Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Лапин, Высшие производные функций Ляпунова и тотальная ограниченность решений по Пуассону, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 8, 21–30

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-8-21-30>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:14:08

К.С. ЛАПИН

ВЫСШИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА И ТОТАЛЬНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ПУАССОНУ

Аннотация. В работе на основе метода высших производных функций Ляпунова получены достаточные признаки тотальной ограниченности решений по Пуассону, частичной тотальной ограниченности решений по Пуассону и частичной тотальной ограниченности по Пуассону решений с частично контролируруемыми начальными условиями.

Ключевые слова: высшие производные, функция Ляпунова, тотальная ограниченность решений, ограниченность решений по Пуассону, частично контролируемые начальные условия.

УДК: 517.925

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-8-21-30

В работе Т. Йосидзавы [1] на основе метода функций Ляпунова была разработана теория ограниченности решений систем дифференциальных уравнений. Теория ограниченности решений систем по части переменных или, как еще говорят, частичной ограниченности решений была разработана на основе метода функций Ляпунова в монографии В.В. Румянцева и А.С. Озиранера [2]. Сравнительно недавно в работах [3]–[8] на основе метода функций Ляпунова была разработана теория частичной ограниченности решений с частично контролируемыми начальными условиями, которая в понятийном плане двойственна к построенной в работах В.И. Воротникова и Ю.Г. Мартышенко [9]–[13] теории частичной устойчивости по Ляпунову частичного положения равновесия. С другой стороны, в [14] и [15] была начата разработка нового направления в теории ограниченности решений систем дифференциальных уравнений, а именно, развитие теории ограниченности решений по Пуассону. Понятие ограниченности решений по Пуассону характеризуются тем, что решение может не содержаться полностью в некотором шаре фазового пространства, но обладает свойством счетного числа раз возвращаемости в этот шар.

Настоящая работа посвящена разработке методов исследования основных видов тотальной ограниченности, т.е. ограниченности при малых возмущениях, решений по Пуассону, основанных на использовании высших производных функций Ляпунова в силу системы. В работе введены понятия тотальной ограниченности решений по Пуассону, частичной тотальной ограниченности решений по Пуассону и частичной тотальной ограниченности по Пуассону решений с частично контролируемыми начальными условиями, которые обобщают понятия соответствующих видов тотальной ограниченности решений. Получены достаточные признаки тотальной ограниченности по Пуассону (теорема 1), частичной тотальной

Поступила в редакцию 13.06.2018, после доработки 13.06.2018. Принята к публикации 26.09.2018

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-139.2017.1.

ограниченности по Пуассону (теорема 2) и частичной тотальной ограниченности по Пуассону решений с частично контролируруемыми начальными условиями (теорема 3), которые основаны на использовании высших производных функций Ляпунова в силу системы. Как следствия получены достаточные признаки тотальной ограниченности по Пуассону (следствие 1), частичной тотальной ограниченности по Пуассону (следствие 2) и частичной тотальной ограниченности по Пуассону решений с частично контролируруемыми начальными условиями (следствие 3), которые основаны на использовании первых производных функций Ляпунова в силу системы. Приведен пример применения полученных результатов к конкретной системе дифференциальных уравнений. Перейдем теперь к точным определениям и формулировкам.

Пусть заданы произвольные системы дифференциальных уравнений от $n \geq 1$ переменных

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad F(t, x) = (F_1(t, x), \dots, F_n(t, x))^T, \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + H(t, x), \quad H(t, x) = (H_1(t, x), \dots, H_n(t, x))^T, \quad (2)$$

где вектор-функция $F(t, x)$ и вектор-функция $H(t, x)$, называемая возмущением системы (1), заданы в $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемы до порядка $(l - 1)$ включительно, где $l \geq 1$ – фиксированное число, $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ и T – операция транспонирования. Единственности решения задачи Коши для систем (1) и (2) не требуется.

Далее под $\|\cdot\|$ будем понимать обычную евклидову норму. Для любого $t_0 \in \mathbb{R}^+$ через $\mathbb{R}^+(t_0)$ будем обозначать множество $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq t_0\}$. Любую неотрицательную возрастающую числовую последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$, будем называть $\mathcal{P}$ -последовательностью. Для каждой $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ через $M(\tau)$ будем обозначать множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$.

Напомним [1], что о решениях системы (1) говорят, что они тотально ограничены, если для каждого числа $\alpha \geq 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \geq 0$, $\|x_0\| \leq \alpha$, системы (2), удовлетворяющей при $t \geq 0$ и $x \in B(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq \|x\| \leq \beta\}$ неравенству $\|H(t, x)\| \leq \gamma$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$.

Введем понятие тотальной ограниченности решений по Пуассону, обобщающее понятие тотальной ограниченности решений.

Определение 1. Будем говорить, что решения системы (1) тотально ограничены по Пуассону, если для системы (1) найдется такая $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, и для каждого числа $\alpha \geq 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \in M(\tau)$, $\|x_0\| \leq \alpha$, системы (2), удовлетворяющей при $t \geq 0$ и $x \in B(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq \|x\| \leq \beta\}$ неравенству $\|H(t, x)\| \leq \gamma$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. В случае, когда требуется точно указать соответствующую $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, будем говорить, что решения системы (1) тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$.

Легко видеть, что если решения системы (1) тотально ограничены, то они тотально ограничены и по Пуассону.

Приступим к описанию метода исследования тотальной ограниченности решений по Пуассону, который основан на использовании высших производных функций Ляпунова. Напомним сначала, следуя [2] (а также [16], [17]), необходимые понятия и конструкции, связанные

с высшими производными функций Ляпунова. Пусть задана произвольная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad X(t, x) = (X_1(t, x), \dots, X_n(t, x))^T, \quad (3)$$

правая часть которой задана в $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ и непрерывно дифференцируема до порядка $(l-1)$ включительно, где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнутое связное множество и $l \geq 1$ — фиксированное число. Кроме того, пусть задана непрерывная функция $V(t, x)$, где $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$, имеющая непрерывные частные производные l -го порядка по $t, x_1, \dots, x_n$. Производной порядка s функции $V(t, x)$ в силу системы (3) называется функция $V^{(s)}(t, x)$, определяемая рекуррентной формулой

$$V^{(s)}(t, x) = \frac{\partial V^{(s-1)}(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(s-1)}(t, x)}{\partial x_i} \cdot X_i(t, x), \quad 1 \leq s \leq l,$$

где $V^{(0)}(t, x) = V(t, x)$. Обычно $V^{(1)}(t, x)$ и $V^{(2)}(t, x)$ соответственно обозначают через $\dot{V}(t, x)$ и $\ddot{V}(t, x)$. Пусть теперь на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$ задана непрерывная функция $f(t, \psi)$, где $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_l)$. Функция $f(t, \psi)$ называется неубывающей по $\psi_1, \dots, \psi_{i-1}, \psi_{i+1}, \dots, \psi_l$, где $1 \leq i \leq l$ — произвольное фиксированное число, если из условий $\psi_s \leq \eta_s$, $1 \leq s \leq l$, $s \neq i$, $\psi_i = \eta_i$ следует $f(t, \psi) \leq f(t, \eta)$. Непрерывная функция $V(t, x)$, имеющая непрерывные частные производные l -го порядка по $t, x_1, \dots, x_n$, и дифференциальное уравнение l -го порядка

$$\xi^{(l)} = f(t, \xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(l-1)}), \quad (4)$$

где непрерывная функция $f(t, \psi_1, \dots, \psi_l)$ не убывает по $\psi_1, \dots, \psi_{l-1}$, называются соответственно функцией Ляпунова с производными l -го порядка в силу системы (3) и уравнением сравнения l -го порядка для системы (3), если выполнено условие

$$V^{(l)}(t, x) \leq f(t, V(t, x), V^{(1)}(t, x), \dots, V^{(l-1)}(t, x)). \quad (5)$$

Далее будем обозначать через $a(r)$ и $b(r)$, где $r \geq 0$, произвольные функции, которые соответственно обладают следующими свойствами:

- а) $a(r) \geq 0$ — возрастающая функция,
- б) $b(r) \geq 0$ — неубывающая функция и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

Для уравнения сравнения l -го порядка (4) для системы (3) рассмотрим, полагая $\xi = \psi_1$, соответствующую ему систему уравнений первого порядка от l переменных

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= G(t, \psi), \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_l)^T, \quad G(t, \psi) = (G_1(t, \psi), \dots, G_l(t, \psi))^T, \\ G_1(t, \psi) &= \psi_2, \quad G_2(t, \psi) = \psi_3, \dots, G_{l-1}(t, \psi) = \psi_l, \quad G_l(t, \psi) = f(t, \psi). \end{aligned} \quad (6)$$

Будем говорить, что решения уравнения сравнения l -го порядка (4) для системы (3) totally ограничены по Пуассону, если решения системы (6) totally ограничены по Пуассону.

Сформулируем и докажем теперь достаточный признак totalной ограниченности по Пуассону решений системы (1), основанный на методе использования высших производных функций Ляпунова в силу системы (1).

Теорема 1. Пусть для системы (1) существуют такие $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, функция Ляпунова $V(t, x)$, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, с производными l -го порядка в силу системы (1), функции $a(r)$ и $b(r)$, обладающие указанными выше свойствами а) и б), что выполнены следующие условия:

- 1) $V^{(i)}(t, x) \geq 0$ для каждого $0 \leq i \leq l-1$,

$$2) \ b(\|x\|) \leq \sum_{i=1}^l V^{(i-1)}(t, x) \leq a(\|x\|) \text{ для всех } (t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n,$$

3) $\|(\partial V^{(i-1)}/\partial x)(t, x)\| \leq L_i$, $1 \leq i \leq l$, для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times K$, где K — любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $L = (L_1, \dots, L_l)^T$, $L_i > 0$, $1 \leq i \leq l$, — постоянный вектор, зависящий от K .

Кроме того, пусть решения уравнения сравнения l -го порядка (4) для системы (1) totally ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) totally ограничены по Пуассону.

Доказательство. Рассмотрим для уравнения сравнения l -го порядка (4) для системы (1) соответствующую ему систему уравнений первого порядка (6). Заметим, что правая часть $G(t, \psi)$ системы (6) удовлетворяет условию Важевского, т. е. для каждого $1 \leq i \leq l$ функция $G_i(t, \psi)$ является неубывающей по переменным $\psi_1, \dots, \psi_{i-1}, \psi_{i+1}, \dots, \psi_l$. Действительно, при $1 \leq i \leq l-1$ это очевидно, поскольку $G_i(t, \psi) = \psi_{i+1}$, и при $i = l$ функция $G_l(t, \psi) = f(t, \psi)$ является неубывающей по переменным $\psi_1, \dots, \psi_{l-1}$. Теперь заметим, что для вектор-функции $W(t, x) = (W_1(t, x), \dots, W_l(t, x))^T$, где $W_i(t, x) = V^{(i-1)}(t, x)$, $1 \leq i \leq l$, выполнены условия

$$\dot{W}_i(t, x) \leq G_i(t, W(t, x)), \quad 1 \leq i \leq l. \quad (7)$$

В самом деле, при $1 \leq i \leq l-1$ это очевидно, поскольку $\dot{W}_i(t, x) = V^{(i)}(t, x)$ и $G_i(t, W(t, x)) = W_{i+1}(t, x) = V^{(i)}(t, x)$. При $i = l$ неравенство (7) справедливо, поскольку $\dot{W}_l(t, x) = V^{(l)}(t, x)$, $G_l(t, W(t, x)) = f(t, W(t, x))$ и выполнено условие (5). Так как правая часть $G(t, \psi)$ системы (6) удовлетворяет условию Важевского и справедливы неравенства (7), то по теореме Важевского (например, [2]) получаем, что среди всех решений системы (6), проходящих через произвольную точку (t_0, ψ_0) , можно выбрать верхнее решение $\bar{\psi}(t, t_0, \psi_0)$, т. е. решение, для которого справедливо неравенство $\psi(t, t_0, \psi_0) \leq \bar{\psi}(t, t_0, \psi_0)$ при всех $t \geq t_0$, где $\psi(t, t_0, \psi_0)$ — любое решение системы (6). Из теоремы Важевского также следует, что решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), вектор-функция $W(t, x)$ и верхнее решение $\bar{\psi}(t, t_0, W(t_0, x_0))$ системы (6) связаны между собой при всех $t \geq t_0$ неравенствами

$$W_i(t, x(t, t_0, x_0)) \leq \bar{\psi}_i(t, t_0, W(t_0, x_0)), \quad 1 \leq i \leq l. \quad (8)$$

Покажем, что для каждого числа $\alpha \geq 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \in M(\tau)$, $\|x_0\| \leq \alpha$, системы (2), удовлетворяющей при $t \geq 0$ и $x \in B(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq \|x\| \leq \beta\}$ неравенству $\|H(t, x)\| \leq \gamma$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. Заметим сначала, что из условий 1) и 2) следует, что для вектора $W(t_0, x_0) = (W_1(t_0, x_0), \dots, W_l(t_0, x_0))^T$, где $(t_0, x_0) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ и $\|x_0\| \leq \alpha$, справедливы неравенства

$$\|W(t_0, x_0)\| \leq \sum_{i=1}^l |W_i(t_0, x_0)| = \sum_{i=1}^l |V^{(i-1)}(t_0, x_0)| = \sum_{i=1}^l V^{(i-1)}(t_0, x_0) \leq a(\|x_0\|) \leq a(\alpha).$$

Так как решения системы (6) totally ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, то для числа $a(\alpha)$ найдутся такие числа $\lambda = \lambda(a(\alpha))$ и $\delta = \delta(a(\alpha))$, что для произвольного решения $\psi(t, t_0, W(t_0, x_0))$ любой системы $\dot{\psi} = G(t, \psi) + h(t, \psi)$, где $\|h(t, \psi)\| \leq \delta$ при $t \geq 0$ и $a(\alpha) \leq \|\psi\| \leq \lambda$, выполнено условие $\|\psi(t, t_0, W(t_0, x_0))\| < \lambda$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. Пользуясь условием $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$ и тем, что l фиксировано, выберем такое число $\beta = \beta(\alpha)$, что $(l \cdot \lambda(a(\alpha))) < b(\beta)$. Число $\gamma = \gamma(\alpha)$ определим, полагая $\gamma = (1/\|L\|)\delta(a(\alpha))$, где постоянный вектор L выбран для компактного в $\mathbb{R}^n$ множества

$B(\alpha, \beta)$. Рассмотрим любую систему

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + H(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times B(\alpha, \beta), \quad (2')$$

удовлетворяющую условию $\|H(t, x)\| \leq \gamma = \gamma(\alpha) = (1/\|L\|)\delta(a(\alpha))$. Для производной вектор-функции $W(t, x)$ в силу системы (2'), пользуясь условием 3), имеем

$$\dot{W}_{F(t,x)+H(t,x)}(t, x) = \dot{W}_{F(t,x)}(t, x) + \partial W(t, x)/\partial x \cdot H(t, x) \leq G(t, W(t, x)) + L\gamma,$$

где $\partial W(t, x)/\partial x \cdot H(t, x)$ — умножение матрицы на вектор и $L\gamma$ — умножение вектора на число. Так как $G(t, \psi)$ удовлетворяет условию Важевского, то $G(t, \psi) + L\gamma$ также удовлетворяет условию Важевского и, следовательно, система $\dot{\psi} = G(t, \psi) + L\gamma$ является системой сравнения для системы (2'). По условию решения системы сравнения $\dot{\psi} = G(t, \psi)$ для системы (1) totally ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Поэтому из равенства $\|L\gamma\| = \delta(a(\alpha))$ получаем, что для верхнего решения $\bar{\psi}(t, t_0, W(t_0, x_0))$ системы $\dot{\psi} = G(t, \psi) + L\gamma$ выполнено условие $\|\bar{\psi}(t, t_0, W(t_0, x_0))\| < \lambda(a(\alpha))$ при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. Пользуясь условием 2) и неравенством (8), получаем для решения $\tilde{x}(t, t_0, x_0)$ системы (2') и верхнего решения $\bar{\psi}(t, t_0, W(t_0, x_0))$ системы сравнения $\dot{\psi} = G(t, \psi) + L\gamma$ справедливые при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ неравенства

$$b(\|\tilde{x}(t, t_0, x_0)\|) \leq \sum_{i=1}^l W_i(t, \tilde{x}(t, t_0, x_0)) \leq \sum_{i=1}^l \bar{\psi}_i(t, t_0, W(t_0, x_0)).$$

Кроме того, для всех $t \in \mathbb{R}^+$ имеем очевидные неравенства

$$\sum_{i=1}^l \bar{\psi}_i(t, t_0, W(t_0, x_0)) \leq \sum_{i=1}^l |\bar{\psi}_i(t, t_0, W(t_0, x_0))| \leq l \cdot \|\bar{\psi}(t, t_0, W(t_0, x_0))\|.$$

Так как $l \cdot \|\bar{\psi}(t, t_0, W(t_0, x_0))\| \leq l \cdot \lambda(a(\alpha)) < b(\beta)$, то из указанных выше неравенств получаем $b(\|\tilde{x}(t, t_0, x_0)\|) < b(\beta)$ при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ и, следовательно, для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ имеем $\|\tilde{x}(t, t_0, x_0)\| < \beta$, поскольку функция $b(r)$ неубывающая. Покажем теперь, что для любого решения $x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \in M(\tau)$, $\|x_0\| \leq \alpha$, системы (2), где $\|H(t, x)\| \leq \gamma(\alpha)$ при $t \geq 0$ и $x \in B(\alpha, \beta)$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. Предположим от противного, что для некоторого $t_1 > t_0$, $t_1 \in M(\tau)$, выполнены условия $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ при $t_0 \leq t < t_1$, $t \in M(\tau)$, и $\|x(t_1, t_0, x_0)\| = \beta_1 \geq \beta$. Пусть $t_1 \in [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$ для некоторого $i \geq 1$. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $\tau_{2i-1} < t_1 \leq \tau_{2i}$. Тогда из непрерывности на интервале $[\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$ функции $\|x(t, t_0, x_0)\|$ по переменной t следует $\beta_1 = \beta$. В этом случае решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (2), рассматриваемое при $t_0 \leq t \leq t_1$, является решением системы (2'), рассматриваемым при $t_0 \leq t \leq t_1$. Отсюда, как было сказано выше, следует $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ при $t_0 \leq t \leq t_1$, $t \in M(\tau)$. В частности, получаем $\|x(t_1, t_0, x_0)\| < \beta$, что противоречит равенству $\|x(t_1, t_0, x_0)\| = \beta$.

2. Пусть $t_1 = \tau_{2i-1}$ и $\beta_1 = \beta$. Здесь так же, как и в случае 1, получаем $\|x(t_1, t_0, x_0)\| < \beta$, что противоречит равенству $\|x(t_1, t_0, x_0)\| = \beta$.

3. Пусть $t_1 = \tau_{2i-1}$ и $\beta_1 > \beta$. Рассмотрим любую систему

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + H(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times B(\alpha, \beta_1), \quad (2'')$$

удовлетворяющую условию $\|H(t, x)\| \leq \gamma_1 = \gamma_1(\alpha) = (1/\|L_1\|)\delta(a(\alpha))$, где постоянный вектор L_1 выбран для компактного в $\mathbb{R}^n$ множества $B(\alpha, \beta_1)$. Так как $\beta < \beta_1$ и функция $b(r)$ неубывающая, то имеем $(l \cdot \lambda(a(\alpha))) < b(\beta) \leq b(\beta_1)$. Поэтому, если в проведенных выше

рассуждениях вместо β взять β_1 , то аналогично тому, как это было сделано выше для системы (2'), получаем, что для решения $\hat{x}(t, t_0, x_0)$ системы (2'') при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство $\|\hat{x}(t, t_0, x_0)\| < \beta_1$. Рассуждая теперь аналогично случаю 2, получим для решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (2) неравенство $\|x(t_1, t_0, x_0)\| < \beta_1$, что противоречит равенству $\|x(t_1, t_0, x_0)\| = \beta_1$.

Итак, заключаем, что сделанное для случаев 1–3 выше предположение от противного неверно и, следовательно, для любого решения $x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \in M(\tau)$, $\|x_0\| \leq \alpha$, системы (2), где $\|H(t, x)\| \leq \gamma(\alpha)$ при $t \geq 0$ и $x \in B(\alpha, \beta)$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. $\square$

Если в теореме 1 положить $l = 1$, то получим следующий достаточный признак тотальной ограниченности по Пуассону решений системы (1).

Следствие 1. Пусть для системы (1) существуют $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x) \geq 0$, определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, и непрерывная функция $f(t, \xi)$, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $b(\|x\|) \leq V(t, x) \leq a(\|x\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$,
- 2) $\dot{V}(t, x) \leq f(t, V(t, x))$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,
- 3) $\|(\partial V / \partial x)(t, x)\| \leq L$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times K$, где K — любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ и число $L > 0$ зависит от K .

Кроме того, пусть решения уравнения $\dot{\xi} = f(t, \xi)$ тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) тотально ограничены по Пуассону.

Далее для каждого $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и любого фиксированного числа $1 \leq k \leq n$ будем использовать обозначение $y = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Напомним [18], что о решениях системы (1) говорят, что они тотально y -ограничены, если для каждого числа $\alpha \geq 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \geq 0$, $\|x_0\| \leq \alpha$, системы (2), удовлетворяющей при $t \geq 0$ и $x \in B_{x,y}(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq \alpha, \|y\| \leq \beta\}$ неравенству $\|H(t, x)\| \leq \gamma$, выполнено условие $\|y(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$.

Введем понятие тотальной y -ограниченности решений по Пуассону, обобщающее понятие тотальной y -ограниченности решений.

Определение 2. Будем говорить, что решения системы (1) тотально y -ограничены по Пуассону, если для системы (1) найдется такая $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, и для каждого числа $\alpha \geq 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \in M(\tau)$, $\|x_0\| \leq \alpha$, системы (2), удовлетворяющей при $t \geq 0$ и $x \in B_{x,y}(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \geq \alpha, \|y\| \leq \beta\}$ неравенству $\|H(t, x)\| \leq \gamma$, выполнено условие $\|y(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. В случае, когда требуется точно указать соответствующую $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, будем говорить, что решения системы (1) тотально y -ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$.

Легко видеть, что если решения системы (1) тотально y -ограничены, то они тотально y -ограничены и по Пуассону.

Будем говорить, что решения уравнения сравнения l -го порядка (4) для системы (1) тотально $(\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(p-1)})$ -ограничены по Пуассону, где $1 \leq p \leq l$, если решения системы (6) тотально $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ -ограничены по Пуассону.

Далее везде предполагается, что все решения систем (1) и (2) по дополнительной к $y = (x_1, \dots, x_k)$ части переменных $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ продолжимы на всю полуось $\mathbb{R}^+$.

Следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 1, является достаточным признаком тотальной y -ограниченности решений по Пуассону, который основан на использовании высших производных функций Ляпунова в силу системы.

Теорема 2. Пусть для системы (1) существуют такие $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, функция Ляпунова $V(t, x)$, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, с производными l -го порядка в силу системы (1), функции $a(r)$ и $b(r)$, обладающие указанными выше свойствами а) и б), и число $1 \leq p \leq l$, что выполнены следующие условия:

- 1) $V^{(i)}(t, x) \geq 0$ для каждого $0 \leq i \leq l - 1$,
- 2) $b(\|y\|) \leq \sum_{i=1}^p V^{(i-1)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$,
- 3) $\sum_{i=1}^l V^{(i-1)}(t, x) \leq a(\|x\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$,
- 4) $\|(\partial V^{(i-1)} / \partial x)(t, x)\| \leq L_i$, $1 \leq i \leq l$, для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, для которых $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times K$, где K — любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^k$ и $L = (L_1, \dots, L_l)^T > 0$ — постоянный вектор, зависящий от K .

Кроме того, пусть решения уравнения сравнения l -го порядка (4) для системы (1) тотально $(\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(p-1)})$ -ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) тотально y -ограничены по Пуассону.

Если в теореме 2 положить $l = 1$, то получим достаточный признак тотальной y -ограниченности по Пуассону решений системы (1).

Следствие 2. Пусть для системы (1) существуют $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x) \geq 0$, определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, и непрерывная функция $f(t, \xi)$, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $b(\|y\|) \leq V(t, x) \leq a(\|x\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$,
- 2) $\dot{V}(t, x) \leq f(t, V(t, x))$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,
- 3) $\|(\partial V / \partial x)(t, x)\| \leq L$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, для которых $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times K$, где K — любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^k$ и число $L > 0$ зависит от K .

Кроме того, пусть решения уравнения $\dot{\xi} = f(t, \xi)$ тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) тотально y -ограничены по Пуассону.

Далее для каждого элемента $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и любых фиксированных чисел $1 \leq k \leq m \leq n$ будем использовать обозначения $y = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ и $z = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

Напомним [5] (а также [6]), что о решениях системы (1) говорят, что они тотально y -ограничены с z_0 -контролем, если для каждого числа $\alpha \geq 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \geq 0$, $\|z_0\| \leq \alpha$, системы (2), удовлетворяющей при $t \geq 0$ и $x \in B_{z,y}(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|z\| \geq \alpha, \|y\| \leq \beta\}$ неравенству $\|H(t, x)\| \leq \gamma$, выполнено условие $\|y(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$.

Введем понятие тотальной y -ограниченности с z_0 -контролем решений по Пуассону, обобщающее понятие тотальной y -ограниченности с z_0 -контролем решений.

Определение 3. Будем говорить, что решения системы (1) тотально y -ограничены с z_0 -контролем по Пуассону, если для системы (1) найдется такая $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, и для каждого числа $\alpha \geq 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \in M(\tau)$, $\|z_0\| \leq \alpha$, системы (2), удовлетворяющей при $t \geq 0$ и $x \in B_{z,y}(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|z\| \geq \alpha, \|y\| \leq \beta\}$ неравенству $\|H(t, x)\| \leq \gamma$, выполнено условие

$\|y(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. В случае, когда требуется точно указать соответствующую $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, будем говорить, что решения системы (1) тотально y -ограничены с z_0 -контролем по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$.

Ясно, что если решения системы (1) тотально y -ограничены с z_0 -контролем, то они тотально y -ограничены с z_0 -контролем и по Пуассону.

Будем говорить, что решения уравнения сравнения l -го порядка (4) для системы (1) тотально $(\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(p-1)})$ -ограничены с $(\xi_0, \dot{\xi}_0, \dots, \xi_0^{(q-1)})$ -контролем по Пуассону, где $1 \leq p \leq q \leq l$, если решения системы (6) тотально $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ -ограничены с $((\psi_0)_1, \dots, (\psi_0)_q)$ -контролем по Пуассону.

Следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 1, является достаточным признаком тотальной y -ограниченности с z_0 -контролем решений по Пуассону, который основан на использовании высших производных функций Ляпунова в силу системы.

Теорема 3. Пусть для системы (1) существуют такие $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, функция Ляпунова $V(t, x)$, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, с производными l -го порядка в силу системы (1), функции $a(r)$ и $b(r)$, обладающие указанными выше свойствами а) и б), и числа $1 \leq p \leq q \leq l$, что выполнены следующие условия:

- 1) $V^{(i)}(t, x) \geq 0$ для каждого $0 \leq i \leq l-1$,
- 2) $b(\|y\|) \leq \sum_{i=1}^p V^{(i-1)}(t, x)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$,
- 3) $\sum_{i=1}^q V^{(i-1)}(t, x) \leq a(\|z\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$,
- 4) $\|(\partial V^{(i-1)}/\partial x)(t, x)\| \leq L_i$, $1 \leq i \leq l$, для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, для которых $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times K$, где K — любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^k$ и $L = (L_1, \dots, L_l)^T > 0$ — постоянный вектор, зависящий от K .

Кроме того, пусть решения уравнения сравнения l -го порядка (4) для системы (1) тотально $(\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(p-1)})$ -ограничены с $(\xi_0, \dot{\xi}_0, \dots, \xi_0^{(q-1)})$ -контролем по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) тотально y -ограничены с z_0 -контролем по Пуассону.

Если в теореме 3 положить $l = 1$, то получим следующий достаточный признак тотальной y -ограниченности с z_0 -контролем по Пуассону решений системы (1).

Следствие 3. Пусть для системы (1) существуют $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x) \geq 0$, определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, и непрерывная функция $f(t, \xi)$, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $b(\|y\|) \leq V(t, x) \leq a(\|z\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$,
- 2) $\dot{V}(t, x) \leq f(t, V(t, x))$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,
- 3) $\|(\partial V/\partial x)(t, x)\| \leq L$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, для которых $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times K$, где K — любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^k$ и число $L > 0$ зависит от K .

Кроме того, пусть решения уравнения $\dot{\xi} = f(t, \xi)$ тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) тотально y -ограничены с z_0 -контролем по Пуассону.

Пример. Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = \frac{\sin t - 1}{2(1 + \cos t + e^{-t})} (x_1 + x_2), \quad \dot{x}_2 = \frac{-\sin t + 1}{2(1 + \cos t + e^{-t})} (x_1 - x_2),$$

где $t \in \mathbb{R}^+$ и $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Покажем, пользуясь следствием 1, что решения этой системы тотально ограничены по Пуассону. Рассмотрим возрастающую последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, где $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_i < \dots$ — возрастающая последовательность всех корней уравнения $\cos t + e^{-t} = 0$. Очевидно, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$ и, следовательно, $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ является $\mathcal{P}$ -последовательностью. Рассмотрим заданную в $\mathbb{R}^+(\tau_1) \times \mathbb{R}^2$ функцию

$$V(t, x_1, x_2) = (1 + \cos t + e^{-t})(x_1^2 + x_2^2) \geq 0.$$

Ясно, что для любых $t \in \mathbb{R}^+(\tau_1) = \mathbb{R}^+$ и $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ справедливо неравенство $V(t, x_1, x_2) \leq a(\|x\|)$, где $a(r) = 3r^2$. Так как на каждом замкнутом интервале $[\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$ имеет место неравенство $1 \leq 1 + \cos t + e^{-t}$, то для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^2$ получаем $b(\|x\|) \leq V(t, x_1, x_2)$, где $b(r) = r^2$. Следовательно, двойное неравенство $b(\|x\|) \leq V(t, x_1, x_2) \leq a(\|x\|)$ справедливо для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^2$. Таким образом, условие 1) следствия 1 выполнено. Прямые вычисления показывают, что $\dot{V}(t, x_1, x_2) = -(1 + e^{-t})(x_1^2 + x_2^2) \leq -c(\|x\|)$, где $c(r) = r^2$. Из указанных выше неравенств $V(t, x_1, x_2) \leq a(\|x\|)$ и $\dot{V}(t, x_1, x_2) \leq -c(\|x\|)$ вытекает неравенство $\dot{V}(t, x_1, x_2) \leq -(1/3)V(t, x_1, x_2)$. Таким образом, условие 2) следствия 1 выполнено. Очевидно, что условие 3) следствия 1 также выполнено, поскольку $0 < 1 + \cos t + e^{-t} \leq 3$. Рассмотрим уравнение $\dot{\xi} = -(1/3)\xi$. Методом функций Ляпунова [1] легко устанавливается, что решения этого уравнения тотально ограничены. Например, в качестве функции Ляпунова здесь можно взять функцию $L(\xi) = \xi^2$. Так как решения уравнения $\dot{\xi} = -(1/3)\xi$ тотально ограничены, то они, в частности, тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Таким образом, для рассматриваемой системы все условия следствия 1 выполнены и, значит, решения этой системы тотально ограничены по Пуассону.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yoshizawa Т. *Liapunov's function and boundedness of solutions*, Funkcialaj Ekvacioj **2**, 95–142 (1959).
- [2] Румянцев В.В., Озиранер А.С. *Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных* (Наука, М., 1987).
- [3] Лапин К.С. *Ограниченность в пределе решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируруемыми начальными условиями*, Дифференц. уравнения **49** (10), 1281–1286 (2013).
- [4] Лапин К.С. *Частичная равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируруемыми начальными условиями*, Дифференц. уравнения **50** (3), 309–316 (2014).
- [5] Лапин К.С. *Равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируруемыми начальными условиями*, Матем. заметки **96** (3), 393–404 (2014).
- [6] Лапин К.С. *Вектор-функции Ляпунова и частичная ограниченность решений с частично контролируруемыми начальными условиями*, Дифференц. уравнения **52** (5), 572–578 (2016).
- [7] Лапин К.С. *Частичная тотальная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируруемыми начальными условиями*, Матем. заметки **99** (2), 239–247 (2016).
- [8] Лапин К.С. *Высшие производные функций Ляпунова и частичная ограниченность решений с частично контролируруемыми начальными условиями*, Матем. заметки **101** (6), 883–893 (2017).
- [9] Воротников В.И. *Об устойчивости и устойчивости по части переменных частичных положений равновесия нелинейных динамических систем*, Докл. РАН **389** (3), 332–337 (2003).
- [10] Воротников В.И. *Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития*, Автоматика и телемеханика, № 4, 3–59 (2005).
- [11] Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. *К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем*, Изв. РАН. Теория и системы управления, № 5, 23–31 (2010).
- [12] Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. *К задачам частичной устойчивости для систем с последействием*, Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН **19** (1), 49–58 (2013).

- [13] Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. *Об устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия систем с последствием*, Матем. заметки **96** (4), 496–503 (2014).
- [14] Лапин К.С. *Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова*, Дифференц. уравнения **54** (1), 40–50 (2018).
- [15] Лапин К.С. *Ограниченность в пределе по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и функции Ляпунова*, Матем. заметки **103** (2), 223–235 (2018).
- [16] Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И., Матросов В.М. *Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости* (Наука, М., 1987).
- [17] Матросов В.М. *Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем* (Физматлит, М., 2001).
- [18] Miki K., Masamichi A., Shoichi S. *On the partial total stability and partially total boundedness of a system of ordinary differential equations*, Res. Rept. Akita Tech. Coll. **20**, 105–109 (1985).

Кирилл Сергеевич Лапин

Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е. Евсевьева,
ул. Студенческая, д. 11а, г. Саранск, 430007, Россия,

e-mail: klapin@mail.ru

K.S. Lapin

Higher Lyapunov functions derivatives and total Poisson boundedness of solutions

Abstract. Using the method of higher Lyapunov derivatives we obtain sufficient conditions for total Poisson boundedness of solutions, partial total Poisson boundedness of solutions, and partial total Poisson boundedness of solutions with partially controlled initial conditions.

Keywords: higher-order derivatives, Lyapunov function, total boundedness of solutions, Poisson boundedness of solutions, partially controlled initial conditions.

Kirill Sergeevich Lapin

Mordovian State Pedagogical Institute named after M.E. Evseviev,
11a Studencheskaya str., Saransk, 430007 Russia,

e-mail: klapin@mail.ru