)_x + \frac{\mu}{x} v^\sigma v_x$. При $\mu = 0$ это классическое уравнение теплопроводности со степенным коэффициентом теплопроводности. Отметим, что при $\mu = n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, к уравнению (5) сводится многомерное уравнение нелинейной диффузии

$$U_t = \nabla(U^\sigma \nabla U), \quad U = U(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим предельные (экспоненциальные) автомодельные [13], [14] решения уравнения (5), т. е. решения вида

$$u(x, t) = e^{\alpha t} w(z), \quad z = x e^{-\frac{\alpha}{2} t}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0. \quad (6)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция (6) будет решением уравнения (5) в том случае, если функция $w(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) вида

$$w \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \left(\frac{\mu}{z} w + \frac{\alpha}{2} z \right) \frac{dw}{dz} - \alpha w = 0.$$

Пусть $\sigma = 1$, тогда для редукции этого ОДУ к дифференциальному уравнению первого порядка используем замену $w w_z = \psi(z) + \varphi(z) w$, где функции $\psi(z)$, $\varphi(z)$ подлежат определению. После этой замены и тождественных преобразований находим $\mu = -3$, $\psi(z) = A z^3$, $\varphi(z) = -\frac{\alpha}{2} z$. Поэтому отыскание функции $w(z)$ сводится к уравнению Абеля второго рода

$$w \frac{dw}{dz} + \frac{\alpha z}{2} w - A z^3 = 0, \quad (7)$$

где $A \neq 0$ — константа. Общее решение ОДУ (7) представимо в параметрическом виде [15] соотношениями, содержащими функции Бесселя. Однако, как будет показано ниже, нетрудно выписать в явном виде частное решение уравнения Абеля (7) через функцию Ламберта.

Утверждение 1. *Существует частное решение уравнения Абеля (7), выражающееся через функцию Ламберта.*

Доказательство. Заменой $w(z) = w(r)$, где $r = \alpha z^2$, перепишем (7) в виде

$$w \frac{dw}{dr} + \frac{1}{4} w = \frac{A}{2\alpha} r. \quad (8)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнение (8) имеет частное решение $w_0(r) = br$, где постоянная b удовлетворяет алгебраическому уравнению $b^2 + \frac{b}{4} - \frac{A}{2\alpha} = 0$. Будем отыскивать решение уравнения (8) как $w_1(r) = w_0(r) (1/f(r) + 1)$, где $f(r)$ — новая искомая функция. После подстановки функции $w_1(r)$ в (8) и несложных тождественных преобразований получим уравнение для функции $f(r)$

$$\frac{df}{dr} = \frac{af^2 + f}{r(f+1)}, \quad a = 2 + \frac{1}{4b}. \quad (9)$$

Видно, что при $a = 0$, т. е. в случае $b = -1/8$, соотношение (9) совпадает с формулой производной функции Ламберта (4). Поэтому $f(r) = W(r)$ есть функция Ламберта. Определяя из алгебраического уравнения постоянную A , с учетом $b = -1/8$, и возвращаясь к исходным переменным, окончательно получим следующее решение уравнения Абеля (7):

$$w(z) = -\frac{\alpha (1 + W(\alpha z^2))}{8W(\alpha z^2)} z^2,$$

где $W(Z)$ — функция Ламберта аргумента $Z = \alpha z^2$, $\alpha \neq 0$ — параметр. $\square$

Поскольку предъявлено точное решение уравнения Абеля (7), то теперь легко выписать явное решение уравнения (5), выражающееся через функцию Ламберта, при следующих значениях параметров: $\sigma = 1$ и $\mu = -3$.

Пример 1. Уравнение типа нелинейной теплопроводности $u_t = uu_{xx} + u_x^2 - \frac{3}{x} uu_x$ обладает точным решением

$$u(x, t) = -\frac{\alpha (1 + W(\alpha x^2 e^{-\alpha t}))}{8W(\alpha x^2 e^{-\alpha t})} x^2,$$

где $W(Z)$ — функция Ламберта аргумента $Z = \alpha x^2 e^{-\alpha t}$, $\alpha \neq 0$ — произвольный параметр.

3. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Утверждение 2. *Нелинейное параболическое уравнение*

$$u_t = u_{xx} + F(u), \quad u = u(x, t), \quad (10)$$

где

$$F(u) = -f(u) (1 + df/du), \quad f(u) = 1 / \left(\frac{d}{du} Q(s(u)) \right), \quad s(u) = b\Phi(u)e^{a\Phi(u)}, \quad (11)$$

$Q(\cdot)$, $\Phi(u)$ — некоторые строго монотонные дважды дифференцируемые функции, имеет решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = \Phi^{-1} \left[\frac{1}{a} W \left(\frac{a}{b} Q^{-1}(x - t + C) \right) \right]. \quad (12)$$

Здесь Q^{-1} — функция, обратная к функции $Q(\cdot)$, Φ^{-1} — функция, обратная к функции $\Phi(u)$, W — функция Ламберта соответствующего аргумента, $a \neq 0$, $b \neq 0$, C — произвольные постоянные.

Доказательство. Будем отыскивать решения типа бегущей волны, т.е. функции вида $u(x, t) = u(\xi)$, где $\xi = x - t$. Для новой переменной ξ нелинейное параболическое уравнение (10) сводится к ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi} + F(u) = 0,$$

которое простой заменой $\frac{du}{d\xi} = y(u)$ преобразуется к уравнению Абеля второго рода

$$y \frac{dy}{du} + y + F(u) = 0. \quad (13)$$

Непосредственной подстановкой в (13) устанавливаем, что $y = f(u) = 1/\frac{d}{du}Q(s(u))$ является точным решением (13) с функцией $F(u)$, определяемой по формуле (11). Теперь из уравнения $\frac{du}{d\xi} = f(u)$ находим $\xi + C = \int \frac{du}{f(u)}$, откуда получаем

$$x - t + C = \int \left[\frac{d}{du}Q(s(u)) \right] du = Q(s(u)).$$

Ввиду монотонности Q для нее существует обратная функция Q^{-1} , поэтому из равенства $Q(s(u)) = x - t + C$ имеем $b\Phi(u)e^{a\Phi(u)} = Q^{-1}(x - t + C)$. Отсюда по формуле (3) и в силу монотонности функции $\Phi(u)$ получим решение (12). $\square$

Замечание. Утверждение останется справедливым и для $s(u) = a\Phi(u) + b \ln(\Phi(u))$. В этом случае решение нелинейного параболического уравнения (10) имеет вид

$$u(x, t) = \Phi^{-1} \left[\frac{b}{a} W \left(\frac{a}{b} \exp \left(\frac{Q^{-1}(x - t + C)}{b} \right) \right) \right],$$

где Φ^{-1} — функция, обратная к функции $\Phi(u)$, W — функция Ламберта соответствующего аргумента, $a \neq 0$, $b \neq 0$, C — произвольные постоянные.

В примерах 2–7 нужно учесть, что $W(z)$ — функция Ламберта с аргументом z .

Пример 2. Пусть $\Phi(u) = u - 1$, $a = 1$, $b = e$, в этом случае $s(u) = (u - 1)e^u$. Тогда, полагая $Q(s) = \ln s$, получим $f(u) = (u - 1)/u$ и из утверждения 2 следует, что нелинейное параболическое уравнение $u_t = u_{xx} - 1 + u^{-1} - u^{-2} + u^{-3}$, $u = u(x, t)$, имеет точное решение типа бегущей волны $u(x, t) = 1 + W(\exp(x - t + C))$, C — произвольная постоянная.

Пример 3. Пусть $\Phi(u) = \alpha + \beta/u$, $a = -1/\alpha$, $b = 1$, в этом случае $s(u) = (\alpha + \beta/u) \exp(-1 - \beta/(\alpha u))$, где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ — произвольные параметры. Тогда, полагая $Q(s) = \frac{\alpha}{\beta^2} (1 + \ln s)$, имеем $f(u) = \alpha u^3 + \beta u^2$ и из утверждения 2 получим, что нелинейное параболическое уравнение $u_t = u_{xx} - 3\alpha^2 u^5 - 5\alpha\beta u^4 - (\alpha + 2\beta^2) u^3 - \beta u^2$, $u = u(x, t)$, имеет точное решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = -\beta / \left\{ \alpha \left[1 + W \left(-\frac{1}{\alpha} \exp \left(\frac{\beta^2}{\alpha} (x - t) + C \right) \right) \right] \right\},$$

C — произвольная постоянная.

Необходимо отметить, что уравнения диффузии со степенным коэффициентом диффузии и полиномиальной второй степени по u функцией источника $F(u)$ рассматривались в работе [12], где для них были построены классы точных решений.

Пример 4. Пусть $\Phi(u) = 1/u$, $a = 1$, $b = 1$, в этом случае $s(u) = (1/u) \exp(1/u)$. Тогда полагая $Q(s) = \ln s$, имеем $f(u) = -u^2/(1+u)$ и из утверждения 2 следует, что нелинейное параболическое уравнение $u_t = u_{xx} + u^2/(u+1)^3$, $u = u(x, t)$, имеет точное решение типа бегущей волны $u(x, t) = 1/W(\exp(x - t + C))$, C — произвольная постоянная.

Пример 5. Пусть $\Phi(u) = e^u - 1$, $a = 1$, $b = e$, в этом случае $s(u) = (e^u - 1) \exp(e^u)$. Тогда, полагая $Q(s) = \ln s$, имеем $f(u) = e^{-u} - e^{-2u}$ и из утверждения 2 следует, что нелинейное параболическое уравнение $u_t = u_{xx} - e^{-u} + 2e^{-2u} - 3e^{-3u} + 2e^{-4u}$, $u = u(x, t)$, имеет точное решение типа бегущей волны $u(x, t) = \ln(W(\exp(x - t + C)) + 1)$, C — произвольная постоянная.

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДИФФУЗИИ

Утверждение 3. *Существуют частные точные автомодельные решения уравнений нелинейной теплопроводности*

$$u_t = (u^{-2}u_x)_x, \quad u = u(x, t) \quad \text{или} \quad v_t = v^2v_{xx}, \quad v = v(x, t), \quad (14)$$

выражающиеся через функцию Ламберта W .

Доказательство. Сперва отметим, что одно из уравнений (14) переходит в другое простой заменой $u = v^{-1}$. Поэтому доказательство проведем для уравнения с $u(x, t)$, для которого будем отыскивать предельные (экспоненциальные) автомодельные решения (6), удовлетворяющие ОДУ второго порядка

$$w \frac{d^2w}{dz^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 + \frac{\alpha z}{2} \frac{dw}{dz} - \alpha w = 0. \quad (15)$$

Подстановкой $w(z) = z^2 y(\eta)$, $\eta = \ln z$ ОДУ (15) преобразуется к автономному ОДУ относительно новой функции $y(\eta)$

$$y \frac{d^2y}{d\eta^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^2 + \left(y + \frac{\alpha}{2} \right) \frac{dy}{d\eta} = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) сводится к квадратуре $\int \frac{dy}{C_1 y^{1/2-2y+\alpha}} = \eta + C_2$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Пусть $\alpha = -C_1^2/8$, $C_1 \neq 0$, тогда интеграл в левой части этого равенства можно преобразовать к виду $8 \int \frac{dy}{(4\sqrt{y}-C_1)(C_1-4\sqrt{y})}$. Заменой $4\sqrt{y} - C_1 = \tau$ этот интеграл преобразуется к $-\int \left(\frac{1}{\tau} + \frac{C_1}{\tau^2} \right) d\tau$, вычислив который, имеем $C_1/\tau - \ln \tau = \eta + C_2$. После потенцирования получим $T \exp T = C_1 \exp(\eta + C_2)$, где $T = C_1/\tau$. Решение этого уравнения выражается [1] через функцию Ламберта, и имеет вид $T = W(C \exp \eta)$, где $C = C_1 \exp C_2$ — новая произвольная постоянная. Возвращаясь к функции w от переменной z , находим $w(z) = -\frac{\alpha z^2 (W(Cz) + 1)^2}{2W^2(Cz)}$, где $C \neq 0$ — новая произвольная постоянная. Отсюда по формуле (6) окончательно получим следующие точные решения нелинейных уравнений теплопроводности (14):

$$u(x, t) = \frac{W(Cxe^{\alpha^2 t})}{\alpha x (W(Cxe^{\alpha^2 t}) + 1)} \quad \text{или} \quad v(x, t) = \frac{\alpha x (W(Cxe^{\alpha^2 t}) + 1)}{W(Cxe^{\alpha^2 t})}, \quad (17)$$

где $W(Z)$ — функция Ламберта, $\alpha \neq 0$ — произвольный параметр, $C \neq 0$ — произвольная постоянная. $\square$

Покажем, что помимо функций (17) уравнения нелинейной теплопроводности (14) обладают и другими решениями, выражающимися через функцию Ламберта.

Утверждение 4. *Существуют частные автомодельные решения типа бегущей волны уравнений нелинейной теплопроводности (14), выражающиеся через функцию Ламберта.*

Доказательство. Как уже было отмечено, одно из уравнений (14) переходит в другое простой заменой $u = v^{-1}$. Поэтому доказательство утверждения проведем для уравнения с $v(x, t)$, для которого будем отыскивать автомодельные решения типа бегущей волны, т. е. функции вида $v(x, t) = v(\xi)$, где $\xi = x - \beta t$, $\beta \neq 0$ — произвольный параметр. Для новой переменной ξ уравнение (14) для функции $v(x, t)$ сводится к ОДУ второго порядка $v^2 \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \beta \frac{dv}{d\xi} = 0$, которое заменой $\frac{dv}{d\xi} = y(v)$ сводится к линейному $v^2 \frac{dy}{dv} + \beta = 0$. Общее решение этого ОДУ имеет вид $y(v) = \beta v^{-1} + C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Пусть $C_1 \neq 0$, тогда, проинтегрировав ОДУ $\frac{dv}{d\xi} = \beta v^{-1} + C_1$, для определения функции v получим трансцендентное уравнение $\frac{v}{C_1} - \frac{\beta}{C_1^2} \ln(C_1 v + \beta) = \xi + C_2$, которое тождественными преобразованиями приведем к виду $\frac{V}{C_1} - \frac{\beta}{C_1^2} \ln(V) = \xi + C$, $V = C_1 v + \beta$. Здесь $C = C_2 + \beta/C_1^2 \neq 0$ — новая постоянная. Решение этого трансцендентного уравнения выражается формулой (2) и имеет вид $v = -\frac{\beta}{C_1} (1 + W(Z))$, $Z = -\beta \exp\left(-\frac{C_1^2}{\beta} (\xi + C)\right)$, где $W(Z)$ — функция Ламберта. Теперь можно выписать окончательный вид автомодельных решений уравнений (14) $v(x, t) = -\frac{\beta}{C_1} (1 + W(Z))$, $u(x, t) = \left[-\frac{\beta}{C_1} (1 + W(Z))\right]^{-1}$, $Z = -\beta \exp\left(-\frac{C_1^2}{\beta} (x - \beta t + C)\right)$, выражающихся через функцию Ламберта W . $\square$

Отметим, что уравнения (14) являются особыми с точки зрения теории групп (например, [16]), преобразованием годографа они сводятся к линейному уравнению $\bar{u}_t = \bar{u}_{xx}$.

Утверждение 5. *Нелинейное параболическое уравнение*

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + F(u), \quad u = u(x, t),$$

где $F(u) = -\left[u^\sigma f(u) \frac{df}{du} + \sigma u^{\sigma-1} f^2(u) + f(u)\right]$, $f(u) = 1/\frac{d}{du} Q(s(u))$, $s(u) = b\Phi(u)e^{a\Phi(u)}$, $Q(\cdot)$, $\Phi(u)$ — некоторые строго монотонные дважды дифференцируемые функции, имеет точное решение типа бегущей волны

$$u(x, t) = \Phi^{-1} \left[\frac{1}{a} W \left(\frac{a}{b} Q^{-1}(x - t + C) \right) \right].$$

Здесь Q^{-1} — функция, обратная к функции $Q(\cdot)$, Φ^{-1} — функция, обратная к функции $\Phi(u)$, W — функция Ламберта соответствующего аргумента, $a \neq 0$, $b \neq 0$, C — произвольные постоянные.

Доказательство полностью повторяет схему доказательства утверждения 2.

Пример 6. Пусть $\Phi(u) = \alpha + \frac{\beta}{u}$, $a = -\frac{1}{\alpha}$, $b = 1$, тогда $s(u) = \left(\alpha + \frac{\beta}{u}\right) \exp\left(-1 - \frac{\beta}{\alpha u}\right)$, где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ — произвольные параметры. Полагая $Q(s) = \frac{\alpha}{\beta^2} (1 + \ln s)$, имеем $f(u) = \alpha u^3 + \beta u^2$. Из утверждения 5 получим, что нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x - \alpha u^3 - \beta u^2 - (2 + \sigma)\beta^2 u^{\sigma+3} - (5 + 2\sigma)\alpha\beta u^{\sigma+4} - (\sigma + 3)\alpha^2 u^{\sigma+5} \quad (18)$$

имеет точное решение типа бегущей волны следующего вида:

$$u(x, t) = -\beta / \left\{ \alpha \left[1 + W \left(-\frac{1}{\alpha} \exp \left(\frac{\beta^2}{\alpha} (x - t) + C \right) \right) \right] \right\},$$

C — произвольная постоянная. Можно заметить, что при $\sigma = -2$, $\alpha = -1$ уравнение (14) для функции $u(x, t)$ и уравнение (18) совпадают, т.е. в этом случае получим результат утверждения 4.

Пример 7. Пусть $\Phi(u) = u - 1$, $a = 1$, $b = e$, в этом случае $s(u) = (u - 1)e^u$. Тогда, полагая $Q(s) = \ln s$, имеем $f(u) = \frac{u-1}{u}$. Из утверждения 5 получим, что нелинейное параболическое уравнение

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x - 1 + u^{-1} - \sigma u^{\sigma-1} + (2\sigma - 1)u^{\sigma-2} - (\sigma - 1)u^{\sigma-3} \quad (19)$$

имеет точное решение типа бегущей волны $u(x, t) = 1 + W(\exp(x - t + C))$, C — произвольная постоянная.

Отметим следующий факт: уравнения (18), (19) зависят от параметра нелинейности σ , а найденные в примерах 6, 7 их частные точные решения этот параметр не содержат. Таким образом, найденное решение относится не к одному уравнению, а к параметрическому семейству уравнений с параметром σ . Кроме того, примеры 2, 3 являются частными случаями примеров 7, 6 при $\sigma = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Wright E.M. *Solution of the equation $ze^z = a$* , Proceedings of the Royal Society Edinburgh **65**, 193–203 (1959).
- [2] Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J. and Knuth D.E. *On the Lambert W-function*, Advances in Comput. Math. **5**, 329–359 (1996).
- [3] Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M. *Some applications of the Lambert W-function to physics*, Canadian J. Phys. **78**, 823–831 (2000).
- [4] Дубинова И.Д. *Применение W-функции Ламберта в математических задачах физики плазмы*, Физика плазмы **30** (10), 937–943 (2004).
- [5] Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. *W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики* (РФЯЦ ВНИИЭФ, Саров, 2006).
- [6] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений* (Наука, М., 1987).
- [7] Рудых Г.А., Семенов Э.И. *Новые точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии*, Сиб. матем. журн. **38** (5), 1130–1139 (1997).
- [8] Рудых Г.А., Семенов Э.И. *О новых точных решениях одномерного уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком)*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **38** (6), 971–977 (1998).
- [9] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения* (Физматлит, М., 2002).
- [10] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. *Нелинейные уравнения математической физики. Учеб. пособие. Ч. 1* (ЮРАЙТ, М., 2017).
- [11] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. *Нелинейные уравнения математической физики. Учеб. пособие. Ч. 2* (ЮРАЙТ, М., 2017).
- [12] Журавлев В.М. *Принцип суперпозиции и точные решения уравнения нелинейной диффузии*, ТМФ **183** (1), 36–50 (2015).
- [13] Баренблатт Г.И. *О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя*, ПММ **18** (4), 409–414 (1954).
- [14] Баренблатт Г.И. *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика* (Гидрометеониздат, Л., 1978).
- [15] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (Физматлит, М., 2001).
- [16] Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике* (Наука, М., 1983).

Александр Аркадьевич Косов

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова

*Сибирского отделения Российской академии наук,
ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,*

e-mail: kosov_idstu@mail.ru

Эдуард Иванович Семенов

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова

*Сибирского отделения Российской академии наук,
ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,*

e-mail: edwseiz@gmail.com, semenov@icc.ru

A.A. Kosov and E.I. Semenov

Lambert function and exact solutions of nonlinear parabolic equations

Abstract. We consider the diffusion equations with degree type coefficient of diffusion and a nonlinear source. The main attention is paid to the construction of exact solutions expressed via the Lambert function. We prove a series of statements that determine the conditions for the source function that guarantee the existence of exact solutions of a certain type. We give examples of exact solutions of nonlinear diffusion equations (including those equations with polynomial and fractional-rational source functions) to illustrate the obtained results.

Keywords: equation of nonlinear diffusion, Lambert's function, exact solutions.

Aleksandr Arkad'evich Kosov

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,*

e-mail: kosov_idstu@mail.ru

Eduard Ivanovich Semenov

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,*

e-mail: edwseiz@gmail.com, semenov@icc.ru