Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Свинин, С. В. Свинина, О некоторых обобщениях суммы степеней натуральных чисел, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 8, 31–44

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-8-31-44>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 08:20:33

А.К. СВИНИН, С.В. СВИНИНА

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ СУММЫ СТЕПЕНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые обобщения суммы степеней натуральных чисел. В частности, исследуется класс сумм, порождающая функция которых является степенью порождающей функции для классических сумм степеней. Также рассматриваются так называемые биномиальные суммы. В некоторых случаях решается задача построения многочленов, позволяющих вычислять значения соответствующих сумм.

Ключевые слова: суммы степеней натуральных чисел, числа Бернулли, числа Дженокки, многочлены Ганди.

УДК: 519.101 : 511.218

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-8-31-44

ВВЕДЕНИЕ

Сумма степеней натуральных чисел [1], [2]

$$S_m(n) := \sum_{q=1}^n q^m, \quad m \geq 0, \quad (1)$$

начиная с работ Блеза Паскаля, Йоганна Фаульхабера, Якоба Бернулли, на протяжении столетий была объектом активных исследований. Выражение (1) определяет функцию на множестве натуральных чисел. Теорема Паскаля утверждает, что для любой целой степени $m \geq 0$ значение суммы (1) можно получить как значение соответствующего многочлена $\hat{S}_m(n)$. Порождающая экспоненциальная функция для сумм вида (1) определяется выражением

$$G(n, t) = \sum_{j \geq 0} S_j(n) \frac{t^j}{j!} = \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{q=1}^n q^j \frac{t^j}{j!} \right) = \sum_{q=1}^n e^{qt} = \frac{e^{(n+1)t} - e^t}{e^t - 1}. \quad (2)$$

В свою очередь, разложение (2) в бесконечный ряд

$$G(n, t) = \sum_{q \geq 0} \hat{S}_q(n) \frac{t^q}{q!}$$

дает некоторый набор многочленов $\{\hat{S}_m(n) : m \geq 0\}$, значения которых для натуральных n дают значения соответствующих сумм.

В 1713 году Якоб Бернулли опубликовал под заголовком *Summae Potestatum* выражение для суммы m -степеней первых n натуральных чисел как многочлен $(m+1)$ -й степени от

переменной n , который определяется некоторым бесконечным набором рациональных чисел $\{B_m : m \geq 0\}$, называющихся теперь числами Бернулли. Запишем это выражение в виде

$$\hat{S}_m(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{q=0}^m (-1)^q \binom{m+1}{q} B_q n^{m+1-q}. \quad (3)$$

Теорема Фаульхабера утверждает, что для нечетных значений m многочлен (3) фактически является многочленом от $w := n(n+1)$. В определенной степени это связано с тем, что все нечетные числа Бернулли, начиная с третьего, равны нулю [2]. В свою очередь, известно [3], что для четных m любой многочлен (3) может быть записан как некоторый многочлен от w , умноженный на $2n+1$.

Естественно, что в приложениях могут возникать не только суммы вида (1), но также другие суммы, в которые входят степени натуральных чисел. В частности, Йоганн Фаульхабер рассматривал так называемые r -кратные суммы $S_m^r(n)$, определяемые рекуррентным соотношением

$$S_m^k(n) = \sum_{q=1}^n S_m^{k-1}(q), \quad k \geq 1,$$

начиная с $S_m^0(n) := n^m$. При рассмотрении подобных обобщений всегда возникает вопрос о многочленах, которые как и (3) помогают вычислять значения этих сумм.

В этой статье рассматриваем некоторые обобщения сумм степеней и их соответствующие многочлены. В частности, в следующем разделе определяем некоторый класс сумм, соответствующих k -й степени порождающей функции (2), где k — произвольное натуральное число. Обозначаем эти суммы символом $S_m^{(k)}(n)$ и называем их суммами степеней высшего порядка. Оказывается, что значения этих сумм также определяются значениями некоторых многочленов от n . Один из результатов состоит в том, что мы нашли выражение для этих многочленов, аналогичное формуле (3). Эти многочлены, в отличие от (3), определяются числами Бернулли высшего порядка, что хотя и не очевидно, но вполне естественно. В следующем разделе даем некоторые сведения об этих числах и о числах Стирлинга второго рода, которые присутствуют в формуле для этих многочленов. Во втором разделе также исследуем рациональные корни многочленов, соответствующих суммам степеней высшего порядка. В третьем разделе обсуждаем некоторые обобщения сумм (1), возникающие в приложениях, а именно, некоторый класс многократных сумм. По предположению, сделанному в работе [4], для нечетных степеней m , а именно, этот случай нас и интересует, эти суммы линейно выражаются через суммы степеней высшего порядка с некоторыми биномиальными коэффициентами. Несколько условно называем эти суммы биномиальными. Для $n = 1$ эти суммы исследовались в статьях [5], [6]. В конце третьего раздела для степени $m = 1$ получаем выражение для многочлена, дающего значения соответствующей биномиальной суммы.

1. СУММЫ СТЕПЕНЕЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

1.1. Числа Стирлинга второго порядка. По определению числом Стирлинга второго рода с символом $S(n, k)$ называется число способов разбиения множества из n элементов на k непустых подмножеств. Числа $S(n, k)$, как известно, удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k), \quad (4)$$

которое выводится с помощью комбинаторных рассуждений [1], и естественным краевым условиям: $S(0, 0) = 1$, $S(n, 0) = 0$ при $n \geq 1$ и $S(n, k) = 0$ при $k > n$. Также следует отметить,

что числа $S(n, k)$ однозначно определяются экспоненциальной порождающей функцией

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{t^n}{n!} = \frac{(e^t - 1)^k}{k!} \quad \forall k \geq 0. \quad (5)$$

1.2. Определение сумм степеней высшего порядка. Рассмотрим степень порождающей функции (2):

$$(G(n, t))^k := \sum_{q \geq 0} S_q^{(k)}(n) \frac{t^q}{q!} \quad \forall k \geq 1.$$

Имеем

$$(G(n, t))^k = \left(\sum_{q=1}^n e^{qt} \right)^k = \sum_{q=0}^{k(n-1)} \binom{k}{q}_n e^{(k+q)t}, \quad (6)$$

где символом $\binom{k}{q}_n$ обозначили полиномиальные коэффициенты, определяемые как

$$\left(\sum_{q=1}^n t^q \right)^k := \sum_{q=0}^{k(n-1)} \binom{k}{q}_n t^{k+q}.$$

Следует отметить, что числа $\binom{k}{q}_n$, обобщающие биномиальные коэффициенты ($n = 2$), первоначально возникли в работах Абрахама де Муавра и Леонарда Эйлера [7] и [8]. Затем они были переоткрыты в работах [9] и [10] и в дальнейшем были подробно исследованы в литературе, благодаря их хорошей приложимости.

Несложными вычислениями проверяется

Предложение 1. *Выражение (6) является порождающей экспоненциальной функцией для сумм вида*

$$S_m^{(k)}(n) = \sum_{q=0}^{k(n-1)} \binom{k}{q}_n (k+q)^m. \quad (7)$$

Очевидно, что эти суммы по определению являются результатом последовательных биномиальных конволюций, т. е.

$$S_m^{(k)}(n) = \sum_{q=0}^m \binom{m}{q} S_q^{(k-1)}(n) S_{m-q}(n), \quad k \geq 2.$$

Также очевидно, что это справедливо для соответствующих многочленов $\widehat{S}_m^{(k)}(n)$. Суммы вида (7) естественно называть суммами степеней высшего порядка. Для них справедливо

Предложение 2. *Суммы $S_m^{(k)}(n)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^m (-1)^q \binom{m+k}{q} S(m+k-q, k) S_q^{(r)}(n) = \\ = \frac{1}{\binom{k}{r}} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m+k}{m+k-r-j} S(m+k-r-j, k-r) S(r+j, r) n^{r+j}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $S(n, k)$ — числа Стирлинга второго рода.

Доказательство проводится с помощью стандартных рассуждений. Сделаем замену аргумента порождающей функции (2): $t \rightarrow -t$. Очевидно, справедливо соотношение

$$(-1)^r \left(\frac{e^{-nt} - 1}{e^t - 1} \right)^r = \sum_{q \geq 0} (-1)^q S_q^{(r)}(n) \frac{t^q}{q!}. \quad (9)$$

Умножая обе стороны соотношения (9) на $(e^t - 1)^k$ и принимая во внимание (5), получаем (8). $\square$

Как частный случай (8), при $r = k$ имеем

$$\sum_{q=0}^m (-1)^q \binom{m+k}{q} S(m+k-q, k) S_q^{(k)}(n) = (-1)^m S(k+m, k) n^{m+k}.$$

Если $k = 1$, то последнее соотношение превращается в хорошо известное [11] соотношение для классических сумм степеней. Представление многочленов $\widehat{S}_m^{(k)}(n)$ дает

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$\widehat{S}_m^{(k)}(n) = \frac{1}{\binom{m+k}{k}} \sum_{q=0}^m (-1)^q \binom{m+k}{q} B_q^{(k)} S(m+k-q, k) n^{m+k-q}, \quad (10)$$

где $B_q^{(k)}$ — числа Бернулли высшего порядка, определяемые порождающей экспоненциальной функцией

$$\frac{t^k}{(e^t - 1)^k} = \sum_{q \geq 0} B_q^{(k)} \frac{t^q}{q!}. \quad (11)$$

Сравнивая (10) с формулой (2), видим, что числа Бернулли здесь заменяются на их высшие аналоги и появляются числа Стирлинга второго рода.

1.3. Числа Бернулли высшего порядка. Классические числа Бернулли, как известно [1], однозначно определяются экспоненциальной порождающей функцией

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{q \geq 0} B_q \frac{t^q}{q!}. \quad (12)$$

Из (12) легко выводится рекуррентное соотношение

$$\sum_{q=0}^m \binom{m+1}{q} B_q = \delta_{0,m}, \quad (13)$$

которое является одним из многих рекуррентных соотношений для чисел Бернулли (например, [12]). Можно вывести, например, счетное множество рекуррентных соотношений вида

$$\sum_{q=0}^m \binom{m+k}{q} S(m+k-q, k) B_q = \frac{m+k}{k} S(m+k-1, k-1) \quad \forall k \geq 1. \quad (14)$$

Числа $B_q^{(k)}$ впервые появились в работе Норлунда [13] в связи с теорией конечных разностей и в дальнейшем были исследованы с различных точек зрения (например, [14]). Известно [13], что они связаны рекуррентным соотношением

$$B_n^{(k+1)} = \frac{k-n}{k} B_n^{(k)} - n B_{n-1}^{(k)}. \quad (15)$$

Следует отметить, что $B_m^{(k)}$ для некоторого фиксированного $m \geq 0$ вычисляется как значение некоторого многочлена по k . В литературе многочлены этого типа носят название многочленов Норлунда. Первые шесть из них имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_0^{(k)} &= 1, \quad B_1^{(k)} = -\frac{1}{2}k, \quad B_2^{(k)} = \frac{1}{12}k(3k-1), \quad B_3^{(k)} = -\frac{1}{8}k^2(k-1), \\ B_4^{(k)} &= \frac{k}{240}(15k^3 - 30k^2 + 5k + 2), \quad B_5^{(k)} = -\frac{1}{96}k^2(k-1)(3k^2 - 7k - 2). \end{aligned}$$

Замечание 1. Стандартными рассуждениями, используя порождающую функцию (11), можно вывести рекуррентное соотношение

$$\sum_{q=0}^m \binom{m+k}{q} S(m+k-q, k) B_q^{(r)} = \frac{\binom{m+k}{k}}{\binom{m+k-r}{k-r}} S(m+k-r, k-r) \quad \forall k \geq r, \quad (16)$$

частным случаем которого является (14). Используя (16), можно доказать, что многочлены, определяемые по формуле (10), удовлетворяют рекуррентному соотношению (8).

1.4. Многочлены Стирлинга. Как известно, числа Стирлинга $S(m+k, k)$, для некоторого фиксированного $m \geq 0$, могут быть вычислены как значения некоторого многочлена $f_m(k)$ степени $2m$. Эти многочлены удовлетворяют рекуррентному тождеству

$$f_m(k) - f_m(k-1) = k f_{m-1}(k), \quad (17)$$

которое легко следует из тождества (4). В литературе они известны как многочлены Стирлинга [15], [16]. Сравнение (15) и (17) показывает, что многочлены Норлунда и Стирлинга связаны соотношением (например, [17])

$$f_m(k) = \binom{m+k}{m} B_m^{(-k)}.$$

Интересное описание этих многочленов можно найти в работе [18].

Используя последнее соотношение, можем записать (16) в виде

$$\sum_{q=0}^m \binom{m}{q} B_{m-q}^{(-k)} B_q^{(r)} = B_m^{(r-k)}.$$

Последнее соотношение является перезаписью соотношения $B^{r-k} = B^r B^{-k}$, где $B = B(t)$ — порождающая экспоненциальная функция чисел Бернулли.

1.5. Доказательство теоремы 1. В формуле (10) можем заменить $S(m+k-q, k)$ на $f_{m-q}(k)$ и получить представление

$$\widehat{S}_m^{(k)}(n) = \frac{1}{\binom{m+k}{k}} \sum_{q=0}^m (-1)^q \binom{m+k}{q} \binom{m-q+k}{m-q} B_q^{(k)} B_{m-q}^{(-k)} n^{m-q+k}. \quad (18)$$

Используя биномиальное тождество

$$\binom{m+k}{q} \binom{m-q+k}{m-q} = \binom{m+k}{k} \binom{m}{q},$$

получаем более простое выражение

$$\widehat{S}_m^{(k)}(n) = n^k \sum_{q=0}^m (-1)^q \binom{m}{q} B_q^{(k)} B_{m-q}^{(-k)} n^{m-q}. \quad (19)$$

Заметим, что формула (19) представляет биномиальную конволюцию двух последовательностей: $\{a_m := (-1)^m B_m^{(k)}\}$ и $\{b_m := B_m^{(-k)} n^{m+k}\}$. Порождающие экспоненциальные функции этих последовательностей, как несложно убедиться, являются k -степенью порождающих экспоненциальных функций

$$A(t) = \frac{-t}{e^{-t} - 1} \quad \text{и} \quad C(n, t) = \frac{e^{nt} - 1}{t}. \quad (20)$$

Представление порождающей функции (2) в факторизованном виде: $G(n, t) = A(t)C(n, t)$ дает самый простой способ выразить многочлены $\hat{S}_m(n)$ через числа Бернулли. Так как выражение (19) эквивалентно (18), то теорему 1 следует считать доказанной.

1.6. Некоторые свойства многочленов $\hat{S}_m^{(k)}(n)$. Будем рассматривать эти многочлены от непрерывной переменной $z \in \mathbb{C}$, чтобы можно было говорить об их производных. Более удобно исследовать многочлены

$$Q_m^{(k)}(z) = \sum_{q=0}^m (-1)^q \binom{m}{q} B_q^{(k)} B_{m-q}^{(-k)} z^{m-q} = \hat{S}_m^{(k)}(n)/z^k.$$

Для дальнейшего будет полезна

Лемма 1. *Справедливы следующие два тождества:*

$$\sum_{q=0}^{m-1} \binom{m}{q} (m-q) B_q^{(k)} B_{m-q}^{(-k)} = \begin{cases} -kB_1, & m=1; \\ kB_m & \forall m \geq 2, \end{cases} \quad (21)$$

$$\sum_{q=0}^{m-2} \binom{m}{q} (m-q)(m-q-1) B_q^{(k)} B_{m-q}^{(-k)} = \begin{cases} -k(3k-1)B_2 - 2k^2 B_1, & m=2; \\ -k((m+1)k - m + 1)B_m + mk^2 B_{m-1} & \forall m \geq 3. \end{cases} \quad (22)$$

Доказательство. Пусть $B^{(k)} = B^{(k)}(t)$ — порождающая функция чисел Бернулли высшего порядка (11). Имеем

$$t \frac{dB^{(-k)}}{dt} B^{(k)} = kt \frac{e^t}{e^t - 1} - k = k(A - 1),$$

где $A = A(t)$ — порождающая функция, определенная в (20). Из этого соотношения следует (21). Чтобы показать (22), нужно вычислить

$$t^2 \frac{d^2 B^{(-k)}}{dt^2} B^{(k)} = \frac{t^2(k^2 - k)e^{2t}}{(e^t - 1)^2} + \frac{(t - 2k)kte^t}{e^t - 1} + k^2 + k = k^2(A - 1)^2 - k(A^2 - tA - 1). \quad (23)$$

Учитывая рекуррентное соотношение (15), выводим из (23) соотношение (22). $\square$

Замечание 2. Можно записать (21) как

$$\sum_{q=0}^{m-1} \binom{m}{q} (m-q) B_q^{(k)} B_{m-q}^{(-k)} = (-1)^m k B_m \quad \forall m \geq 1.$$

Однако учитывая тот факт, что числа Бернулли отличны от нуля только для четных m и $m = 1$, можем избавиться от знака минус. Аналогичное замечание касается формулы (22).

Теперь сформулируем некоторые утверждения о рациональных нулях многочленов $Q_m^{(k)}(z)$.

Теорема 2. *Справедливы следующие два утверждения:*

- 1) многочлен $Q_m^{(k)}(z)$ имеет простой корень $z_0 = -1$ для четных m и $m = 1$ и любого $k \geq 1$;
- 2) многочлен $Q_m^{(k)}(z)$ имеет двукратный корень $z_0 = -1$ для нечетных m , начиная с $m = 3$, и любого $k \geq 1$.

Доказательство. Очевидно,

$$Q_m^{(k)}(-1) = (-1)^m \sum_{q=0}^m \binom{m}{q} B_q^{(k)} B_{m-q}^{(-k)} = 0 \quad \forall m \geq 1,$$

т. е. для любого $m \geq 1$ и $k \geq 1$ многочлен $Q_m^{(k)}(z)$ имеет корень $z_0 = -1$. Имеем

$$\left. \frac{dQ_m^{(k)}(z)}{dz} \right|_{z=-1} = (-1)^{m-1} \sum_{q=0}^{m-1} \binom{m}{q} (m-q) B_q^{(k)} B_{m-q}^{(-k)}$$

и в силу (21) получаем

$$\left. \frac{dQ_m^{(k)}(z)}{dz} \right|_{z=-1} = -kB_m.$$

Числа Бернулли B_m отличны от нуля для четных m и $m = 1$. Таким образом, утверждение 1) доказано.

Для нечетных m , начиная с $m = 3$, числа Бернулли равны нулю и поэтому кратность корня $z = -1$ как минимум равна двум. Далее, вычисляем

$$\left. \frac{d^2 Q_m^{(k)}(z)}{dz^2} \right|_{z=-1} = (-1)^m \sum_{q=0}^{m-2} \binom{m}{q} (m-q)(m-q-1) B_q^{(k)} B_{m-q}^{(-k)}.$$

В силу тождества (22) вторая производная $Q_m^{(k)}(z)$ для любых $m \geq 2$ и $k \geq 1$ не равна нулю. $\square$

Замечание 3. В работе [19] было показано, что рациональными нулями многочленов $\hat{S}_m^{(1)}(z)$ являются только $0, -1$ и $-1/2$, причем последнее значение является простым корнем для этих многочленов с четными номерами.

Многочлены $Q_2^{(k)}(z)$ и $Q_3^{(k)}(z)$, как несложно убедиться, имеют следующий вид:

$$Q_2^{(k)}(z) = \frac{k}{12}(z+1)((3k+1)z+3k-1) \quad \text{и} \quad Q_3^{(k)}(z) = \frac{k^2}{8}(z+1)^2((k+1)z+k-1).$$

Отсюда

$$Q_2^{(k)}\left(-\frac{3k-1}{3k+1}\right) = 0 \quad \forall k \geq 1 \quad \text{и} \quad Q_3^{(k)}\left(-\frac{k-1}{k+1}\right) = 0 \quad \forall k \geq 2.$$

2. ДРУГИЕ ОБОБЩЕНИЯ СУММ СТЕПЕНЕЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.1. Многократные суммы. В работе [4] рассматривались многократные суммы вида

$$\tilde{S}_m^{(k)}(n) := \sum_{\{q\} \in B_{k, kn}} (q_1^m + (q_2 - n)^m + \dots + (q_k - kn + n)^m), \quad (24)$$

где предполагается, что степень m является нечетной. Здесь $B_{k,s} := \{q_j : 1 \leq q_1 \leq \dots \leq q_k \leq s\}$. Заметим, что если m нечетно, то значение q^m с отрицательным q в (24) является отрицательным, $q^m = -|q|^m$. Согласно этому правилу сумма (24) может быть переписана

$$\tilde{\mathcal{S}}_m^{(k)}(n) = \sum_{q=1}^{kn} c_q(k, n) q^m$$

с некоторыми целыми коэффициентами $c_q(k, n)$.

Пример. В случае $k = 2$ имеем

$$\tilde{\mathcal{S}}_m^{(2)}(n) = \sum_{\{q\} \in B_{2,2n}} (q_1^m + (q_2 - n)^m) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{q=1}^j q^m - j(n-j)^m \right) + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{q=1}^{n+j} q^m + (n+j)j^m \right).$$

Отсюда получаем

$$c_q(2, n) = \begin{cases} 2n + q + 1, & 1 \leq q \leq n; \\ 2n - q + 1, & n + 1 \leq q \leq 2n. \end{cases}$$

Замечание 4. Интерес к суммам вида (24) возник у первого из авторов статьи в связи с тем, что они появляются при исследовании непрерывного предела интегрируемых иерархий эволюционных дифференциально-разностных уравнений [20].

На первый взгляд многократные суммы (24) не имеют никакого отношения к суммам степеней высшего порядка (7). Однако в работе [4] была высказана гипотеза о том, что в случае нечетных m сумма $\tilde{\mathcal{S}}_m^{(k)}(n)$ выражается через $\mathcal{S}_m^{(k)}(n)$ как

$$\tilde{\mathcal{S}}_m^{(k)}(n) = \sum_{q=0}^{k-1} \binom{k(n+1)}{q} \mathcal{S}_m^{(k-q)}(n). \quad (25)$$

В этой работе суммы $\mathcal{S}_m^{(k)}(n)$ не были идентифицированы как суммы степеней высшего порядка. Гипотеза была основана на многочисленных вычислениях с применением методов компьютерной алгебры. Заметим, что для $k = 1$ утверждение гипотезы очевидно, а для $k = 2$ оно несложно доказывается. Кстати говоря, если (25) справедливо, то целые коэффициенты $c_q(k, n)$ являются, кроме того, ненулевыми и положительными.

2.2. Биномиальные суммы. Рассмотрим сумму вида [4]

$$\mathcal{S}_m^{(k)}(n) = \sum_{q=0}^{k-1} \binom{k(n+1)}{q} \mathcal{S}_m^{(k-q)}(n).$$

Для дальнейшего полезно рассмотреть ее частный случай

$$\mathcal{S}_m^{(k)}(1) = \sum_{q=0}^{k-1} \binom{2k}{q} (k-q)^m.$$

Заметим, что в случае нечетной степени m можем записать

$$2\mathcal{S}_m^{(k)}(1) = \sum_{q=0}^{2k} \binom{2k}{q} |k-q|^m. \quad (26)$$

В правой части этого тождества стоит биномиальная сумма, которая исследовалась в работах [5], [6]. Используя соотношение (26), можем перенести некоторые результаты работы [6] на суммы $\mathcal{S}_m^{(k)}(1)$.

Предложение 3. Сумма $\mathcal{S}_m^{(k)}(1)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\mathcal{S}_{m+2}^{(k)}(1) = k^2 \mathcal{S}_m^{(k)}(1) - 2k(2k-1) \mathcal{S}_m^{(k-1)}(1). \quad (27)$$

Доказательство. Имеем

$$k^2 \mathcal{S}_m^{(k)}(1) - \mathcal{S}_{m+2}^{(k)}(1) = \sum_{q=1}^{k-1} \binom{2k}{q} (k-q)^m (k^2 - (k-q)^2) = \sum_{q=1}^{k-1} \binom{2k}{q} (k-q)^m q (2k-q).$$

Используя биномиальное тождество

$$\binom{2k}{q} = \binom{2k-2}{q-1} \frac{2k(2k-1)}{q(2k-q)},$$

получаем соотношение (27). $\square$

Предложение 4. Существует бесконечное множество многочленов $\{P_m(k) : m \geq 0\}$ таких, что

$$\mathcal{S}_{2r+1}^{(k)}(1) = P_r(k) \frac{k}{2} \binom{2k}{k}. \quad (28)$$

Доказательство. Вычислим $\mathcal{S}_1^{(k)}(1)$. Имеем

$$\mathcal{S}_1^{(k)}(1) = \sum_{q=0}^k \binom{2k}{q} (k-q) = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^k \binom{2k}{q} ((2k-q) - q) = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^k \binom{2k}{q} (2k-q) - \frac{1}{2} \sum_{q=1}^k \binom{2k}{q} q.$$

Используя биномиальные тождества

$$\binom{2k}{q} = \frac{2k}{2k-q} \binom{2k-1}{q} = \frac{2k}{q} \binom{2k-1}{q-1},$$

получаем

$$\mathcal{S}_1^{(k)}(1) = k \sum_{q=0}^k \binom{2k-1}{q} - k \sum_{q=1}^k \binom{2k-1}{q-1} = k \binom{2k-1}{k} = \frac{k}{2} \binom{2k}{k}.$$

Таким образом, $\mathcal{S}_1^{(k)}(1)$ действительно вычисляется по формуле (28), где $P_0(k) = 1$. Используя тождество (27) и биномиальное тождество

$$2k(2k-1) \binom{2k-2}{k-1} = k^2 \binom{2k}{k},$$

убеждаемся в том, что если $\mathcal{S}_{2r+1}^{(k)}(1)$ выражается по формуле (28) с некоторым многочленом $P_r(k)$, то $\mathcal{S}_{2r+3}^{(k)}(1)$ также выражается этой формулой с некоторым многочленом $P_{r+1}(k)$, определяемым по формуле

$$P_{r+1}(k) = k^2 P_r(k) - k(k-1) P_r(k-1).$$

Таким образом, методом математической индукции доказываем это предложение. $\square$

Необходимо отметить, что многочлены $P_r(k)$ тесно связаны с многочленами Ганди [21], которые определяются рекуррентным соотношением

$$F_{r+1}(k) = (k+1)^2 F_r(k+1) - k^2 F_r(k),$$

начиная с $F_1(k) = 1$. Действительно, нетрудно убедиться, что $P_r(k) = (-1)^{r+1}kF_r(-k)$ для $r \geq 1$. Первые шесть многочленов Ганди имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F_1(k) &= 1, \quad F_2(k) = 2k + 1, \quad F_3(k) = 6k^2 + 8k + 3, \quad F_4(k) = 24k^3 + 60k^2 + 54k + 17, \\ F_5(k) &= 120k^4 + 480k^3 + 762k^2 + 556k + 155, \\ F_6(k) &= 720k^5 + 4200k^4 + 10248k^3 + 12840k^2 + 8146k + 2073. \end{aligned}$$

Многочлены Ганди появились в работе [21], в которой была сформулирована гипотеза о том, что $F_r(0) = |G_{2r}|$, где $G_{2r} = 2(1 - 4^r)B_{2r}$ — знакопередающиеся числа Дженокки, определяемые порождающей экспоненциальной функцией

$$\frac{2t}{e^t + 1} = t + \sum_{q \geq 1} G_{2q} \frac{t^{2q}}{(2q)!}.$$

Эта гипотеза была доказана в работах [22], [23]. Заметим, что числа Дженокки в отличие от чисел Бернулли являются целыми.

Замечание 5. Многочлены Ганди можно записать как $F_r(k) = F_r(1, 1, k)$, где $F_r(x, y, z)$ — некоторые многочлены трех переменных, которые определяются рекуррентным соотношением

$$F_{r+1}(x, y, z) = (z + x)(z + y)F_r(x, y, z + 1) - z^2 F_r(x, y, z),$$

начиная с $F_1(x, y, z) = 1$. В литературе эти многочлены известны как многочлены Дюмон-Фоата [24], [25]. Оказывается, что эти многочлены симметричны по переменным x, y, z . Основным свойством этих многочленов является то, что $F_r(1, 1, 1) = |G_{2r+2}|$.

Можем переписать формулу (28) в виде

$$\mathcal{S}_{2r+1}^{(k)}(1) = (-1)^{r+1} F_r(-k) k^2 \binom{2k-1}{k-1}$$

для $r \geq 1$.

2.3. Многочлены, соответствующие биномиальным суммам. Определим множество многочленов $\{\hat{\mathcal{S}}_m^{(k)}(z) : m \geq 1\}$ соотношением

$$\hat{\mathcal{S}}_m^{(k)}(z) = \sum_{q=0}^{k-1} \binom{k(z+1)}{q} \hat{\mathcal{S}}_m^{(k-q)}(z).$$

Наша цель состоит в описании этих многочленов. Для степени $m = 1$ сформулируем

Предложение 5. Многочлен $\hat{\mathcal{S}}_1^{(k)}(z)$ определяется по формуле

$$\hat{\mathcal{S}}_1^{(k)}(z) = \frac{z(z+1)}{2} k \binom{k(z+1)-1}{k-1} \quad \forall k \geq 1.$$

Чтобы доказать это предложение, достаточно использовать следующую лемму.

Лемма 2. Соотношение

$$\binom{k(z+1)-1}{k-1} = \frac{1}{k} \sum_{q=0}^{k-1} (k-q) \binom{k(z+1)}{q} z^{k-q-1}$$

является тождеством.

Доказательство. Обозначим

$$g_k(z) := k \binom{k(z+1)-1}{k-1} \quad \text{и} \quad \tilde{g}_k(z) := \sum_{q=0}^{k-1} (k-q) \binom{k(z+1)}{q} z^{k-q-1}.$$

Так как $g_k(z)$ и $\tilde{g}_k(z)$ являются многочленами по z порядка $k-1$, то достаточно показать

$$g_k^{(r)}(0) = \tilde{g}_k^{(r)}(0) \quad \forall r = 0, \dots, k-1.$$

Например, легко видеть, что $g_k(0) = \tilde{g}_k(0) = k$. Пусть $\xi := k!$, а $\xi_{i_1, \dots, i_m}$ означает произведение $\prod_{i=1}^m i$, где числа $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ отсутствуют. С этими обозначениями можем записать

$$g_k^{(r)}(0) = \frac{r!k^r}{(k-1)!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k-1} \xi_{i_1, \dots, i_r}. \quad (29)$$

Для $\tilde{g}_k(z)$ получим

$$\tilde{g}_k^{(r)}(0) = r! \sum_{q=0}^r \frac{k^{r-q}}{q!(k-q-1)!} \sum_{q+1 \leq i_1 < \dots < i_{r-q} \leq k-1} \xi_{i_1+1, \dots, i_{r-q}+1}. \quad (30)$$

Приравнявая (29) к (30) и умножая получившееся соотношение на $(k-1)!/r!$, получим равенство

$$k^r \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k-1} \xi_{i_1, \dots, i_r} = \sum_{q=0}^r \binom{k-1}{q} k^{r-q} \sum_{q+1 \leq i_1 < \dots < i_{r-q} \leq k-1} \xi_{i_1+1, \dots, i_{r-q}+1}, \quad (31)$$

которое нужно доказать.

Для удобства обозначим $D_q := \{i_j : q+1 \leq i_1 < \dots < i_{r-q} \leq k-1\}$. Очевидно, разбиение

$$D_0 = D_0^{(1)} \sqcup D_0^{(2)}$$

с

$$D_0^{(1)} := \{i_j : i_1 = 1; \ 2 \leq i_2 < \dots < i_r \leq k-1\}$$

и

$$D_0^{(2)} := \{i_j : 2 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k-1\}$$

дает соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{\{i_j\} \in D_0} \xi_{i_1, \dots, i_r} &= \sum_{2 \leq i_2 < \dots < i_r \leq k-1} \xi_{1, i_2, \dots, i_r} + \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k-1} \xi_{i_1, \dots, i_r} = \\ &= \sum_{\{i_j\} \in D_1} \xi_{i_1, \dots, i_{r-1}} + \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k-1} \xi_{i_1, \dots, i_r}. \end{aligned} \quad (32)$$

С другой стороны, использование разбиения

$$D_0 = \tilde{D}_0^{(1)} \sqcup \tilde{D}_0^{(2)}$$

с

$$\tilde{D}_0^{(1)} := \{i_j : i_r = k-1; \ 1 \leq i_1 < \dots < i_{r-1} \leq k-2\}$$

и

$$\tilde{D}_0^{(2)} := \{i_j : 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k-2\}$$

дает соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{\{i_j\} \in D_0} \xi_{i_1+1, \dots, i_r+1} &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r-1} \leq k-2} \xi_{i_1+1, \dots, i_{r-1}+1, k} + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k-2} \xi_{i_1+1, \dots, i_r+1} = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{\{i_j\} \in D_1} \xi_{i_1, \dots, i_{r-1}} + \sum_{2 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k-1} \xi_{i_1, \dots, i_r}. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя (32) и (33), можем переписать (31) в виде

$$(k-1)k^{r-1} \sum_{\{i_j\} \in D_1} \xi_{i_1, \dots, i_{r-1}} = \sum_{q=1}^r \binom{k-1}{q} k^{r-q} \sum_{\{i_j\} \in D_q} \xi_{i_1+1, \dots, i_{r-q}+1}.$$

Далее, используя аналогичные разбиения множеств $D_1, D_2, \dots$, шаг за шагом продолжаем преобразования начального соотношения. При этом на m -м шаге получаем это соотношение в виде

$$\binom{k-1}{m} k^{r-m} \sum_{\{i_j\} \in D_m} \xi_{i_1, \dots, i_{r-m}} = \sum_{q=m}^r \binom{k-1}{q} k^{r-q} \sum_{\{i_j\} \in D_q} \xi_{i_1+1, \dots, i_{r-q}+1}.$$

Очевидно, что на r -м шаге получаем тривиальное тождество. $\square$

Учитывая, что $S_1^{(k)}(z) = k(z+1)z^k/2$, из леммы 2 получаем предложение 5, согласующееся с предположением, сделанным в работе [4], согласно которому многочлены $\widehat{S}_{2r+1}^{(k)}(z)$ для $r \geq 0$ определяются по формуле

$$\widehat{S}_{2r+1}^{(k)}(z) = \left(-\frac{w}{2}\right)^{r+1} F_r(w, -k) k^2 \binom{k(z+1)-1}{k-1},$$

где $F_r(w, k)$ — некоторые многочлены по k степени $r-1$ с коэффициентами, являющимися многочленами Лорана по переменной $w := z(z+1)$. В частности, при $z = 1$ имеем

$$\widehat{S}_{2r+1}^{(k)}(1) = (-1)^{r+1} F_r(2, -k) k^2 \binom{2k-1}{k-1} = (-1)^{r+1} F_r(2, -k) \frac{k^2}{2} \binom{2k}{k}.$$

Последнее выражение согласуется с (28). Первые шесть многочленов $F_r(w, k)$ по переменной k определяются следующим образом [4]:

$$\begin{aligned} F_1(w, k) &= 1, \quad F_2(w, k) = 2k + \frac{2}{3} \frac{w+1}{w}, \\ F_3(w, k) &= 6k^2 + \frac{16}{3} \frac{w+1}{w} k + \frac{4}{3} \frac{(w+1)^2}{w^2}, \\ F_4(w, k) &= 24k^3 + 40 \frac{(w+1)}{w} k^2 + 24 \frac{(w+1)^2}{w^2} k + \frac{24}{5} \frac{(w+1)^3}{w^3} + \frac{8}{5} \frac{1}{w}, \\ F_5(w, k) &= 120k^4 + 320 \frac{(w+1)}{w} k^3 + \frac{1016}{3} \frac{(w+1)^2}{w^2} k^2 + \\ &\quad + \left(160 \frac{(w+1)^3}{w^3} + 32 \frac{1}{w}\right) k + \frac{80}{3} \left(\frac{(w+1)^4}{w^4} + \frac{w+1}{w^2}\right), \end{aligned}$$

$$F_6(w, k) = 720k^5 + 2800 \frac{(w+1)}{w} k^4 + \frac{13664}{3} \frac{(w+1)^2}{w^2} k^3 + \\ + \left(\frac{55936}{15} \frac{(w+1)^3}{w^3} + \frac{2544}{5} \frac{1}{w} \right) k^2 + \left(\frac{22112}{15} \frac{(w+1)^4}{w^4} + \frac{13664}{15} \frac{(w+1)}{w^2} \right) k + \\ + \frac{22112}{105} \frac{(w+1)^5}{w^5} + \frac{44224}{105} \frac{(w+1)^2}{w^3}.$$

Прямой проверкой можно убедиться, что для этих примеров справедливо $F_r(2, k) = F_r(k)$, где многочлены $F_r(k)$ — многочлены Ганди. Примеры, выписанные выше, наталкивают на мысль о том, что многочлены $F_r(w, k)$ должны записываться в виде

$$F_r(w, k) = \sum_{q \geq 0} \frac{1}{w^q} \sum_{j=0}^{r-3q-1} F_{r,j}^{(q)} \frac{(w+1)^{r-j-3q-1}}{w^{r-j-3q-1}} k^j$$

с некоторыми числовыми коэффициентами $F_{r,j}^{(q)}$. Для любого фиксированного r сумма по q в действительности является конечной. По соглашению, если $r - 3q - 1 \leq -1$, то сумма по j считаем нулевой.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Грэхем Э., Кнут Д., Паташник О. *Конкретная математика. Основание информатики* (Мир, М., 1998).
- [2] Knuth D. E. *Johann Faulhaber and the sums of powers*, Math. Comp. **61** (203), 277–294 (1993).
- [3] Jacobi C. G. *De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinaianae*, J. Reine Angew. Math. **12**, 263–272 (1834).
- [4] Svinin A. K. *Conjectures involving a generalization of the sums of powers of integers*, Exp. Math. doi: 10.1080/10586458.2017.1306815.
- [5] Strazdins I. *Solution to problem B-871*, Fibonacci Quart. **38.1**, 86–87 (2000).
- [6] Tuentner H. J. H. *Walking into an absolute sum*, Fibonacci Quart. **40**, 175–180 (2006).
- [7] De Moivre A. *The doctrine of chances: or, a method of calculating the probabilities of events in play* (Chelsea Publ. Company, N. Y., 1756).
- [8] Euler L. *De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunque $(1 + x + x^2 + \dots)^n$* , Nova Acta Academiae Sci. Imperialis Petropolitinae **12**, 47–57 (1801).
- [9] Montel P. *Sur les combinaisons avec répétitions limitées*, Bull. Sci. Math. **66**, 86–103 (1942).
- [10] Tremblay A. *Generalization of Pascal's arithmetical triangle*, National Math. Magazine **11**, 255–258 (1937).
- [11] Риордан Дж. *Комбинаторные тождества* (Наука, М., 1982).
- [12] Agoh T., Dilcher K. *Shortened recurrence relations for Bernoulli numbers*, Disc. Math. **309** (4), 887–898 (2009).
- [13] Nörlund N. E. *Vorlesungen über Differenzenrechnung* (Springer, Berlin, 1924).
- [14] Carlitz L. *Some theorems on Bernoulli numbers of higher order*, Pacific J. Math. **2** (2), 127–139 (1952).
- [15] Gessel I., Stanley R. P. *Stirling polynomials*, J. Comb. Theor., Ser. A **24** (1), 24–33 (1978).
- [16] Jordan K. *Calculus of finite differences* (Chelsea Publ. Company, N. Y., 1965).
- [17] Adelberg A. *A finite difference approach to degenerate Bernoulli and Stirling polynomials*, Disc. Math. **140** (1–3), 1–21 (1995).
- [18] Gessel I. M. *On Miki's identity for Bernoulli numbers*, J. Number Theory **110** (1), 75–82 (2005).
- [19] Kimura N., Siebert H. *Über die rationalen Nullstellen der von Potenzsummen der natürlichen Zahlen definierten Polynome*, Proc. Japan Acad., Ser. A, Math. Sci. **56** (7), 354–356 (1980).
- [20] Свинин А. К. *О непрерывном пределе интегрируемой иерархии цепочки Богоявленского*, Матер. конф. “Ляпуновские чтения” (г. Иркутск, 5–7 декабря, 2017 г.), 46.
- [21] Gandhi J. M. *Research problems: a conjectured representation of Genocchi numbers*, Amer. Math. Monthly **77** (5), 505–506 (1970).
- [22] Carlitz L. *A conjecture concerning Genocchi numbers*, Norske Vidensk. Selsk. Sk. **9**, 1–4 (1971).
- [23] Riordan J., Stein P. R. *Proof of a conjecture on Genocchi numbers*, Disc. Math. **5** (4), 381–388 (1973).
- [24] Carlitz L. *Explicit formulas for the Dumont–Foata polynomial*, Disc. Math. **30** (3), 211–225 (1980).
- [25] Dumont D., Foata D. *Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi*, Bull. Soc. Math. France **104**, 433–451 (1976).

Андрей Кириллович Свинин

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук,
ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,

e-mail: svinin@icc.ru

Светлана Валерьевна Свинина

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук,
ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,

e-mail: svinina@icc.ru

A.K. Svinin and S.V. Svinina

On some generalizations of sum of powers of natural numbers

Abstract. In this paper we consider some generalizations of the sum of powers of natural numbers. In particular, we study the class of sums whose generating function is the power of the generating function for the classical sums of powers. We also consider the so-called binomial sums and solve the problem of constructing polynomials that allow to calculate the values of the corresponding sums in certain cases.

Keywords: sums of powers of natural numbers, Bernoulli numbers, Genocchi numbers, Gandhi polynomials.

Andrei Kirillovich Svinin

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,*

e-mail: svinin@icc.ru

Svetlana Valer'evna Svinina

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,*

e-mail: svinina@icc.ru