Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Тимергалиев, О существовании решений нелинейных задач равновесия положных неоднородных анизотропных оболочек типа Тимошенко, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 8, 45–61

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-8-45-61>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:03:44

С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГИХ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

Аннотация. Доказывается существование решений геометрически нелинейной краевой задачи для упругих пологих неоднородных анизотропных оболочек с жестко заделанными краями в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко. Краевая задача сводится к одному нелинейному операторному уравнению, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжатых отображений. Основу метода исследования составляют интегральные представления для обобщенных перемещений, содержащие голоморфные функции, которые определяются при помощи граничных условий с привлечением теории интегралов типа Коши с действительными плотностями.

Ключевые слова: оболочка типа Тимошенко, система уравнений равновесия, краевая задача, обобщенные перемещения, обобщенное решение задачи, интегральные представления, сингулярные интегральные уравнения, теорема существования.

УДК: 517.958:539.3

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-8-45-61

1. Введение. Постановка задачи. Разрешимость нелинейных задач равновесия тонких упругих оболочек достаточно полно изучена в рамках модели Кирхгофа–Лява ([1]–[6] и цитированная литература). Вопросы существования решений нелинейных задач равновесия в рамках более общих моделей теории оболочек, не опирающихся на гипотезы Кирхгофа–Лява, вошли в известный список нерешенных проблем математической теории И.И. Воровича [1] и до недавнего времени оставались открытыми. В настоящее время имеется ряд работ [7]–[13], в которых разрешимость нелинейных задач исследуется в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко. В основе исследований в [7]–[13] лежат интегральные представления для обобщенных перемещений, содержащие голоморфные функции, которые находятся таким образом, чтобы обобщенные перемещения удовлетворяли заданным граничным условиям. Для их построения используются два подхода. Первый подход основан на применении явных представлений решений задачи Римана–Гильберта для голоморфных функций в единичном круге. Поэтому плоская область, гомеоморфная срединной поверхности оболочки, либо с самого начала предполагается единичным кругом [7]–[9], [11], либо конформно отображается на единичный круг [10]. При втором подходе для определения голоморфных функций используется теория интегралов типа Коши с действительными плотностями, которые находятся как решения системы одномерных сингулярных интегральных уравнений [12]–[13]. Во всех этих работах оболочка предполагалась изотропной

и однородной. В настоящей статье метод работ [12], [13] развивается на случай неоднородных анизотропных оболочек типа Тимошенко, отнесенных к произвольным криволинейным координатам.

Рассматривается следующая модель теории пологих оболочек типа Тимошенко:

1) соотношения деформации-перемещения ([14], сс.168-170, 269):

$$\begin{aligned}\gamma_{jj}^0 &= w_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda w_\lambda - B_{jj} w_3 + w_{3\alpha^j}^2/2, \quad j = 1, 2, \\ \gamma_{12}^0 &= w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda w_\lambda - 2B_{12} w_3 + w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2}, \\ \gamma_{jj}^1 &= \psi_{j\alpha^j} - G_{jj}^\lambda \psi_\lambda, \quad j = 1, 2, \quad \gamma_{12}^1 = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda \psi_\lambda, \\ \gamma_{j3}^0 &= w_{3\alpha^j} + \psi_j, \quad j = 1, 2, \quad \gamma_{33}^0 = \gamma_{k3}^1 \equiv 0, \quad k = \overline{1, 3},\end{aligned}\tag{1}$$

где γ_{ij}^k — компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки; w_i и w_3 — тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0 ; ψ_i — углы поворота нормальных сечений; B_{ij} — составляющие тензора кривизны S_0 , G_{ij}^λ — символы Кристоффеля, α^1, α^2 — декартовы координаты точек плоской ограниченной области Ω , гомеоморфной S_0 ; индекс α^j означает дифференцирование по α^j . Здесь и далее по повторяющимся латинским индексам ведется суммирование от 1 до 3, по греческим индексам — от 1 до 2;

2) определяющие соотношения: $\sigma^{ij} = B^{ijkn} \gamma_{kn}$ ($i \leq j, k \leq n; i, j, k, n = \overline{1, 3}$), где $\gamma_{kn} = \gamma_{kn}^0 + \alpha^3 \gamma_{kn}^1$; $B^{ijkn} = B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ — упругие характеристики оболочки;

3) край оболочки жестко заделан:

$$w_j = \psi_k = 0, \quad j = \overline{1, 3}, \quad k = 1, 2,\tag{2}$$

на Γ (Γ — граница области Ω);

4) на оболочку действуют массовые $\vec{F}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ и поверхностные $\vec{F}^\pm(\alpha^1, \alpha^2)$ силы.

Соотношения (1) для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k = t_{ij}^k + \tau_{ij}^k + \mu_{ij}^k + \chi_{ij}^k, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad k = 0, 1,\tag{3}$$

где

$$\begin{aligned}t_{jj}^0 &= w_{j\alpha^j}, \quad j = 1, 2, \quad t_{12}^0 = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}, \quad t_{jj}^1 = \psi_{j\alpha^j}, \quad j = 1, 2, \quad t_{12}^1 = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}, \\ t_{j3}^k &= 0, \quad j = \overline{1, 3}, \quad k = 0, 1; \quad \tau_{jj}^0 = -G_{jj}^\lambda w_\lambda, \quad j = 1, 2, \quad \tau_{12}^0 = -2G_{12}^\lambda w_\lambda, \quad \tau_{jj}^1 = -G_{jj}^\lambda \psi_\lambda, \quad j = 1, 2, \\ \tau_{12}^1 &= -2G_{12}^\lambda \psi_\lambda, \quad \tau_{j3}^0 = \psi_j, \quad j = 1, 2, \quad \tau_{33}^0 = \tau_{j3}^1 = 0, \quad j = \overline{1, 3}; \quad \mu_{jj}^0 = -B_{jj} w_3, \quad j = 1, 2, \\ \mu_{12}^0 &= -2B_{12} w_3, \quad \mu_{j3}^0 = w_{3\alpha^j}, \quad j = 1, 2, \quad \mu_{33}^0 = \mu_{ij}^1 = 0, \quad i, j = \overline{1, 3}; \\ \chi_{jj}^0 &= w_{3\alpha^j}^2/2, \quad j = 1, 2, \quad \chi_{12}^0 = w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2}, \quad \chi_{ij}^1 = \chi_{j3}^0 = 0, \quad i, j = \overline{1, 3}.\end{aligned}\tag{4}$$

В рамках модели 1)–4) получаем уравнения равновесия

$$\begin{aligned}(DT^{i\lambda})_{\alpha\lambda} + DG_{\lambda\mu}^i T^{\lambda\mu} + DR^i &= 0, \quad i = 1, 2, \\ (DT^{\lambda\mu} w_{3\alpha\lambda})_{\alpha\mu} + (DT^{\lambda 3})_{\alpha\lambda} + DB_{\lambda\mu} T^{\lambda\mu} + DR^3 &= 0, \\ (DM^{i\lambda})_{\alpha\lambda} - DT^{i3} + DG_{\lambda\mu}^i M^{\lambda\mu} + DN^i &= 0, \quad i = 1, 2,\end{aligned}\tag{5}$$

в которых T^{ij} — усилия, M^{ij} — моменты:

$$\begin{aligned}T^{ij} &\equiv T_\gamma^{ij} = D_0^{ijkn} \gamma_{kn}^0 + D_1^{ijkn} \gamma_{kn}^1, \quad M^{ij} \equiv M_\gamma^{ij} = D_1^{ijkn} \gamma_{kn}^0 + D_2^{ijkn} \gamma_{kn}^1, \\ D_m^{ijkn} &= \int_{-h/2}^{h/2} B^{ijkn} (\alpha^3)^m d\alpha^3, \quad i, j, k, n = \overline{1, 3}, \quad m = 0, 1, 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^j(\alpha^1, \alpha^2) &= F^{+j}(\alpha^1, \alpha^2) + F^{-j}(\alpha^1, \alpha^2) + \int_{-h/2}^{h/2} F^j(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) d\alpha^3, \\
N^k(\alpha^1, \alpha^2) &= [F^{+k}(\alpha^1, \alpha^2) - F^{-k}(\alpha^1, \alpha^2)]h/2 + \int_{-h/2}^{h/2} F^k \alpha^3 d\alpha^3, \quad j = \overline{1, 3}, \quad k = 1, 2;
\end{aligned} \tag{6}$$

$D = D(\alpha^1, \alpha^2)$ — якобиан, $h = \text{const}$ — толщина оболочки.

Задача I. Требуется найти решение системы (5), удовлетворяющее граничным условиям (2).

Краевую задачу будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующие условия:

- (а) квадратичная форма $B^{ijkn} \gamma_{ij} \gamma_{kn}$ положительно определена во всем объеме, занятом оболочкой;
- (б) Ω — произвольная односвязная область с границей $\Gamma \in C_\beta^1$;
- (в) $B_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}^\lambda, D_m^{ijkn}$ ($i, j, k, n = \overline{1, 3}, \mu, \nu, \lambda = 1, 2$) $\in W_p^{(1)}(\Omega)$; $D_m^{1111}, D_m^{1212} \in C_\beta(\overline{\Omega})$, $m = 0, 1, 2$;
- (г) $\vec{F} \in L_p(\Omega) \times L_1[-h/2, h/2]$, $\vec{F}^\pm \in L_p(\Omega)$;
- (е) $D = D(\alpha^1, \alpha^2) > 0$ в $\overline{\Omega}$ и $D \in W_p^{(1)}(\Omega) \cap C_\beta(\overline{\Omega})$.

Здесь и далее $2 < p < 4/(2 - \beta)$, $0 < \beta < 1$.

Определение. Обобщенным решением задачи I назовем вектор обобщенных перемещений $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяющий системе (5) и поточечно граничным условиям (2).

Здесь $W_p^{(j)}(\Omega)$ ($j = 1, 2$) — пространства Соболева. В силу теорем вложения для соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p > 2$ обобщенное решение $a \in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$. Здесь и далее $\alpha = (p - 2)/p$. Заметим, что при $2 < p < 4/(2 - \beta)$ справедливо неравенство $\alpha < \beta/2$.

2. Решение задачи I относительно тангенциальных перемещений и углов поворота. Рассмотрим систему (5) без третьего уравнения и представим ее в удобной для дальнейших исследований форме. С этой целью введем две комплексные функции:

$$\omega_1 = \Omega_1(w_0), \quad \omega_2 = \Omega_2(\psi_0), \quad w_0 = (w_1, w_2), \quad \psi_0 = (\psi_1, \psi_2), \tag{7}$$

$$\Omega_j(f_0) = D[D_m^{1111}(f_{1\alpha^1} + f_{2\alpha^2}) + iD_m^{1212}(f_{2\alpha^1} - f_{1\alpha^2})], \quad m_j = 1 - (-1)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \quad f_0 = (f_1, f_2).$$

Заменим усилия T^{ij} и моменты M^{ij} их выражениями из (6), а компоненты деформаций γ_{ij}^k — по формулам (3). Прибавляя после этого к первому уравнению в (5) второе, умноженное на мнимую единицу i , а к четвертому уравнению — пятое, умноженное также на i , систему (5) без третьего уравнения представляем в виде

$$\partial\omega_j/\partial\bar{z} + P_j(a_0) + K_j(a_0) + L_{js}(w_3) + L_{jc}(w_3) + G_j(w_3) + F_j = 0, \quad j = 1, 2, \tag{8}$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned}
\partial\omega_j/\partial\bar{z} &= (\omega_{j\alpha^1} + i\omega_{j\alpha^2})/2, \quad P_j(a_0) = P_{j1}(a_0) + iP_{j2}(a_0), \quad K_j(a_0) = K_{j1}(a_0) + iK_{j2}(a_0), \\
L_{js}(w_3) &= L_{j1s}(w_3) + iL_{j2s}(w_3), \quad L_{jc}(w_3) = L_{j1c}(w_3) + iL_{j2c}(w_3), \quad G_j(w_3) = G_{j1}(w_3) + iG_{j2}(w_3), \\
F_1 &= D(R^1 + iR^2)/2, \quad F_2 = D(N^1 + iN^2)/2, \quad a_0 = (w_1, w_2, \psi_1, \psi_2);
\end{aligned}$$

$$P_{kj}(a_0) = a_{2(k-1)+j,\delta}^{\lambda\nu} w_{\delta\alpha^\lambda\alpha^\nu} + a_{2(k-1)+j,2+\delta}^{\lambda\nu} \psi_{\delta\alpha^\lambda\alpha^\nu}, \quad k = 1, 2,$$

$$K_{1j}(a_0) = \frac{1}{2} \{ -(DD_0^{1111})_{\alpha^j} (w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^2}) + (-1)^{j-1} (DD_0^{1212})_{\alpha^{3-j}} (w_{2\alpha^1} - w_{1\alpha^2}) +$$

$$\begin{aligned}
& +(DD_0^{j\lambda kn})_{\alpha\lambda}(t_{kn}^0 + \tau_{kn}^0) + (DD_1^{j\lambda kn})_{\alpha\lambda}\gamma_{kn}^1 + DD_0^{j\lambda kn}\tau_{kn\alpha\lambda}^0 + DD_1^{j\lambda kn}\tau_{kn\alpha\lambda}^1 + DG_{\lambda\nu}^j T_{t+\tau}^{\lambda\nu}, \quad (9) \\
& K_{2j}(a_0) = \frac{1}{2}\{-(DD_2^{1111})_{\alpha^j}(\psi_{1\alpha^1} + \psi_{2\alpha^2}) + (-1)^{j-1}(DD_2^{1212})_{\alpha^{3-j}}(\psi_{2\alpha^1} - \psi_{1\alpha^2}) + \\
& +(DD_1^{j\lambda kn})_{\alpha\lambda}(t_{kn}^0 + \tau_{kn}^0) + (DD_2^{j\lambda kn})_{\alpha\lambda}\gamma_{kn}^1 + DD_2^{j\lambda kn}\tau_{kn\alpha\lambda}^1 + DD_1^{j\lambda kn}\tau_{kn\alpha\lambda}^0 + DG_{\lambda\nu}^j M_{t+\tau}^{\lambda\nu} - DT_{t+\tau}^{j3}\}, \\
& L_{mjs}(w_3) = \frac{1}{2}DD_{m-1}^{j\lambda\nu 3}\mu_{\nu 3\alpha\lambda}^0, \quad L_{1jc}(w_3) = \frac{1}{2}\{(DD_0^{j\lambda kn})_{\alpha\lambda}\mu_{kn}^0 + DD_0^{j\lambda\nu\beta}\mu_{\nu\beta\alpha\lambda}^0 + DG_{\lambda\nu}^j T_{\mu}^{\lambda\nu}\}, \\
& L_{2jc}(w_3) = \frac{1}{2}\{(DD_1^{j\lambda kn})_{\alpha\lambda}\mu_{kn}^0 + DD_1^{j\lambda\nu\beta}\mu_{\nu\beta\alpha\lambda}^0 + DG_{\lambda\nu}^j M_{\mu}^{\lambda\nu} - DT_{\mu}^{j3}\}, \quad m, j = 1, 2, \\
& G_{1j}(w_3) = \frac{1}{2}\{(DD_0^{j\lambda kn})_{\alpha\lambda}\chi_{kn}^0 + DG_{\lambda\nu}^j T_{\chi}^{\lambda\nu}\}, \quad G_{2j}(w_3) = \frac{1}{2}\{(DD_1^{j\lambda kn})_{\alpha\lambda}\chi_{kn}^0 + DG_{\lambda\nu}^j M_{\chi}^{\lambda\nu} - \\
& - DT_{\chi}^{j3}\}, \quad j = 1, 2; \quad a_{2k-1,2k-1}^{jj} = a_{2k,2k}^{11} = 0, \quad a_{2k-1,2k}^{jj} = \frac{1}{2}DD_{m_k}^{1jj2}, \quad a_{j,j}^{12} = 2a_{1,2}^{jj}, a_{2+j,2+j}^{12} = \\
& = 2a_{3,4}^{jj}, \quad a_{2k-1,2k}^{12} = \frac{1}{2}D(D_{m_k}^{1122} + 2D_{m_k}^{1212} - D_{m_k}^{1111}), \quad a_{2k,2k}^{22} = \frac{1}{2}D(D_{m_k}^{2222} - D_{m_k}^{1111}), \\
& a_{j,2+k}^{nn} = \frac{1}{2}DD_1^{jknk}, \quad a_{j,2+k}^{12} = \frac{1}{2}D(D_1^{j2k1} + D_1^{j1k2}), \quad k, j, n = 1, 2; \quad a_{j,k}^{\lambda\nu} = a_{k,j}^{\lambda\nu}, \quad \lambda, \nu = 1, 2,
\end{aligned}$$

$j, k = \overline{1, 4}; \quad t_{kn}^m, \tau_{kn}^m, \mu_{kn}^0, \chi_{kn}^0, T_{t+\tau}^{jk}, M_{t+\tau}^{jk}$ определены в (4), (6).

В основе исследования разрешимости системы (8) лежат интегральные представления для тангенциальных перемещений w_1, w_2 и углов поворота ψ_1, ψ_2 . Для их вывода рассмотрим неоднородные уравнения Коши–Римана

$$\omega_j \bar{z} = \rho_j, \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

общие решения которых имеют вид ([15], с. 29)

$$\omega_j(z) = \Phi_j(z) + T\rho_j(z), \quad j = 1, 2, \quad T\rho_j(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\rho_j(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad (11)$$

где $\Phi_j(z)$ — произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_{\alpha}(\bar{\Omega})$; $\rho_j \in L_p(\Omega)$ — произвольно фиксированные комплексные функции.

Известно ([15], с. 39), что T — вполне непрерывный оператор в $L_p(\Omega)$, $p > 2$, $C_{\delta}^k(\bar{\Omega})$, отображающий эти пространства в $C_{\alpha}(\bar{\Omega})$, $C_{\delta}^{k+1}(\bar{\Omega})$ соответственно, а также вполне непрерывный оператор из $L_p(\Omega)$, $p > 2$, в $C_{\alpha'}(\bar{\Omega}) \quad \forall \alpha' < \alpha = (p-2)/p$. Кроме того, существуют обобщенные производные

$$\frac{\partial T f}{\partial \bar{z}} = f, \quad \frac{\partial T f}{\partial z} \equiv S f = -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \quad (12)$$

где S — линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega) \quad \forall p > 1$, $C_{\delta}^k(\bar{\Omega})$, причем ([15], с. 267) $\|S f\|_{L_p(\Omega)} \leq \Lambda_p \|f\|_{L_p(\Omega)}$.

Соотношения (11) в свою очередь при помощи функций $\omega_1^0 = w_2 + iw_1$, $\omega_2^0 = \psi_2 + i\psi_1$ можно записать в виде

$$\omega_{j\bar{z}}^0 = i(d_{m_j}^1 \omega_j + d_{m_j}^2 \bar{\omega}_j) \equiv id_{m_j}[\omega_j], \quad d_{m_j}^k = \frac{1}{4D} \left(\frac{1}{D_{m_j}^{1111}} + (-1)^k \frac{1}{D_{m_j}^{1212}} \right), \quad j, k = 1, 2. \quad (13)$$

Уравнения (13) также представляют собой неоднородные уравнения Коши–Римана, общие решения которых даются формулами

$$\omega_j^0(z) = \Psi_j(z) + iTd_{m_j}[\Phi_j + T\rho_j](z), \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

где Ψ_j — произвольные голоморфные функции класса $C^1_\alpha(\overline{\Omega})$.

Голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$ ($j = 1, 2$) и комплексные функции $\rho_j(z)$ ($j = 1, 2$) найдем так, чтобы тангенциальные перемещения w_1, w_2 и углы поворота ψ_1, ψ_2 , определенные формулами (14), удовлетворяли системе уравнений (8) и граничным условиям

$$\omega_j^0(t) = 0, \quad t \in \Gamma, \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

Условия (15) дифференцируем по длине s дуги кривой Γ . С учетом соотношений (14) и (12) будем иметь

$$t'\Psi'_j(t) + it'Sd_{m_j}[\Phi_j]^+(t) + i\bar{t}'d_{m_j}[\Phi_j(t)] = l_j^0(\rho_j)(t), \quad t = t(s) \in \Gamma, \quad (16)$$

$$l_j^0(\rho_j)(t) = -it'Sd_{m_j}[T\rho_j]^+(t) - i\bar{t}'d_{m_j}[T\rho_j(t)], \quad j = 1, 2, \quad t' = dt/ds, \bar{t}' = d\bar{t}/ds;$$

символ $f^+(t)$ означает предел функции $f(z)$ при $z \rightarrow t \in \Gamma$ изнутри области Ω .

Легко видеть, что граничные условия (15) и (16) эквивалентны, если

$$\omega_j^0(t_j) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (17)$$

где $t_j \in \Gamma, j = 1, 2$, — произвольно фиксированные точки.

Преобразуем граничные условия (16). Представляя голоморфную функцию $\Phi_j(z)$ в области Ω интегралом Коши, переставляя после этого порядок интегрирования в повторных интегралах, используя известные формулы (4.7), (4.9) из ([15], с. 28), а также формулы Сохоцкого ([16], с. 66), после несложных преобразований граничные условия (16) можно записать в виде

$$t'\Theta_j(t) + i\bar{t}'d_{m_j}^2(t)\overline{\Phi_j(t)} + K_{0j}(\Phi_j)(t) = l_j^0(\rho_j)(t), \quad j = 1, 2, \quad t \in \Gamma, \quad (18)$$

где $\Theta_j(t) \equiv \Theta_j^+(t)$ — граничное значение голоморфной в Ω функции

$$\Theta_j(z) = \Psi'_j(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{d_{m_j}^2(\tau)\overline{\Phi_j(\tau)}}{\tau - z} d\bar{\tau}, \quad (19)$$

$$K_{0j}(\Phi_j)(t) = -\frac{t'}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau, t) - \psi(t, t)}{\tau - t} \Phi_j(\tau) d\tau + \frac{t'}{\pi i} \iint_{\Omega} \frac{d_{m_j\zeta}^2(\zeta)\overline{\Phi_j(\zeta)}}{\zeta - t} d\xi d\eta,$$

$$\psi(\tau, t) = \frac{Td_{m_j}^1(\tau) - Td_{m_j}^1(t)}{\tau - t}; \quad \psi(t, t) = \lim_{\tau \rightarrow t} \psi(\tau, t) = (\bar{t}')^2 d_{m_j}^1(t) + (Sd_{m_j}^1)^+(t);$$

оператор T задан формулой в (11), функции $d_{m_j}^k$ определены в (13).

Таким образом, нахождение функций $\Phi_j(z)$, $\Psi_j(z)$, $j = 1, 2$, свелось к нахождению голоморфных функций $\Theta_j(z)$, $\Phi_j(z)$, $j = 1, 2$, из условий (18). Для их определения воспользуемся методом, который использовал И.Н.Векуа [17] в случае эллиптических дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами. В соответствии с этим методом голоморфные функции ищутся в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями. В нашем случае интегралы типа Коши возьмем в виде

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu_j^1(\tau)}{\tau'(\tau - z)} d\tau \equiv \Phi_j[\mu_j^1](z), \quad \Theta_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu_j^2(\tau)}{\tau'(\tau - z)} d\tau \equiv \Theta_j[\mu_j^2](z), \quad j = 1, 2, \quad (20)$$

где $\mu_j^k(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ — произвольные действительные функции, $\tau' = d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ — элемент длины дуги кривой Γ .

Используя формулы Сохоцкого, находим $\Phi_j(t) \equiv \Phi_j^+(t)$, $\Theta_j(t) \equiv \Theta_j^+(t)$, $t \in \Gamma$, $j = 1, 2$, и подставляя их в (18), после несложных преобразований приходим к следующей системе линейных сингулярных интегральных уравнений относительно $\mu_j(t) = (\mu_j^1, \mu_j^2)^T$:

$$a_j(t)\mu_j(t) + b_j(t) \int_{\Gamma} \frac{\mu_j(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{\Gamma} k_j(\tau, t)\mu_j(\tau) d\sigma = \tilde{l}_j^0(\rho_j)(t), \quad t \in \Gamma, \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

где $a_j(t) = (a_j^{kn})$, $b_j(t) = (b_j^{kn})$, $k_j(\tau, t) = (k_j^{kn})$, $\tilde{l}_j^0(\rho_j)(t) = (-2\operatorname{Re}l_j^0(\rho_j) \quad 2\operatorname{Re}l_j^0(\rho_j))^T$,

$$\begin{aligned} k_j^{11}(\tau, t) &= d_{m_j}^2(t) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi i} \frac{t'}{\tau - t} \right) - 2\operatorname{Re}[ik_{0j}(\tau, t)], \quad k_j^{12}(\tau, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau'}{\tau - t} - \operatorname{Re} \frac{t'}{\pi(\tau - t)}, \\ k_j^{21}(\tau, t) &= \frac{d_{m_j}^2(t)}{\pi} \left[\frac{\tau'}{\tau - t} - \operatorname{Re} \frac{t'}{\tau - t} \right] + 2\operatorname{Re}k_{0j}(\tau, t), \quad k_j^{22}(\tau, t) = \operatorname{Re} \frac{t'}{\pi i(\tau - t)}, \\ k_{0j}(\tau, t) &= -\frac{t'}{4\pi} \frac{\psi(\tau, t) - \psi(t, t)}{\tau - t} - \frac{t'}{4\pi^2 i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau_1, t) - \psi(t, t)}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)} d\tau_1 + \frac{t'}{2\pi^2} \iint_{\Omega} \frac{d_{m_j}^2 \zeta(\zeta)}{(\zeta - t)(\bar{\tau} - \bar{\zeta})} d\xi d\eta; \\ a_j^{11} &= d_{m_j}^2(t), \quad a_j^{12} = a_j^{21} = 0, \quad a_j^{22} = 1, \quad b_j^{11} = b_j^{22} = 0, \quad b_j^{12} = -1/\pi, \quad b_j^{21} = -d_{m_j}^2/\pi, \quad j = 1, 2; \end{aligned} \quad (22)$$

$\psi(\tau, t), \psi(t, t), d_{m_j}^2(t)$ определены в (19), (13).

Лемма 1. Пусть выполнены условия (b), (c) раздела 1. Тогда 1) $a_j^{kn}(t), b_j^{kn}(t) \in C_{\beta}(\Gamma)$, $j, k, n = 1, 2$; 2) $|k_j^{nm}(\tau, t)| \leq c|\tau - t|^{\alpha-1}$, $j, m, n = 1, 2$; 3) $\tilde{l}_j^0(\rho_j)(t) \in C_{\alpha}(\Gamma)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. В силу условия (c) функции $d_{m_j}^k$, определенные в (13), принадлежат пространству $C_{\beta}(\bar{\Omega})$. Поэтому $Td_{m_j}^1(z) \in C_{\beta}^1(\bar{\Omega})$, $Sd_{m_j}^1(z) \in C_{\beta}(\bar{\Omega})$. Тогда из соотношений (19) и условия (b) следует $\psi(\tau, t) \in C_{\beta}(\Gamma) \times C_{\beta}(\Gamma)$. Далее, к двойному интегралу в выражении $k_{0j}(\tau, t)$ в (22) применим неравенство Гёльдера и после этого воспользуемся неравенством (6.7) из ([15], с. 40). Тогда двойной интеграл по модулю не превосходит $c|\tau - t|^{\alpha-1}$, $c = \operatorname{const} > 0$. Теперь, если учесть еще оценку ([16], сс. 27, 30–32) $|\operatorname{Im}[\tau'/(\tau - t)]| \leq c|\tau - t|^{\alpha-1}$ и $T\rho_j(z) \in C_{\alpha}(\bar{\Omega})$, $j = 1, 2$, а также указанные выше свойства оператора S , то из соотношений в (22), (16) сразу получим утверждения леммы 1. $\square$

Исследуем разрешимость системы (21) в пространстве $C_{\alpha}(\Gamma)$. Используя выражения $a_j^{nk}(t), b_j^{nk}(t)$ в (22), вычисляем $\det(a_j(t) \pm \pi i b_j(t)) = 2d_{m_j}^2(t) \neq 0$, $j = 1, 2$, $t \in \Gamma$, т. е. система (21) нормального типа. Кроме того, ее индекс, как легко видеть, равен нулю. Следовательно, к системе (21) применима альтернатива Фредгольма. Пусть $\mu_j^0(t) = (\mu_j^1, \mu_j^2) \in C_{\alpha}(\Gamma)$ — решение системы (21) при $\tilde{l}_j^0(\rho_j)(t) \equiv 0$. Этому решению по формулам (20) соответствуют голоморфные функции $\Phi_j(z), \Theta_j(z) \in C_{\alpha}(\bar{\Omega})$, $j = 1, 2$, которые в свою очередь по формуле в (19) определяют $\Psi_j'(z) \in C_{\alpha}(\bar{\Omega})$. Тогда

$$\Psi_j(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln(1 - \frac{z}{t}) \Psi_j'(t) dt + c_{1j} + ic_{2j}, \quad j = 1, 2, \quad (23)$$

где c_{1j}, c_{2j} — произвольные действительные постоянные; под $\ln(1 - z/t)$ понимается ее однозначная ветвь, которая обращается в нуль при $z = 0$.

Голоморфные функции $\Phi_j(z), \Psi_j(z)$, $j = 1, 2$, по формулам (14) при $\rho_j \equiv 0$ определяют тангенциальные перемещения w_1, w_2 и углы поворота ψ_1, ψ_2 . Постоянные c_{1j}, c_{2j} , $j = 1, 2$, найдем так, чтобы выполнялись условия (17). Тогда w_j и ψ_j удовлетворяют граничным условиям (15) и однородному уравнению Коши–Римана $\partial\omega_j/\partial\bar{z} = 0$, которое в силу (7)

равносильно уравнениям вида

$$\begin{aligned} [DD_0^{1111}(\operatorname{Im}\omega_{j\alpha^1}^0 + \operatorname{Re}\omega_{j\alpha^2}^0)]_{\alpha^1} - [DD_0^{1212}(\operatorname{Re}\omega_{j\alpha^1}^0 - \operatorname{Im}\omega_{j\alpha^2}^0)]_{\alpha^2} &= 0, \\ [DD_0^{1212}(\operatorname{Re}\omega_{j\alpha^1}^0 - \operatorname{Im}\omega_{j\alpha^2}^0)]_{\alpha^1} + [DD_0^{1111}(\operatorname{Im}\omega_{j\alpha^1}^0 + \operatorname{Re}\omega_{j\alpha^2}^0)]_{\alpha^2} &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (24)$$

Равенства в (24) соответственно умножим на $\operatorname{Im}\omega_j^0, \operatorname{Re}\omega_j^0$, проинтегрируем по области Ω и сложим. В результате в Ω будем иметь $\operatorname{Im}\omega_{j\alpha^1}^0 + \operatorname{Re}\omega_{j\alpha^2}^0 = 0, \operatorname{Re}\omega_{j\alpha^1}^0 - \operatorname{Im}\omega_{j\alpha^2}^0 = 0, j = 1, 2$. Эти равенства означают, что $\operatorname{Im}\omega_j^0 - i\operatorname{Re}\omega_j^0$ есть голоморфная функция в Ω . Следовательно, с учетом граничного условия (15) получаем $\omega_j^0(z) = 0, j = 1, 2$, в $\bar{\Omega}$. Тогда из соотношений (11),(14), в которых $\rho_j = 0$, следует $\Phi_j(z) = 0, \Psi_j'(z) = 0$, а из (19) имеем $\Theta_j(z) = 0, j = 1, 2$ в $\bar{\Omega}$. Внося нулевые значения функций $\Phi_j(z), \Theta_j(z)$ в (20), получаем $\mu_j^k(t)/t' = F_j^{k-}(t), t \in \Gamma, k, j = 1, 2$, где $F_j^{k-}(t)$ — граничные значения функции $F_j^{k-}(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции $F_j^{k-}(z)$ во внешности Ω приходим к задаче Римана–Гильберта с краевым условием $\operatorname{Re}[it'F_j^{k-}(t)] = 0$, решение которой имеет вид ([18], с. 257) $F_j^{k-}(z) = \beta_{0j}^k f_j^k(z), j, k = 1, 2$, где β_{0j}^k — произвольные действительные постоянные, $f_j^k(z)$ — известные голоморфные вне Ω функции. Тогда для $\mu_j^k(t)$ получаем представления $\mu_j^k(t) = \beta_{0j}^k \mu_{j0}^k(t), j, k = 1, 2$, где $\mu_{j0}^k(t)$ — известные действительные функции. Таким образом, однородная система уравнений (21) при каждом j имеет два линейно независимых решения $(\mu_{j0}^1 \ 0)^T, (0 \ \mu_{j0}^2)^T, j = 1, 2$.

Введем однородную систему уравнений вида

$$a_j^T(t)\nu_j(t) - \int_{\Gamma} \frac{b_j^T(\tau)\nu_j(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{\Gamma} k_j^T(t, \tau)\nu_j(\tau) d\sigma = 0, \quad t \in \Gamma, \quad j = 1, 2, \quad (25)$$

союзную системе (21) при $\tilde{l}_j^0(\rho_j) = 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $(1 \ 0)^T, (0 \ 1)^T$ являются решениями системы (25). Следовательно, для разрешимости системы (21) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\operatorname{Re} i^n \int_{\Gamma} l_j^0(\rho_j)(t) ds = 0, n, j = 1, 2$, которые, как легко проверить, выполняются. Таким образом, система (21) разрешима и ее общее решение можно записать в виде

$$\mu_j^k(t) = \mu_j^k(\rho_j)(t) + \beta_{0j}^k \mu_{j0}^k(t), \quad \mu_j^k(\rho_j)(t) = \mathbb{R}_j^k \tilde{l}_j^0(\rho_j)(t), \quad k, j = 1, 2, \quad (26)$$

где $\mu_{j0}^k(t)$ — известные действительные функции, β_{0j}^k — произвольные действительные постоянные, $\mathbb{R}_j^k$ — линейные ограниченные операторы в $C_{\alpha}(\Gamma)$, существование которых следует из третьей теоремы Фредгольма ([19], с. 91).

Внося (26) в (20), будем иметь

$$\Phi_j(z) = \Phi_j[\mu_j^1(\rho_j)](z) \equiv \Phi_j(\rho_j)(z), \quad \Theta_j(z) = \Theta_j[\mu_j^2(\rho_j)](z) \equiv \Theta_j(\rho_j)(z), \quad j = 1, 2, \quad (27)$$

а из соотношений (19),(23) с помощью этих представлений находим

$$\Psi_j'(z) = \Theta_j(\rho_j)(z) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{d_{m_j}(\tau) \overline{\Phi_j(\rho_j)(\tau)}}{\tau - z} d\bar{\tau} \equiv \Psi_j'(\rho_j)(z), \quad (28)$$

$$\Psi_j(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln(1 - \frac{z}{t}) \Psi_j'(\rho_j)(t) dt + c_{1j} + ic_{2j} \equiv \Psi_j^0(\rho_j)(z) + c_{1j} + ic_{2j}, \quad j = 1, 2.$$

Определив постоянные c_{1j}, c_{2j} при помощи условий (17), для $\Psi_j(z)$ будем иметь

$$\Psi_j(z) = \Psi_j^0(\rho_j)(z) - \Psi_j^0(\rho_j)(t_j) - iT d_{m_j}[\omega_j(\rho_j)](t_j) \equiv \Psi_j(\rho_j)(z), \quad (29)$$

$$\omega_j(\rho_j) = \Phi_j(\rho_j) + T\rho_j, \quad j = 1, 2.$$

Теперь, если (27),(29) подставить в (14), то для тангенциальных перемещений w_1, w_2 и углов поворота ψ_1, ψ_2 , удовлетворяющих граничным условиям (15), получим искомые интегральные представления

$$\omega_j^0(z) = \Psi_j(\rho_j)(z) + iTd_{m_j}[\omega_j(\rho_j)](z) \equiv H_{0j}\rho_j(z), \quad j = 1, 2. \quad (30)$$

Получим интегральные представления для производных (до второго порядка включительно) w_1, w_2 и ψ_1, ψ_2 . Используя соотношения (10),(13) и дифференцируя (14) по переменной z , находим

$$\operatorname{Re}(-i^k \omega_j^0)_{\alpha^k} = \operatorname{Re} \omega_j(\rho_j)/(2DD_{m_j}^{1111}) - (-1)^k \operatorname{Im}\{\Psi_j'(\rho_j) + iSd_{m_j}[\omega_j(\rho_j)]\} \equiv H_j^{kk} \rho_j, \quad (31)$$

$$\operatorname{Re}(-i^k \omega_j^0)_{\alpha^n} = \operatorname{Re}\{\Psi_j'(\rho_j) + iSd_{m_j}[\omega_j(\rho_j)]\} - (-1)^k \operatorname{Im} \omega_j(\rho_j)/(2DD_{m_j}^{1212}) \equiv H_j^{kn} \rho_j,$$

$$k \neq n, \quad k, n, j = 1, 2; \quad \operatorname{Re}(-i^k \omega_1^0) = w_k, \quad \operatorname{Re}(-i^k \omega_2^0) = \psi_k, \quad k = 1, 2.$$

Дифференцируя соотношение (14) по $z, \bar{z}$, получаем

$$\omega_{jz\bar{z}}^0 = i\{d_{m_j z}[\omega_j(\rho_j)] + d_{m_j}[\omega_j(\rho_j)]_z\}, \quad \omega_{j\bar{z}z}^0 = i\{d_{m_j \bar{z}}[\omega_j(\rho_j)] + d_{m_j}[\omega_j(\rho_j)]_{\bar{z}}\}, \quad (32)$$

$$d_{m_j z}[\omega_j] = d_{m_j z}^1 \omega_j + d_{m_j z}^2 \bar{\omega}_j, \quad d_{m_j}[\omega_j]_z = d_{m_j}^1 \omega_{jz} + d_{m_j}^2 \bar{\omega}_{jz}, \quad \omega_{jz} = \Phi_j'(\rho_j) + S\rho_j,$$

$$\bar{\omega}_{jz} = \bar{\rho}_j, \quad \Phi_j'(\rho_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu_j^1(\rho_j)(\tau)}{\tau'(\tau - z)^2} d\tau.$$

Теперь соотношение (14) дифференцируем дважды по z . Используя формулу (8.20) из ([15], с. 58) и соотношение для $\Psi_j'(\rho_j)$ в (28), будем иметь

$$\omega_{jzz}^0 = \Psi_j''(\rho_j) + iS \left(\frac{\partial d_{m_j}[\omega_j(\rho_j)]}{\partial \zeta} \right) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{d_{m_j}[\omega_j(\rho_j)](\tau)}{(\tau - z)^2} d\bar{\tau} \equiv \omega_{jzz}^0(\rho_j), \quad (33)$$

$$\Psi_j''(\rho_j) = \Theta_j'(\rho_j) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{d_{m_j}^2(\tau) \bar{\Phi}_j(\rho_j)}{(\tau - z)^2} d\bar{\tau}, \quad \Theta_j'(\rho_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu_j^2(\rho_j)(\tau)}{\tau'(\tau - z)^2} d\tau.$$

Производные $w_{j\alpha^k\alpha^n}, \psi_{j\alpha^k\alpha^n}$ выражаются формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(-i^k \omega_j^0)_{\alpha^n \alpha^n} &= \operatorname{Im}\{i^{k-1}[2\omega_{jzz}^0 + (-1)^{n-1}(\omega_{jzz}^0 + \omega_{j\bar{z}z}^0)]\}, \\ \operatorname{Re}(-i^k \omega_j^0)_{\alpha^1 \alpha^2} &= \operatorname{Re}[i^{k-1}(\omega_{jzz}^0 - \omega_{j\bar{z}z}^0)], \quad j, k, n = 1, 2. \end{aligned} \quad (34)$$

Изучим свойства операторов $\Phi_j'(\rho_j), \Theta_j'(\rho_j), \Psi_j''(\rho_j), \omega_{jzz}^0(\rho_j)$. С этой целью плотность μ_j в формулах (32),(33) заменим выражением

$$\mu_j(t) = a_j^{-1}(t)\{\tilde{l}_j^0(\rho_j)(t) - b_j(t) \int_{\Gamma} \frac{\mu_j(\tau)}{\tau - t} d\tau - \int_{\Gamma} k_j(\tau, t)\mu_j(\tau) d\sigma\}$$

($a_j^{-1}(t)$ — матрица, обратная $a_j(t)$), получаемым из системы (21). Затем, переставляя порядок интегрирования в повторных интегралах, используя тождество (4.9) из ([15], с. 29), принимая во внимание соотношение

$$\int_{\Gamma} \frac{l_j^0(\rho_j)(\tau)}{\tau'(\tau - z)^2} d\tau = 0 \quad \forall z \in \Omega,$$

проверяемое непосредственным вычислением при помощи формул (8.20) из ([15], с. 58) и формулы Сохоцкого, а также вполне непрерывность операторов $l_j^0(\rho_j), \mu_j^k(\rho_j)$ из $L_p(\Omega)$ в

$C_{\alpha'}(\bar{\Omega}) \forall \alpha' < \alpha$, определенных в (16),(26), вторую часть леммы 1, свойства интеграла типа Коши и его производной ([16], с. 69-70), после несложных, но достаточно громоздких преобразований получаем, что $\Theta'_j(\rho_j)$ — вполне непрерывный оператор в $L_p(\Omega)$, а операторы $\Phi'_j(\rho_j), \Psi''_j(\rho_j), \omega_{jzz}^0(\rho_j)$ представимы в виде

$$\Phi'_j(\rho_j) = \Phi'_{js}(\rho_j) + \Phi'_{jc}(\rho_j), \quad \Psi''_j(\rho_j) = \Psi''_{js}(\rho_j) + \Psi''_{jc}(\rho_j), \quad (35)$$

$$\omega_{jzz}^0(\rho_j) = \omega_{jzss}^0(\rho_j) + \omega_{jzsc}^0(\rho_j),$$

где $\Phi'_{js}(\rho_j), \Psi''_{js}(\rho_j), \omega_{jzss}^0(\rho_j)$ — вполне непрерывные операторы в $L_p(\Omega)$, а операторы $\Phi'_{jc}(\rho_j), \Psi''_{jc}(\rho_j), \omega_{jzsc}^0(\rho_j)$ даются формулами

$$\begin{aligned} \Phi'_{js}(\rho_j) &= \{(\bar{t}'_z)^2 \{S \overline{S d_{m_j}[T \rho_j]_{\zeta_1}} - \overline{d_{m_j}[T \rho_j]_z} - S((t'_\zeta)^2 \overline{d_{m_j}[T \rho_j]_\zeta}) + S((t'_\zeta)^2 \overline{S(d_{m_j}[T \rho_j]_{\bar{\zeta}_1})})\} + \\ &\quad + S \overline{d_{m_j}[T \rho_j]_\zeta} - \overline{d_{m_j}[T \rho_j]_{\bar{z}}}\} / d_{m_j}^2(z), \quad \Psi''_{js}(\rho_j) = -i(\bar{t}'_z)^2 S(d_{m_j}^2 \overline{\Phi'_{js}(\rho_j)}), \\ \omega_{jzss}^0(\rho_j) &= \Psi''_{js}(\rho_j) + iS(d_{m_j}s[\omega_j(\rho_j)]_\zeta) - (\bar{t}'_z)^2 \{d_{m_j}s[\omega_j(\rho_j)]_z - S(d_{m_j}s[\omega_j(\rho_j)]_{\bar{\zeta}})\}, \\ d_{m_j}s[\omega_j]_z &= d_{m_j}^1 \{\Phi'_{js}(\rho_j) + S \rho_j\} + d_{m_j}^2 \overline{\rho_j}, \quad d_{m_j}s[\omega_j]_{\bar{z}} = d_{m_j}^1 \rho_j + d_{m_j}^2 \{\overline{\Phi'_{js}(\rho_j)} + \overline{S \rho_j}\}; \end{aligned} \quad (36)$$

операторы $d_{m_j}[T \rho_j]_z, d_{m_j}[T \rho_j]_{\bar{z}}, T f, S f$ определены в (32),(11),(12), $t'_z = dt_z/ds$, t_z — точка кривой Γ , ближайшая к $z \in \Omega$.

Принимая во внимание указанные выше свойства операторов T, S и $t'_z \in C_\beta(\Gamma), |t'_z| = 1$, а также свойство производной интеграла типа Коши ([16], с. 69–70), из (36) получаем, что $\Phi'_{js}(\rho_j), \Psi''_{js}(\rho_j), \omega_{jzss}^0(\rho_j)$ суть линейные ограниченные операторы в $L_p(\Omega)$.

Теперь, если воспользоваться соотношениями (32),(34),(35), то для производных второго порядка тангенциальных перемещений w_k и углов поворота ψ_k получим следующие представления:

$$\begin{aligned} w_{k\alpha\lambda\alpha\mu} &= S_{1k}^{\lambda\mu} \rho_1 + T_{1k}^{\lambda\mu} \rho_1, \quad \psi_{k\alpha\lambda\alpha\mu} = S_{2k}^{\lambda\mu} \rho_2 + T_{2k}^{\lambda\mu} \rho_2, \\ S_{jk}^{nn} \rho_j &= \text{Im} i^k \{2d_{m_j}s[\omega_j(\rho_j)]_z + (-1)^{n-1} (d_{m_j}s[\omega_j(\rho_j)]_{\bar{z}} - i\omega_{jzss}^0(\rho_j))\}, \\ S_{jk}^{12} \rho_j &= \text{Re} i^k \{d_{m_j}s[\omega_j(\rho_j)]_{\bar{z}} - i\omega_{jzss}^0(\rho_j)\}, \quad j, k, n = 1, 2, \end{aligned} \quad (37)$$

где $T_{jk}^{\lambda\mu} \rho_j$ — линейные вполне непрерывные операторы в $L_p(\Omega)$.

Легко видеть, что $S_{jk}^{\lambda\mu} \rho_j$ суть линейные ограниченные операторы в $L_p(\Omega)$ и для их норм из (37) с учетом (36) получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|S_{jk}^{\lambda\mu} \rho_j\|_{L_p(\Omega)} &\leq s_{jk}^{\lambda\mu}(\Lambda_p) \|\rho_j\|_{L_p(\Omega)}, \quad \lambda, \mu, j, k = 1, 2, \\ s_{jk}^{\lambda\lambda}(\Lambda_p) &= [\Lambda_p + q_{j0}(\Lambda_p)] \{ \|d_{m_j}^1\|_{C(\bar{\Omega})} (3 + \Lambda_p) + \|d_{m_j}^2\|_{C(\bar{\Omega})} (1 + \Lambda_p) \} + \|d_{m_j}^1\|_{C(\bar{\Omega})} (1 + \Lambda_p) + \\ &\quad + \|d_{m_j}^2\|_{C(\bar{\Omega})} \{3 + \Lambda_p[1 + q_{j0}(\Lambda_p)]\}, \quad s_{jk}^{12}(\Lambda_p) = \Lambda_p \|d_{m_j}^2\|_{C(\bar{\Omega})} q_{j0}(\Lambda_p) + \\ &\quad + (1 + \Lambda_p) (\|d_{m_j}^1\|_{C(\bar{\Omega})} + \|d_{m_j}^2\|_{C(\bar{\Omega})}) [1 + \Lambda_p + q_{j0}(\Lambda_p)], \quad q_{j0}(\Lambda_p) = \|1/d_{m_j}^2\|_{C(\bar{\Omega})} \times \\ &\quad \times \{(1 + \Lambda_p)^2 (\Lambda_p \|d_{m_j}^1\|_{C(\bar{\Omega})} + \|d_{m_j}^2\|_{C(\bar{\Omega})}) + (1 + \Lambda_p^2) (\|d_{m_j}^1\|_{C(\bar{\Omega})} + \Lambda_p \|d_{m_j}^2\|_{C(\bar{\Omega})})\}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\Lambda_p \equiv \|S\|_{L_p(\Omega)}$ — норма оператора S в $L_p(\Omega)$.

Перейдем к нахождению комплексных функций $\rho_j, j = 1, 2$. Их определим так, чтобы тангенциальные перемещения и углы поворота, представленные формулами (30), удовлетворяли системе уравнений (8). С этой целью соотношения (30), (31), (37) подставим в (8). В результате для определения функций $\rho_j = \rho_{j1} + i\rho_{j2}, j = 1, 2$, получим систему из четырех уравнений, которую представим в виде

$$\rho + P\rho + H\rho + L_s w_3 + L_c w_3 + G w_3 + F = 0, \quad (39)$$

где $\rho = (\rho_{11} \ \rho_{12} \ \rho_{21} \ \rho_{22})^T$, $P = (P_{11} \ P_{12} \ P_{21} \ P_{22})^T$, $H = (H_{11} \ H_{12} \ H_{21} \ H_{22})^T$, $L_s = (L_{11s} \ L_{12s} \ L_{21s} \ L_{22s})^T$, $L_c = (L_{11c} \ L_{12c} \ L_{21c} \ L_{22c})^T$, $G = (G_{11} \ G_{12} \ G_{21} \ G_{22})^T$, $F = (R^1 \ R^2 \ N^1 \ N^2)^T/2$;

$$P_{nj}\rho = a_{j+2(n-1),\delta}^{\lambda\nu} S_{1\delta}^{\lambda\nu} \rho_1 + a_{j+2(n-1),2+\delta}^{\lambda\nu} S_{2\delta}^{\lambda\nu} \rho_2, \quad (40)$$

$$H_{nj}\rho = a_{j+2(n-1),\delta}^{\lambda\nu} T_{1\delta}^{\lambda\nu} \rho_1 + a_{j+2(n-1),2+\delta}^{\lambda\nu} T_{2\delta}^{\lambda\nu} \rho_2 + K_{nj}\rho, \quad K_{nj}\rho \equiv K_{nj}(a_0(\rho)), \quad n, j = 1, 2;$$

операторы $L_{jns}, L_{jnc}, K_{jn}, G_{jn}$ и функции $a_{j,n}^{\lambda\nu}$ определены в (9).

Справедлива

Лемма 2. Пусть выполнены условия (b) – (e) раздела 1. Тогда 1) P_{nj} и H_{nj} – линейные соответственно ограниченные и вполне непрерывные операторы в $L_p(\Omega)$, причем

$$\|P_{nj}\rho\|_{L_p(\Omega)} \leq q_{nj}^k(\Lambda_p) \|\rho_k\|_{L_p(\Omega)}, \quad q_{nj}^k(\Lambda_p) = \|a_{j+2(n-1),\delta+2(k-1)}^{\lambda\nu}\|_{C(\bar{\Omega})} s_{k\delta}^{\lambda\nu}(\Lambda_p), \quad n, j, k = 1, 2;$$

постоянные $s_{n\delta}^{\lambda\nu}(\Lambda_p)$ определены в (38); 2) L_s и L_c – линейные соответственно ограниченный и вполне непрерывный, G – нелинейный ограниченный операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, причем для любых w_3^j ($j = 1, 2$) $\in W_p^{(2)}(\Omega)$ имеют место оценки

$$\|Gw_3^1 - Gw_3^2\|_{L_p(\Omega)} \leq c(\|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|w_3^1 - w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)};$$

3) $F \in L_p(\Omega)$.

Справедливость леммы 2 непосредственно следует из соотношений (40), (9) с учетом указанных выше свойств операторов $S_{jk}^{\lambda\mu}, T_{jk}^{\lambda\mu}$, оценок в (38), формул (4), (6), теорем вложения для соболевских пространств.

Используя лемму 2, для нормы матричного оператора $P\rho$ получаем оценку

$$\|P\rho\|_{L_p(\Omega)} \leq q(\Lambda_p) \|\rho\|_{L_p(\Omega)}, \quad q(\Lambda_p) = \max_{\lambda=1,2} [q_{11}^\lambda(\Lambda_p) + q_{12}^\lambda(\Lambda_p) + q_{21}^\lambda(\Lambda_p) + q_{22}^\lambda(\Lambda_p)]. \quad (41)$$

Пусть выполнено условие

$$q(1) < 1, \quad (42)$$

где $q(1)$ – значение $q(\Lambda_p)$ при $\Lambda_p = 1$.

Заметим, что если оболочка изотропная неоднородная и упругие характеристики $B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ – четные функции по α^3 на $[-h/2, h/2]$, то $q(\Lambda_p) = 0$.

Легко видеть, что $q(\Lambda_p)$ в (41) представляет собой непрерывную функцию переменной Λ_p . Так как ([15], с. 270) норма Λ_p оператора S непрерывна по p и $\Lambda_2 = 1$, то в силу (42) найдется такое число $\varepsilon > 0$, что выполняется неравенство $q(\Lambda_p) < 1$, если $2 < p \leq 2 + \varepsilon < 4/(2 - \beta)$. Тогда линейный оператор $P\rho$ в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, будет сжимающим. Следовательно, существует обратный оператор $(I + P)^{-1}$, ограниченный в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, применив который к уравнению (39), придем к эквивалентному уравнению

$$\rho + H_0\rho + L_{0s}w_3 + L_{0c}w_3 + G_0w_3 + F_0 = 0, \quad (43)$$

где $H_0 = (I + P)^{-1}H$, $L_{0s} = (I + P)^{-1}L_s$, $L_{0c} = (I + P)^{-1}L_c$, $G_0 = (I + P)^{-1}G$, $F_0 = (I + P)^{-1}F$, I – тождественный оператор.

Заметим, что $H_0\rho$ – линейный вполне непрерывный оператор в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$. Покажем, что уравнение $\rho + H_0\rho = 0$ имеет лишь тривиальное решение в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$. Если $\rho \in L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, – ненулевое его решение, то этому решению по формулам

(30) соответствуют тангенциальные перемещения w_1, w_2 и углы поворота ψ_1, ψ_2 , которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} (DT_{t+\tau}^{i\lambda})_{\alpha\lambda} + DG_{\lambda\mu}^i T_{t+\tau}^{\lambda\mu} &= 0, \quad i = 1, 2, \\ (DM_{t+\tau}^{i\lambda})_{\alpha\lambda} - DT_{t+\tau}^{i3} + DG_{\lambda\mu}^i M_{t+\tau}^{\lambda\mu} &= 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (44)$$

где $T_{t+\tau}^{i\lambda}, M_{t+\tau}^{i\lambda}$ определены по формулам в (6).

Равенства в (44) умножим соответственно на w_1, w_2, ψ_1, ψ_2 , после чего их сложим и проинтегрируем по области Ω . Принимая во внимание условие (а) раздела 1, получаем равенства $t_{kn}^j + \tau_{kn}^j = 0$, $k, n = 1, 2$, $j = 0, 1$, которые с учетом выражений t_{kn}^j, τ_{kn}^j в (4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} w_{j\alpha j} - G_{jj}^\lambda w_\lambda &= 0, \quad j = 1, 2, \quad w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda w_\lambda = 0, \\ \psi_{j\alpha j} - G_{jj}^\lambda \psi_\lambda &= 0, \quad j = 1, 2, \quad \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda \psi_\lambda = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

В (45) из первого равенства вычтем второе и разность прибавим к третьему, умноженному на мнимую единицу i . Полученное таким образом равенство при помощи комплексной функции $w = w_1 + iw_2$ запишется в виде $w_{\bar{z}} + g_1 w + g_2 \bar{w} = 0$ (g_1, g_2 — известные функции, зависящие от G_{kj}^n), т. е. $w(z)$ — обобщенная аналитическая функция в Ω , принадлежащая пространству $C_\alpha^1(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющая условию $w = 0$ на границе Γ области Ω . В силу теоремы единственности для обобщенных аналитических функций ([15], с. 123) имеем $w_j = 0, j = 1, 2$, в $\bar{\Omega}$. Аналогично из последних трех равенств в (45) получим $\psi_j = 0, j = 1, 2$, в $\bar{\Omega}$. Тогда из (10) следует $\rho_j = 0, j = 1, 2$, в Ω . Значит, существует обратный оператор $(I + H_0)^{-1}$, ограниченный в $L_p(\Omega)$, с помощью которого решение уравнения (43) запишется в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^0 + \rho^1(w_3) + \rho^2(w_3), \quad \rho^0 = -(I + H_0)^{-1} F_0, \quad \rho^1 = -(I + H_0)^{-1} (L_{0s} + L_{0c}) \equiv \\ &\equiv \rho_s^1 + \rho_c^1, \quad \rho^2 = -(I + H_0)^{-1} G_0, \quad \rho^k = (\rho_{11}^k \rho_{12}^k \rho_{21}^k \rho_{22}^k)^T, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (46)$$

Если теперь выражение (46) для ρ подставить в (30), то решение задачи I относительно тангенциальных перемещений и углов поворота получим в виде

$$\omega_j^0 \equiv \omega_j^0(w_3) = \omega_{j0}^0 + \omega_{j1}^0(w_3) + \omega_{j2}^0(w_3), \quad (47)$$

$$\omega_{jk}^0(w_3) = H_{0j} \rho_j^k, \quad \rho_j^k = \rho_{j1}^k + i \rho_{j2}^k, \quad j = 1, 2, \quad \omega_{1k}^0 = w_{2k} + i w_{1k}, \quad \omega_{2k}^0 = \psi_{2k} + i \psi_{1k}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Заметим, что $\omega_{jk}^0(w_3)$ ($k = 0, 1, 2$) — однородные операторы относительно w_3 порядка k .

Подставляя (46) в (31), (37), для производных w_1, w_2 и ψ_1, ψ_2 получаем аналогичные представления

$$\begin{aligned} w_{k\alpha j} &\equiv w_{k\alpha j}(w_3) = w_{k0\alpha j} + w_{k1\alpha j}(w_3) + w_{k2\alpha j}(w_3), \\ \psi_{k\alpha j} &\equiv \psi_{k\alpha j}(w_3) = \psi_{k0\alpha j} + \psi_{k1\alpha j}(w_3) + \psi_{k2\alpha j}(w_3), \\ w_{k\alpha j\alpha^n} &\equiv w_{k\alpha j\alpha^n}(w_3) = w_{k0\alpha j\alpha^n} + w_{k1\alpha j\alpha^n}(w_3) + w_{k2\alpha j\alpha^n}(w_3), \\ \psi_{k\alpha j\alpha^n} &\equiv \psi_{k\alpha j\alpha^n}(w_3) = \psi_{k0\alpha j\alpha^n} + \psi_{k1\alpha j\alpha^n}(w_3) + \psi_{k2\alpha j\alpha^n}(w_3), \\ w_{k\alpha j\alpha^m} &= H_1^{kj} \rho_1^m, \quad \psi_{k\alpha j\alpha^m} = H_2^{kj} \rho_2^m, \quad w_{k\alpha j\alpha^\mu} = S_{1k}^{j\mu} \rho_1^m + T_{1k}^{j\mu} \rho_1^m, \\ \psi_{k\alpha j\alpha^\mu} &= S_{2k}^{j\mu} \rho_2^m + T_{2k}^{j\mu} \rho_2^m, \quad m = 0, 1, 2; \quad k, j, \mu = 1, 2. \end{aligned} \quad (48)$$

Используя (47), (48), для компонент деформации γ_{ij}^k в (1), усилий T^{ij} и моментов M^{ij} в (6), будем иметь аналогичные разбиения на однородные операторы

$$\gamma_{ij}^k = \gamma_{ij0}^k + \gamma_{ij1}^k(w_3) + \gamma_{ij2}^k(w_3), \quad T^{ij} = T_0^{ij} + T_1^{ij}(w_3) + T_2^{ij}(w_3), \quad (49)$$

$$M^{ij} = M_0^{ij} + M_1^{ij}(w_3) + M_2^{ij}(w_3), \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad k = 0, 1,$$

где $\gamma_{ijn}^k(w_3), T_n^{ij}(w_3), M_n^{ij}(w_3)$ — однородные операторы относительно w_3 порядка n .

3. Сведение задачи I к одному уравнению относительно прогиба и его исследование. Соотношения (48), (49) подставим в третье уравнение системы (5). После несложных преобразований получим

$$d_{11}w_{3\alpha^1\alpha^1} + 2d_{12}w_{3\alpha^1\alpha^2} + d_{22}w_{3\alpha^2\alpha^2} + P_3w_3 + K_3w_3 + G_3w_3 = 0, \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} P_3w_3 &\equiv P_3\rho_s^1(w_3) = DD_{j-1}^{\lambda 311}S_{j1}^{\lambda 1}\rho_{js}^1 + DD_{j-1}^{\lambda 312}(S_{j2}^{\lambda 1}\rho_{js}^1 + S_{j1}^{2\lambda}\rho_{js}^1) + DD_{j-1}^{\lambda 322}S_{j2}^{2\lambda}\rho_{js}^1, \\ K_3w_3 &= DB_{\lambda\mu}T_1^{\lambda\mu} + (DD_m^{\lambda 3kn})_{\alpha\lambda}\gamma_{kn1}^m + DD_m^{\lambda 3kn}\tau_{kn1\alpha\lambda}^m + DD_0^{\lambda 3\delta\beta}\mu_{\delta\beta\alpha\lambda}^0 + P_3\rho_c^1(w_3) + \\ &\quad + DD_{j-1}^{\lambda 311}T_{j1}^{\lambda 1}\rho_j^1 + DD_{j-1}^{\lambda 312}(T_{j2}^{\lambda 1}\rho_j^1 + T_{j1}^{2\lambda}\rho_j^1) + DD_{j-1}^{\lambda 322}T_{j2}^{2\lambda}\rho_j^1, \\ G_3w_3 &= (DT^{\lambda\mu}w_{3\alpha\lambda})_{\alpha\mu} + [D(T_0^{\lambda 3} + T_2^{\lambda 3})]_{\alpha\lambda} + DB_{\lambda\mu}(T_0^{\lambda\mu} + T_2^{\lambda\mu}) + R^3, \\ d_{jj} &= DD_0^{j3j3}, \quad j = 1, 2, \quad d_{12} = DD_0^{1323}, \quad \rho_j^1 = \rho_{js}^1 + \rho_{jc}^1; \end{aligned} \quad (51)$$

операторы $T_{jk}^{\lambda\mu}, S_{jk}^{\lambda\mu}$ определены в (37).

Итак, задача I свелась к нахождению решения уравнения (50), удовлетворяющего граничному условию

$$w_3(t) = 0, \quad t \in \Gamma. \quad (52)$$

Справедлива

Лемма 3. Пусть выполнены условия (b) – (e). Тогда 1) P_3w_3 и K_3w_3 — линейные соответственно ограниченный и вполне непрерывный операторы из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, причем

$$\begin{aligned} \|P_3w_3\|_{L_p(\Omega)} &\leq q_3(\Lambda_p)(\|w_{3\alpha^1\alpha^1}\|_{L_p(\Omega)} + \|w_{3\alpha^1\alpha^2}\|_{L_p(\Omega)} + \|w_{3\alpha^2\alpha^2}\|_{L_p(\Omega)}), \\ q_3(\Lambda_p) &= q_L\|(I + H_0)^{-1}\|_{L_p(\Omega)}\|(I + P)^{-1}\|_{L_p(\Omega)}\{\|DD_{j-1}^{\lambda 311}\|_{C(\overline{\Omega})}s_{j1}^{\lambda 1}(\Lambda_p) + \|DD_{j-1}^{\lambda 312}\|_{C(\overline{\Omega})} \times \\ &\quad \times [s_{j2}^{\lambda 1}(\Lambda_p) + s_{j1}^{2\lambda}(\Lambda_p)] + \|DD_{j-1}^{\lambda 322}\|_{C(\overline{\Omega})}s_{j2}^{2\lambda}(\Lambda_p)\}, \\ q_L &= \frac{1}{2} \sum_{j,m=1}^2 \max\{\|DD_{m-1}^{j113}\|_{C(\overline{\Omega})}, \|DD_{m-1}^{j123}\|_{C(\overline{\Omega})} + \|DD_{m-1}^{j213}\|_{C(\overline{\Omega})}, \|DD_{m-1}^{j223}\|_{C(\overline{\Omega})}\}; \end{aligned}$$

постоянные $s_{jn}^{\lambda\nu}(\Lambda_p)$ определены в (38); 2) G_3w_3 — нелинейный ограниченный оператор из $W_p^{(2)}(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, причем для любых w_3^j ($j = 1, 2$) $\in W_p^{(2)}(\Omega)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|G_3w_3^1 - G_3w_3^2\|_{L_p(\Omega)} &\leq c\{q_0 + \|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + (\|w_3^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \\ &\quad + \|w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)})^2\}\|w_3^1 - w_3^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_0 = \sum_{\lambda=1}^2 \|R^\lambda + DG_{\mu\nu}^\lambda T_0^{\mu\nu}\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{\lambda,\mu=1}^2 \|DT_0^{\lambda\mu}\|_{C(\overline{\Omega})}, \end{aligned}$$

где c — известная положительная постоянная; $T_0^{\lambda\mu}$ определен в (49) и зависит только от внешних сил;

3) $d_{jk} \in C_\alpha(\overline{\Omega})$, $j, k = 1, 2$.

Справедливость леммы 3 следует из соотношений (51) с учетом $(DT^{\lambda\mu})_{\alpha\mu} = -R^\lambda - DG_{\mu\nu}^\lambda T^{\mu\nu}$, разбиений усилий $T^{\mu\nu}$ на однородные слагаемые в (49), леммы 2, оценок (38), выражений операторов $L_{mjs}(w_3)$ в (9).

Перейдем к исследованию разрешимости уравнения (50) в $W_p^{(2)}(\Omega)$ при условии (52). В основе этого исследования лежит интегральное представление для прогиба w_3 . Для его построения введем уравнение $w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2} = v$, правая часть которого $v \in L_p(\Omega)$ —

произвольно фиксированная действительная функция. При помощи комплексной функции $u = u_2 + iu_1$, $u_j = w_{3\alpha^j}$, $j = 1, 2$, это уравнение приводим к эквивалентному уравнению относительно u вида $u_{\bar{z}} = iv/2$, $u_{\bar{z}} = (u_{\alpha^1} + iu_{\alpha^2})/2$, общее решение которого имеет вид

$$u = \Phi(z) + iTv(z)/2, \quad (53)$$

где $\Phi(z) \in C_\alpha(\bar{\Omega})$ — произвольная голоморфная функция, оператор T задается формулой в (11).

Прогиб w_3 через u выражается формулой

$$w_3 = \int_{t_0}^z u_1 d\alpha^1 + u_2 d\alpha^2, \quad (54)$$

где $t_0 \in \Gamma$ — произвольно фиксированная точка.

Дифференцируя граничное условие (52) по длине s дуги кривой Γ , преобразуем его к виду

$$u_1 d\alpha^1/ds + u_2 d\alpha^2/ds = 0. \quad (55)$$

Отметим, что в силу $w_3(t_0) = 0$ условия (52) и (55) эквивалентны.

Теперь решение (53) подставим в (55) и для определения голоморфной функции $\Phi(z)$ получим граничное условие

$$\operatorname{Re}[it'\Phi(t)] = h_0(v)(t), \quad h_0(v)(t) = \operatorname{Re}[t'Tv(t)]/2. \quad (56)$$

Заметим, что $h_0(v)(t) \in C_\alpha(\Gamma)$. Функцию $\Phi(z)$ будем искать в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu_3(\tau)}{\tau'(\tau - z)} d\tau, \quad (57)$$

где $\mu_3(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ — произвольная действительная функция.

Используя формулы Сохоцкого, находим $\Phi(t) \equiv \Phi^+(t)$, $t \in \Gamma$, и внося $\Phi(t)$ в (56), для определения функции $\rho_3(t)$ получаем интегральное уравнение

$$\mu_3(t) + \operatorname{Re} \left\{ \frac{t'}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mu_3(\tau)}{\tau - t} d\sigma \right\} = -2h_0(v)(t), \quad t \in \Gamma. \quad (58)$$

Так как ([16], сс. 27, 30–32) $|\operatorname{Re}\{t'/[\pi i(\tau - t)]\}| \leq c|\tau - t|^{\alpha-1}$, то уравнение (58) есть уравнение Фредгольма. Пусть $\mu_3(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ — ненулевое решение уравнения (58) при $h_0(v)(t) \equiv 0$. Этому решению по формуле (57) соответствует голоморфная функция $\Phi(z) \in C_\alpha(\bar{\Omega})$, которая по формулам (53) с $v = 0$ и (54) определяет прогиб w_3 , удовлетворяющий уравнению Лапласа и граничному условию (52). В силу единственности решения задачи Дирихле для гармонических функций получаем $w_3 = 0$ в $\bar{\Omega}$, следовательно, $\Phi(z) = 0$, $z \in \bar{\Omega}$. Тогда из (57) следует, что $\mu_3(t)/t'$ есть граничное значение функции, голоморфной вне Ω и исчезающей на бесконечности. Далее, рассуждая как в случае тангенциальных перемещений и углов поворота, приходим к тому, что $\mu_3(t) = \beta_0 \mu_{30}(t)$, где $\mu_{30}(t)$ — известная действительная функция, β_0 — произвольная действительная постоянная.

Рассмотрим союзное уравнение

$$\vartheta_3(t) - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\vartheta_3(\tau)}{\tau - t} d\tau \right) = 0.$$

Легко видеть, что $\vartheta_3 = c$ (c — произвольная действительная постоянная) есть решение союзного уравнения. Следовательно, для разрешимости уравнения (58) необходимо и достаточно условия $\int_{\Gamma} h_0(v)(t)ds = 0$, которое, как легко проверить, выполняется. Тогда общее решение уравнения (58) дается формулой $\mu_3(t) = \mathbb{R}_3 h_0(v)(t) + \beta_0 \mu_{30}(t) \equiv \mu_3(v) + \beta_0 \mu_{30}(t)$, где $\mathbb{R}_3$ — линейный ограниченный оператор в $C_{\alpha}(\Gamma)$, β_0 — произвольная действительная постоянная. Подставляя его в (57), затем (57) в (53), (54), для w_3 и его производных первого порядка получим представления через функцию v вида

$$w_3 = \int_{t_0}^z u_1 d\alpha^1 + u_2 d\alpha^2 \equiv w_3(v), \quad u = u_2 + iu_1 = \Phi(v)(z) + iTv(z)/2 \equiv u(v), \quad (59)$$

$$\Phi(v)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathbb{R}_3 h_0(v)(\tau)}{\tau'(\tau - z)} d\tau, \quad w_{3\alpha^1} = \operatorname{Im} u(v) \equiv w_{3\alpha^1}(v), \quad w_{3\alpha^2} = \operatorname{Re} u(v) \equiv w_{3\alpha^2}(v).$$

Дифференцируя (53) по $\bar{z}$ и z , для производных второго порядка получаем аналогичные представления

$$w_{3\alpha^j\alpha^j} = v/2 + (-1)^{j-1} \operatorname{Im} S_1 v \equiv w_{3\alpha^j\alpha^j}(v), \quad j = 1, 2, \quad w_{3\alpha^1\alpha^2} = \operatorname{Re} S_1 v \equiv w_{3\alpha^1\alpha^2}(v),$$

$$S_1 v = \Phi'(v)(z) + iSv(z)/2, \quad \Phi'(v)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathbb{R}_3 h_0(v)(\tau)}{\tau'(\tau - z)^2} d\tau. \quad (60)$$

Как и выше, оператор $\Phi'(v)$ можно представить в виде

$$\Phi'(v) = \Phi'_s(v) + \Phi'_c(v), \quad \Phi'_s(v) = -(\bar{t}'_z)^2 (v - S\bar{S}v)/2, \quad (61)$$

где $\Phi'_c(v)$ — линейный вполне непрерывный оператор в $L_p(\Omega)$.

В соответствии с (61) для операторов $w_{3\alpha^j\alpha^k}(v)$ в (60) получим представления

$$w_{3\alpha^j\alpha^k}(v) = w_{3\alpha^j\alpha^k s}(v) + w_{3\alpha^j\alpha^k c}(v), \quad w_{3\alpha^j\alpha^j s}(v) = v/2 - (-1)^{j-1} \operatorname{Im} S_{1s} v, \quad (62)$$

$$w_{3\alpha^j\alpha^j c}(v) = (-1)^{j-1} \operatorname{Im} S_{1c} v, \quad w_{3\alpha^1\alpha^2 s}(v) = \operatorname{Re} S_{1s} v, \quad w_{3\alpha^1\alpha^2 c}(v) = \operatorname{Re} S_{1c} v,$$

$$S_{1s} v = \Phi'_s(v) + iSv/2, \quad S_{1c} v = \Phi'_c(v).$$

Ясно, что $w_{3\alpha^j\alpha^k s}(v)$ и $w_{3\alpha^j\alpha^k c}(v)$ — линейные соответственно ограниченные и вполне непрерывные операторы в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$.

Теперь выражения прогиба w_3 и его производных (59), (60), (62) подставим в уравнение (50). В результате относительно функции v получим уравнение

$$v + P_4 v + K_4 v + G_4 v = 0, \quad (63)$$

$P_4 v = 2\operatorname{Re}(d_0 S_{1s} v) + 2P_3 w_{3s}(v)/(d_{11} + d_{22})$, $K_4 v = 2\operatorname{Re}(d_0 S_{1c} v) + 2[P_3 w_{3c}(v) + K_3 w_3(v)]/(d_{11} + d_{22})$, $G_4 v = 2G_3 w_3(v)/(d_{11} + d_{22})$, $d_0 = [2d_{12} - i(d_{11} - d_{22})]/(d_{11} + d_{22})$; здесь $P_3 w_{3s}(v)$ и $P_3 w_{3c}(v)$ определены по формуле для $P_3 w_3$ в (51) заменой $w_{3\alpha^j\alpha^k}(v)$ соответственно на $w_{3\alpha^j\alpha^k s}(v)$ и $w_{3\alpha^j\alpha^k c}(v)$.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (а) – (е) раздела 1. Тогда 1) $P_4 v$ и $K_4 v$ — линейные соответственно ограниченный и вполне непрерывный операторы в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, причем

$$\|P_4 v\|_{L_p(\Omega)} \leq q_4(\Lambda_p) \|v\|_{L_p(\Omega)}, \quad q_4(\Lambda_p) = (1 + \Lambda_p + \Lambda_p^2) \|d_0\|_{C(\bar{\Omega})} +$$

$$+ q_3(\Lambda_p) \|1/(d_{11} + d_{22})\|_{C(\bar{\Omega})} (5 + 3\Lambda_p + 3\Lambda_p^2);$$

постоянная $q_3(\Lambda_p)$ определена в лемме 3; 2) $G_4 v$ — нелинейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, причем для любых v^j ($j = 1, 2$) $\in L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon$, принадлежащих шару

$\|v\|_{L_p(\Omega)} < r$, имеет место оценка $\|G_4 v^1 - G_4 v^2\|_{L_p(\Omega)} \leq c(q_0 + r + r^2)\|v^1 - v^2\|_{L_p(\Omega)}$, где постоянная q_0 определена в лемме 3, c — известная положительная постоянная.

Справедливость леммы 4 следует из соотношений в (63) с учетом леммы 3, представлений (61), (62) и свойств оператора S .

Пусть выполнено условие

$$q_4(1) < 1, \quad (64)$$

где $q_4(1)$ — значение $q_4(\Lambda_p)$ при $\Lambda_p = 1$. Если оболочка изотропная и $B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ — по α^3 четные функции на $[-h/2, h/2]$, то, как легко проверить, $q_4(\Lambda_p) = 0$.

Так как $\Lambda_2 = 1$ ([15], с. 270) и $q_4(\Lambda_p)$ непрерывна относительно Λ_p , то найдется такое число $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$, что $q_4(\Lambda_p) < 1$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon_1$. Тогда существует обратный оператор $(I + P_4)^{-1}$, ограниченный в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon_1$, при помощи которого уравнение (63) сведется к эквивалентному уравнению

$$v + K_5 v + G_5 v = 0, \quad (65)$$

где $K_5 v = (I + P_4)^{-1} K_4 v$, $G_5 v = (I + P_4)^{-1} G_4 v$.

Из леммы 4 сразу следует, что $K_5 v$ — линейный вполне непрерывный, $G_5 v$ — нелинейный ограниченный операторы в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon_1$.

Покажем, что уравнение $v + K_5 v = 0$ имеет только нулевое решение в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon_1$. От противного: пусть $v \in L_p(\Omega)$ — ненулевое его решение. Этому решению по формулам (59), (47) соответствуют прогиб w_3 , тангенциальные перемещения $w_{j1}(w_3)$ и углы поворота $\psi_{j1}(w_3)$, $j = 1, 2$, которые удовлетворяют системе линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} (DT_1^{i\lambda})_{\alpha\lambda} + DG_{\lambda\mu}^i T_1^{\lambda\mu} &= 0, \quad i = 1, 2, \quad (DT_1^{\lambda 3})_{\alpha\lambda} + DB_{\lambda\mu} T_1^{\lambda\mu} = 0, \\ (DM_1^{i\lambda})_{\alpha\lambda} - DT_1^{i3} + DG_{\lambda\mu}^i M_1^{\lambda\mu} &= 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (66)$$

и граничным условиям (2).

Равенства в (66) соответственно умножим на $w_{11}, w_{21}, w_3, \psi_{11}, \psi_{21}$, проинтегрируем по области Ω и сложим. Интегрируя по частям и учитывая граничные условия (2), а также условие (а) раздела 1, после несложных преобразований получаем

$$\psi_{j\alpha j} - G_{jj}^\lambda \psi_\lambda = 0, \quad j = 1, 2, \quad \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} - 2G_{12}^\lambda \psi_\lambda = 0, \quad w_{3\alpha j} + \psi_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

где $\psi_j = \psi_{j1}$, $j = 1, 2$, откуда, рассуждая как в случае системы (45), получаем $v = 0$ в Ω . Следовательно, существует обратный оператор $(I + K_5)^{-1}$, ограниченный в $L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon_1$, с помощью которого уравнение (65) сведется к эквивалентному

$$v + G_* v = 0, \quad G_* v = (I + K_5)^{-1} G_5 v. \quad (67)$$

Используя лемму 4, для любых $v^j (j = 1, 2) \in L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon_1$, принадлежащих шару $\|v\|_{L_p(\Omega)} < r$, будем иметь $\|G_* v^1 - G_* v^2\|_{L_p(\Omega)} \leq q_* \|v^1 - v^2\|_{L_p(\Omega)}$, где $q_* = c\|(I + P_4)^{-1}\|_{L_p(\Omega)}\|(I + K_5)^{-1}\|_{L_p(\Omega)}[q_0 + r(1 + r)]$.

Предположим, что радиус r шара и внешние силы, действующие на оболочку, таковы, что выполняются условия

$$q_* < 1, \quad \|G_* 0\|_{L_p(\Omega)} < (1 - q_*)r, \quad (68)$$

где $G_* 0$ зависит только от внешних сил. В этих условиях к уравнению (67) можно применить принцип сжатых отображений ([20], с. 146), согласно которому уравнение (67) в шаре $\|v\|_{L_p(\Omega)} < r$ имеет единственное решение $v \in L_p(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon_1$.

Зная v , сначала по формуле (54) находим прогиб w_3 , затем по формулам (47) — тангенциальные перемещения w_j и углы поворота ψ_j , $j = 1, 2$.

Таким образом, доказана основная

Теорема. Пусть выполнены условия (а) – (е) раздела 1, неравенства (42), (64), (68). Тогда геометрически нелинейная задача равновесия пологих упругих анизотропных неоднородных оболочек типа Тимошенко с жестко заделанными краями в шаре некоторого радиуса имеет единственное обобщенное решение $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p \leq 2 + \varepsilon_1$.

В заключение остановимся на условиях (42), (64), (68) разрешимости задачи I. Как было отмечено в разделе 3, в случае изотропных оболочек с четными по α^3 на $[-h/2, h/2]$ упругими характеристиками $B^{ijkn}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ постоянные $q(1) = q_4(1) = 0$ и условия (42), (64) выполняются. Для произвольных анизотропных неоднородных оболочек выполнение условий (42), (64) может быть обеспечено в первую очередь за счет малости величин $\|a_{j,k}^{\lambda\nu}\|_{C(\bar{\Omega})}$, $\|DD_{\nu-1}^{\lambda 3\mu n}\|_{C(\bar{\Omega})}$, $\|d_0\|_{C(\bar{\Omega})}$ (функции $a_{j,k}^{\lambda\nu}$, $D_{\nu-1}^{\lambda 3\mu n}$, d_0 определены в (6), (9), (63)). Постоянная q_* зависит от составляющих $R^j, N^j, j = 1, 2$, внешних сил и радиуса r шара. Поэтому первое условие в (68) выполняется за счет выбора радиуса r шара и внешних сил $R^j, N^j, j = 1, 2$. Так как G_*0 зависит, как легко видеть, не только от $R^j, N^j, j = 1, 2$, но и от R^3 , то выполнение второго условия в (68) достигается в том числе и за счет выбора R^3 .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек* (Наука, М., 1989).
- [2] Морозов Н.Ф. *Избранные двумерные задачи теории упругости* (ЛГУ, Л., 1978).
- [3] Карчевский М.М. *Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и их сеточные аппроксимации*, Изв. вузов. Матем., № 10, 17–30 (1985).
- [4] Карчевский М.М., Паймушин В.Н. *О вариационных задачах теории трехслойных пологих оболочек*, Дифференц. уравнения, **30** (7), 1217–1221 (1994).
- [5] Тимергалиев С.Н. *Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек* (Изд-во Казан. ун-та, Казань, 2011).
- [6] Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. *Solvability of a physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversal-soft core*, Russian Math. (Iz. Vuz.), **59** (10), 57–60 (2015).
- [7] Тимергалиев С.Н. *О разрешимости геометрически нелинейных краевых задач для анизотропных оболочек типа Тимошенко с жестко заделанными краями*, Изв. вузов. Матем., № 8, 56–68 (2011).
- [8] Тимергалиев С.Н. *Доказательство существования решения системы дифференциальных уравнений с частными производными нелинейной теории пологих оболочек типа Тимошенко*, Дифференц. уравнения, **48** (3), 450–454 (2012).
- [9] Тимергалиев С.Н. *О существовании решений геометрически нелинейных задач для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями*, Изв. вузов. Матем., № 3, 40–56 (2014).
- [10] Тимергалиев С.Н. *К вопросу о существовании решений нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными теории пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями*, Дифференц. уравнения **51** (3), 373–386 (2015).
- [11] Тимергалиев С.Н., Харасова Л.С. *Исследование разрешимости одной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко*, Дифференц. уравнения **53** (5), 651–664 (2016).
- [12] Тимергалиев С.Н. *Метод интегральных уравнений в нелинейных краевых задачах для пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями*, Изв. вузов. Матем., № 4, 59–75 (2017).
- [13] Тимергалиев С.Н. *К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко*, ПММ, **82** (1), 98–113 (2018).
- [14] Галимов К.З. *Основы нелинейной теории тонких оболочек* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1975).
- [15] Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции* (Наука, М., 1988).
- [16] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Физматгиз, М., 1962).
- [17] Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений* (Гостехиздат, М., 1948).
- [18] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*, 2-е изд. (Физматгиз, М., 1963).
- [19] Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных* (Наука, М., 1976).
- [20] Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений* (Гостехиздат, М., 1956).

Самат Низаметдинович Тимергалиев

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия,

e-mail: Samat_tim@mail.ru

S.N. Timergaliev

On existence of solutions of nonlinear equilibrium problems on shallow inhomogeneous anisotropic shells of the Timoshenko type

Abstract. We prove the existence of solutions to geometrically nonlinear boundary value problem for an elastic inhomogeneous anisotropic shallow shells with rigidly clamped edges under shear model S.P. Timoshenko. The boundary value problem is reduced to one nonlinear operator equation, the solvability of which is established using the principle of compressed maps. The investigation method is based on integral representations for generalized displacements containing arbitrary holomorphic functions determined by boundary conditions involving the theory of Cauchy type integrals with real densities.

Keywords: Timoshenko type shell, equilibrium equations system, boundary problem, generalized shifts, generalized problem solution, integral images, singular integral equation, existence theorem.

Samat Nizametdinovich Timergaliev

*Kazan State University of Architecture and Engineering,
1 Zelenaya str., Kazan, 420043 Russia,*

e-mail: Samat_tim@mail.ru