Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Турбин, А. С. Устюжанинова, Теорема существования слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 8, 62–78

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-8-62-78>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 11:06:35

М.В. ТУРБИН, А.С. УСТЮЖАНИНОВА

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ
НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ,
ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ СЛАБЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ
ПОЛИМЕРОВ**

Аннотация. Доказывается существование слабых решений начально-краевой задачи, описывающей движение слабо концентрированных водных растворов полимеров. Доказательство основано на аппроксимационно-топологическом подходе. На первом шаге операторное уравнение, эквивалентное слабой постановке задачи, аппроксимируется другим операторным уравнением с “хорошими” свойствами, и доказывается разрешимость этого уравнения. На втором шаге делается предельный переход, т. е. показывается, что из последовательности решений можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

Ключевые слова: начально-краевая задача, модель водных растворов полимеров, слабое решение, аппроксимационно-топологический подход, операторное уравнение, априорная оценка, теория степени Лере–Шаудера.

УДК: 517.958

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-8-62-78

ВВЕДЕНИЕ

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) с границей $\partial\Omega$ класса C^3 на промежутке времени $[0; T]$, $0 < T < \infty$, рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \kappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \kappa \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (2)$$

Система (1), (2) введена В.А. Павловским [1] и подтверждается экспериментальными исследованиями растворов полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы [2], [3]. Отметим, что данная система уравнений независимым образом была получена как частный случай модели движения жидкости второго порядка (например, [4], [5]).

Для системы (1), (2) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным условием

$$v|_{t=0} = a(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

Поступила в редакцию 15.06.2018, после доработки 15.06.2018. Принята к публикации 19.12.2018

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.Z50.31.0037).

и граничным условием

$$v|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0. \quad (4)$$

Задача (1)–(4) впервые была рассмотрена А.П. Осколковым в [6], [7]. В работе [8] им было замечено, что доказательство в [6], [7] содержит пробелы и что в ограниченной области Ω ему методом Галёркина–Фаэдо не удалось доказать теоремы существования даже слабых решений для данной начально-краевой задачи. О. А. Ладыженская [9] отмечает, что метод введения вспомогательной вязкости, использованный А. П. Осколковым для изучения этой начально-краевой задачи в уже упомянутых работах [6], [7], является ошибочным, и вопрос о существовании решений задачи (1)–(4) оставался открытым.

В данной работе доказательство проводится на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики, предложенного В.Г. Звягиным и развитого в его работах и работах его учеников (например, [10]–[12]), а также работы по моделям, близким к исследуемой, [13], [14]). А именно, рассматривается операторная трактовка задачи о слабых решениях в подходящих функциональных пространствах. Затем рассматривается операторное уравнение, аппроксимирующее исходное, которое получается путем добавления операторов, обладающих более “хорошими” свойствами. На основе этих “хороших” свойств операторов, теории степени Лере–Шаудера и априорных оценок решений доказывается разрешимость аппроксимационной задачи. Далее на основе априорных оценок решений, не зависящих от параметра аппроксимации, показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходной задачи при стремлении параметра аппроксимации к нулю.

1. ПОНЯТИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1)–(4)

Чтобы ввести понятие слабого решения, потребуются определения некоторых пространств. Как обычно, обозначим через $C_0^\infty(\Omega)^n$ пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω ,

$$\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, \dots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\},$$

$$V^0 = \text{пополнение } \mathcal{V} \text{ по норме } L_2(\Omega)^n;$$

$$V^1 = \text{пополнение } \mathcal{V} \text{ по норме } H^1(\Omega)^n;$$

$$V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1.$$

Отметим, что пространство V^0 можно определить и следующим образом:

$$V^0 = \{v(x) \in L_2(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0, (v, n)|_{\partial\Omega} = 0\},$$

где $\operatorname{div} v$ понимается в смысле теории обобщенных функций, а корректность оператора сужения на $\partial\Omega$ нормальной компоненты v доказана, например, в [15]. Это определение эквивалентно исходному [15].

Будем также использовать хорошо известное разложение Вейля векторных полей из $L_2(\Omega)^n$ (например, [15], [16]):

$$L_2(\Omega)^n = V^0 \oplus \nabla H^1(\Omega),$$

где $\nabla H^1(\Omega) = \{\nabla p : p \in H^1(\Omega)\}$, $\oplus$ – знак ортогональной суммы (пространства V^0 и $\nabla H^1(\Omega)$ ортогональны в $L_2(\Omega)^n$).

Пусть $\pi : L_2(\Omega)^n \rightarrow V^0$ – проектор Лере. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$. Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным (подробнее, например, в [17], [18]). Область определения A совпадает с V^2 . В силу теоремы

Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0 . Если граница области Ω принадлежит классу C^∞ , то $\{e_j\}$ — собственные функции оператора A будут бесконечно дифференцируемыми.

Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ — собственные значения оператора A . Обозначим через

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^N v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad N \in \mathbb{Z},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j , и определим пространство V^α , $\alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{1/2}.$$

В [10], [19] показано, что указанные нормы в пространствах V^1 , V^2 , V^3 эквивалентны следующим нормам:

$$\|v\|_{V^1} = \|A^{1/2}v\|_{V^0}; \quad \|v\|_{V^2} = \|Av\|_{V^0}; \quad \|v\|_{V^3} = \|A^{3/2}v\|_{V^0}.$$

Также введем в этом пункте пространства, в которых будет доказана разрешимость изучаемой задачи и задачи, аппроксимирующей исходную,

$$W = \{u : u \in L_\infty(0, T; V^2), u' \in L_2(0, T; V^1)\}, \quad W_1 = \{u : u \in C([0, T], V^3), u' \in L_2(0, T; V^3)\}$$

с соответствующими нормами

$$\|u\|_W = \|u\|_{L_\infty(0, T; V^2)} + \|u'\|_{L_2(0, T; V^1)}, \quad \|u\|_{W_1} = \|u\|_{C([0, T], V^3)} + \|u'\|_{L_2(0, T; V^3)}.$$

Перейдем к определению слабого решения рассматриваемой начально-краевой задачи (1)–(4). Пусть $f \in L_2(0, T; V^0)$, $a \in V^2$.

Определение. Слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4) называется функция $v \in W$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in V^1$ равенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} \varphi dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \\ + \kappa \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) : \nabla \varphi dx + \kappa \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \end{aligned} \quad (5)$$

при почти всех $t \in (0, T)$ и начальному условию

$$v(0) = a. \quad (6)$$

Здесь символ “:” означает покомпонентное произведение матриц, т. е. для $C = (c_{ij})_{i,j=1}^m$, $D = (d_{ij})_{i,j=1}^m$, $i, j = 1, \dots, m$, имеем $C : D = \sum_{i,j=1}^m c_{ij} d_{ij}$.

Правомочность начального условия следует из того, что любая функция $u \in W$ принадлежит пространству $C([0, T], V^1)$, поскольку $u' \in L_2(0, T; V^1)$.

2. ОПЕРАТОРНАЯ ТРАКТОВКА ЗАДАЧИ

Введем операторы при помощи равенств

$$\begin{aligned} A : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx \quad \forall u, \varphi \in V^1; \\ B_1 : L_4(\Omega)^n &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle B_1(u), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \forall u \in L_4(\Omega)^n, \quad \forall \varphi \in V^1; \\ B_2 : V^2 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle B_2(u), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \Delta u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \forall u \in V^2, \quad \forall \varphi \in V^1; \\ J : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Ju, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u \varphi dx \quad \forall u, \varphi \in V^1. \end{aligned}$$

Тогда задача о поиске слабых решений начально-краевой задачи (1)–(4) эквивалентна задаче о поиске решения $v \in W$ операторного уравнения

$$(J + \kappa A)v' - B_1(v) + \kappa B_2(v) + \nu Au = f, \quad (7)$$

удовлетворяющего начальному условию (6).

3. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Для доказательства существования решения операторного уравнения (7), удовлетворяющего начальному условию (6), рассмотрим аппроксимационное операторное уравнение

$$(J + \kappa A + \varepsilon A^2)v' + \nu Au - B_1(u) + \kappa B_2(u) = f, \quad (8)$$

где оператор

$$A^2 : V^3 \rightarrow V^{-1}, \quad \langle A^2 u, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla(\Delta u) : \nabla \varphi dx \quad \forall u \in V^3, \quad \forall \varphi \in V^1.$$

Назовем решением аппроксимационной задачи функцию $v \in W_1$, удовлетворяющую операторному уравнению (8) и начальному условию

$$v(0) = b \in V^3. \quad (9)$$

Введем операторы

$$\begin{aligned} L(u) &= ((J + \kappa A + \varepsilon A^2)u' + \nu Au, u|_{t=0}), \quad L : W \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3; \\ K(u) &= (B_1(u) - \kappa B_2(u), 0), \quad K : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3. \end{aligned}$$

Тогда вопрос о существовании решения аппроксимационной задачи (8), (9) эквивалентен вопросу о существовании решения операторного уравнения

$$L(u) - K(u) = (f, b). \quad (10)$$

4. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

Чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, действующих в разных функциональных пространствах и определяемых одной и той же формулой. Например, в нижеследующей лемме A — это оператор, действующий из V^1 в V^{-1} , из $L_2(0, T; V^1)$ в $L_2(0, T; V^{-1})$ и из W_1 в $L_2(0, T; V^{-1})$. Отметим также, что ограничимся только теми свойствами, которые потребуются для доказательства существования слабого решения аппроксимационной задачи.

Лемма 1. Для оператора A имеют место следующие свойства.

1) Оператор $A : V^1 \rightarrow V^{-1}$ — непрерывен и для любого $u \in V^1$ справедлива оценка

$$\|Au\|_{V^{-1}} \leq \|u\|_{V^1}. \quad (11)$$

2) Для любой $u \in L_2(0, T; V^1)$ функция $Au \in L_2(0, T; V^{-1})$, оператор $A : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывен и

$$\|Au\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq \|u\|_{L_2(0, T; V^1)}. \quad (12)$$

3) Для любой функции $u \in W_1$ соответствующая ей функция $Au \in L_2(0, T; V^{-1})$, оператор $A : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывен и

$$\|Au\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq C_2 \|u\|_{C([0, T]; V^3)}, \quad (13)$$

$$\|Au\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq C_4 \|u\|_{C([0, T]; V^2)}. \quad (14)$$

Доказательство. 1) В силу линейности оператора A для его непрерывности достаточно доказать ограниченность. По определению оператора A для $v, \varphi \in V^1$ имеем

$$|\langle Au, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx \right| \leq \|u\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^1}$$

и, следовательно, $\|Au\|_{V^{-1}} \leq \|u\|_{V^1}$. Таким образом, оператор $A : V^1 \rightarrow V^{-1}$ ограничен, непрерывен и имеет место требуемая оценка.

2) Пусть $u \in L_2(0, T; V^1)$. В силу п. 1) данной леммы при почти всех $t \in (0, T)$ имеем оценку $\|Au(t)\|_{V^{-1}} \leq \|u(t)\|_{V^1}$. Возводя ее в квадрат и интегрируя по t от 0 до T , получим

$$\int_0^T \|Au(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq \int_0^T \|u(t)\|_{V^1}^2 dt. \quad (15)$$

В силу того, что $\|u(t)\|_{V^1} \in L_2(0, T)$, получаем $\|Au(t)\|_{V^{-1}} \in L_2(0, T)$ и, следовательно, $Au \in L_2(0, T; V^{-1})$.

Извлекая корень из оценки (15), получим требуемую оценку сверху (12). Поскольку оператор A линеен и ограничен, то он непрерывен как оператор из $L_2(0, T; V^1)$ в $L_2(0, T; V^{-1})$.

3) Пусть $u \in W_1$. Тогда в силу неравенства (12) получаем

$$\begin{aligned} \|Au\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 &\leq \|u\|_{L_2(0, T; V^1)}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_{V^1}^2 dt \leq \\ &\leq C_1^2 \int_0^T \|u(t)\|_{V^3}^2 dt \leq C_1^2 \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{V^3}^2 \int_0^T dt = C_1^2 T \|u\|_{C([0, T]; V^3)}^2. \end{aligned}$$

Здесь воспользовались неравенством $\|w\|_{V^1} \leq C_1 \|w\|_{V^3}$, которое имеет место для любого $w \in V^3$ в силу непрерывного вложения $V^3 \subset V^1$.

Таким образом, для любой функции $u \in W_1$ функция $Au \in L_2(0, T; V^{-1})$, и имеет место требуемая оценка (13) ($C_2 = C_1 \sqrt{T}$), из которой в силу линейности следует непрерывность оператора $A : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ (в силу определения нормы в пространстве W_1 справедливо неравенство $\|u\|_{C([0, T]; V^3)} \leq \|u\|_{W_1}$).

Аналогично можно доказать оценку (14). Для этого достаточно воспользоваться в последнем доказательстве неравенством $\|w\|_{V^1} \leq C_3 \|w\|_{V^2}$, которое имеет место для любого $w \in V^2$ в силу непрерывного вложения $V^2 \subset V^1$ (в оценке (14) константа $C_4 = C_3 \sqrt{T}$). $\square$

Перейдем к исследованию свойств операторов B_1, B_2 .

Лемма 2.

- 1) Оператор
- $B_1 : L_4(\Omega)^n \rightarrow V^{-1}$
- непрерывен и

$$\|B_1(u)\|_{V^{-1}} \leq C_5 \|u\|_{L_4(\Omega)^n}^2.$$

- 2) Для любой функции
- $u \in L_4(0, T; L_4(\Omega)^n)$
- функция
- $B_1(u) \in L_2(0, T; V^{-1})$
- и оператор
- $B_1 : L_4(0, T; L_4(\Omega)^n) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$
- непрерывен.

- 3) Оператор
- $B_1 : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$
- вполне непрерывен и

$$\|B_1(u)\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq C_6 \|u\|_{C([0, T], V^1)}^2. \quad (16)$$

Лемма 3.

- 1) Оператор
- $B_2 : V^2 \rightarrow V^{-1}$
- непрерывен и

$$\|B_2(u)\|_{V^{-1}} \leq C_7 \|u\|_{V^2}^2.$$

- 2) Для любой функции
- $u \in L_4(0, T; V^2)$
- функция
- $B_2(u) \in L_2(0, T; V^{-1})$
- и оператор
- $B_2 : L_4(0, T; V^2) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$
- непрерывен.

- 3) Оператор
- $B_2 : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$
- вполне непрерывен и

$$\|B_2(u)\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq C_8 \|u\|_{C([0, T], V^2)}^2. \quad (17)$$

Доказательство. Приведенные в леммах свойства операторов широко известны в литературе и могут быть найдены, например, в ([10], с. 297–306, лемма 7.7.4 — для оператора B_1 , лемма 7.7.5 — для оператора B_2). $\square$

Для получения одной из априорных оценок потребуется

Лемма 4.

- 1) Для любой функции
- $u \in L_2(0, T; V^3)$
- имеет место оценка

$$\|A^2 u\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq \|u\|_{L_2(0, T; V^3)}. \quad (18)$$

- 2) Для любой функции
- $u \in L_2(0, T; V^1)$

$$\varkappa \|u\|_{L_2(0, T; V^1)} \leq \|(\varkappa A + J)u\|_{L_2(0, T; V^{-1})}. \quad (19)$$

Доказательство. 1) Пусть функция $u \in L_2(0, T; V^3)$. Тогда по определению оператора A^2 для любой $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$|\langle A^2 u(t), \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} \nabla (\Delta u(t)) : \nabla \varphi \, dx \right| \leq \|u(t)\|_{V^3} \|\varphi\|_{V^1}.$$

Отсюда следует оценка, имеющая место при почти всех $t \in (0, T)$, $\|A^2 u(t)\|_{V^{-1}} \leq \|u(t)\|_{V^3}$. Возводя это неравенство в квадрат и интегрируя по t от 0 до T , получаем требуемое неравенство (18).

2) Пусть функция $u \in L_2(0, T; V^1)$, тогда при почти всех $t \in (0, T)$ в силу определения операторов A и J имеем

$$\begin{aligned} \langle (\varkappa A + J)u(t), u(t) \rangle &= \varkappa \langle Au(t), u(t) \rangle + \langle Ju(t), u(t) \rangle = \\ &= \varkappa \int_{\Omega} \nabla u(t) : \nabla u(t) \, dx + \int_{\Omega} u(t)u(t) \, dx = \varkappa \|u(t)\|_{V^1}^2 + \|u(t)\|_{V^0}^2 \geq \varkappa \|u(t)\|_{V^1}^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\langle (\varkappa A + J)u(t), u(t) \rangle \leq \|(\varkappa A + J)u(t)\|_{V^{-1}} \|u\|_{V^1}$. Таким образом, получим $\varkappa \|u(t)\|_{V^1}^2 \leq \|(\varkappa A + J)u(t)\|_{V^{-1}} \|u(t)\|_{V^1}$. Отсюда следует оценка снизу, имеющая место при почти всех $t \in (0, T)$, $\varkappa \|u(t)\|_{V^1} \leq \|(\varkappa A + J)u(t)\|_{V^{-1}}$. Возводя последнее неравенство в квадрат и интегрируя по t от 0 до T , получаем требуемую оценку (19). $\square$

Лемма 5.

1) Оператор $J + \varkappa A + \varepsilon A^2 : V^3 \rightarrow V^{-1}$ линейный, непрерывный, обратимый и для него

$$\varepsilon \|u\|_{V^3} \leq \|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u\|_{V^{-1}} \leq (C_9 + \varkappa C_1^2 + \varepsilon) \|u\|_{V^3}. \quad (20)$$

Обратный оператор $(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1} : V^{-1} \rightarrow V^3$ непрерывен и для любой $w \in V^{-1}$

$$\|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1}w\|_{V^3} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|w\|_{V^{-1}}. \quad (21)$$

2) Для любой функции $u \in L_2(0, T; V^3)$ функция $(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u \in L_2(0, T; V^{-1})$, оператор $J + \varkappa A + \varepsilon A^2 : L_2(0, T; V^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывен, обратим и для него

$$\varepsilon \|u\|_{L_2(0, T; V^3)} \leq \|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq (C_9 + \varkappa C_1^2 + \varepsilon) \|u\|_{L_2(0, T; V^3)}. \quad (22)$$

Обратный оператор $(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \rightarrow L_2(0, T; V^3)$ непрерывен.

Доказательство. 1) Линейность оператора $J + \varkappa A + \varepsilon A^2$ следует из линейности каждого из операторов $J, \varkappa A, \varepsilon A^2$. Покажем его непрерывность. В силу линейности для этого достаточно показать его ограниченность:

$$\begin{aligned} \|(J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u\|_{V^{-1}} &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\varphi \in V^1 \setminus \{0\}} \frac{|\langle (J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{V^1}} = \\ &= \sup_{\varphi \in V^1 \setminus \{0\}} \frac{|\int_{\Omega} u \varphi dx + \varkappa \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx - \varepsilon \int_{\Omega} \nabla (\Delta u) : \nabla \varphi dx|}{\|\varphi\|_{V^1}} \leq \\ &\leq \sup_{\varphi \in V^1 \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{V^0} \|\varphi\|_{V^0} + \varkappa \|u\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^1} + \varepsilon \|u\|_{V^3} \|\varphi\|_{V^1}}{\|\varphi\|_{V^1}} \leq \\ &\leq \sup_{\varphi \in V^1 \setminus \{0\}} \frac{C_9 \|u\|_{V^3} \|\varphi\|_{V^1} + \varkappa C_1^2 \|u\|_{V^3} \|\varphi\|_{V^1} + \varepsilon \|u\|_{V^3} \|\varphi\|_{V^1}}{\|\varphi\|_{V^1}} = (C_9 + \varkappa C_1^2 + \varepsilon) \|u\|_{V^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $J + \varkappa A + \varepsilon A^2 : V^3 \rightarrow V^{-1}$ непрерывен, и имеет место правая часть оценки (20).

Далее, в силу п. 1) леммы 1 и непрерывного вложения $V^1 \subset V^{-1}$ получаем, что оператор $J + \varkappa A : V^1 \rightarrow V^{-1}$ непрерывен. Следовательно, поскольку вложение $V^3 \subset V^1$ вполне непрерывно, то оператор $J + \varkappa A : V^3 \rightarrow V^{-1}$ является вполне непрерывным как суперпозиция непрерывного и вполне непрерывного операторов.

Таким образом, оператор $J + \varkappa A + \varepsilon A^2 : V^3 \rightarrow V^{-1}$ можно представить как сумму непрерывно обратимого оператора $\varepsilon A^2 : V^3 \rightarrow V^{-1}$ (в силу определения оператора A и пространств $V^\beta, \beta \in \mathbb{R}$, имеем, что оператор $A^2 : V^3 \rightarrow V^{-1}$ непрерывен, обратим и обратный к нему оператор $(A^2)^{-1} : V^{-1} \rightarrow V^3$ непрерывен) и вполне непрерывного оператора $J + \varkappa A : V^3 \rightarrow V^{-1}$.

Тогда оператор $J + \varkappa A + \varepsilon A^2 : V^3 \rightarrow V^{-1}$ является линейным фредгольмовым оператором индекса нуль (как сумма непрерывно обратимого и вполне непрерывного операторов, теорема 7.4.3 из [10], с. 288). Более того, $\text{Ker}(J + \varkappa A + \varepsilon A^2) = \{0\}$.

На самом деле, пусть $u \in V^3$, тогда получим $Au \in V^1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle (J + \varkappa A + \varepsilon A^2)u, Au \rangle &= \\ &= - \int_{\Omega} u \Delta u dx - \varkappa \int_{\Omega} \nabla u : \nabla (\Delta u) dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla (\Delta u) : \nabla (\Delta u) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \nabla u : \nabla u dx + \kappa \int_{\Omega} \Delta u \Delta u dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla (\Delta u) : \nabla (\Delta u) dx = \\
&= \|u\|_{V^1}^2 + \kappa \|u\|_{V^2}^2 + \varepsilon \|u\|_{V^3}^2 \geq \varepsilon \|u\|_{V^3}^2.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle (J + \kappa A + \varepsilon A^2)u, Au \rangle \geq \varepsilon \|u\|_{V^3}^2. \quad (23)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\langle (J + \kappa A + \varepsilon A^2)u, Au \rangle &\leq \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)u\|_{V^{-1}} \|Au\|_{V^1} = \\
&= \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)u\|_{V^{-1}} \|u\|_{V^3}. \quad (24)
\end{aligned}$$

В итоге из (23) и (24) получим левую часть оценки (20)

$$\varepsilon \|u\|_{V^3} \leq \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)u\|_{V^{-1}}.$$

Из последней оценки вытекает, что ядро оператора $J + \kappa A + \varepsilon A^2 : V^3 \rightarrow V^{-1}$ состоит только из нуля. Следовательно, в силу теоремы 7.4.3 из ([10], с. 288) он обратим (линейный фредгольмов оператор индекса ноль с нулевым ядром), причем обратный оператор $(J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1} : V^{-1} \rightarrow V^3$ непрерывен.

Неравенство (21) получается из левой части оценки (20). Действительно, в силу обратимости оператора $J + \kappa A + \varepsilon A^2$ для каждого $w \in V^{-1}$ существует единственный элемент, $v \in V^3$ такой, что $v = (J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1}w$ и имеет место неравенство (20), поэтому

$$\varepsilon \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1}w\|_{V^3} \leq \|w\|_{V^{-1}}$$

для любого $w \in V^{-1}$. Из последней оценки следует (21).

2) Пусть $u \in L_2(0, T; V^3)$. В силу правой части оценки (20) при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место оценка $\|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)u(t)\|_{V^{-1}} \leq (C_9 + \kappa C_1^2 + \varepsilon) \|u(t)\|_{V^3}$. Возводя ее в квадрат и проинтегрировав полученное неравенство по t от 0 до T , получим

$$\int_0^T \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)u(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq (C_9 + \kappa C_1^2 + \varepsilon)^2 \int_0^T \|u(t)\|_{V^3}^2 dt.$$

Так как $u \in L_2(0, T; V^3)$, то правая часть неравенства конечна и, следовательно, левая часть неравенства конечна. Отсюда $(J + \kappa A + \varepsilon A^2)u \in L_2(0, T; V^{-1})$ и имеет место правая часть оценки (22).

Поскольку оператор $J + \kappa A + \varepsilon A^2$ линейный и ограниченный, то получаем, что он непрерывен как оператор из $L_2(0, T; V^3)$ в $L_2(0, T; V^{-1})$.

Покажем его обратимость. Сначала докажем, что множество значений оператора $J + \kappa A + \varepsilon A^2 : L_2(0, T; V^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ совпадает со всем $L_2(0, T; V^{-1})$. Для этого надо показать, что для любого $w \in L_2(0, T; V^{-1})$ уравнение $(J + \kappa A + \varepsilon A^2)u = w$ имеет решение $u \in L_2(0, T; V^3)$.

В силу того, что оператор $J + \kappa A + \varepsilon A^2 : V^3 \rightarrow V^{-1}$ обратим, имеем, что при почти всех $t \in (0, T)$ это уравнение имеет решение $u(t) = (J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1}w(t)$.

Осталось показать, что определенная таким образом функция u принадлежит пространству $L_2(0, T; V^3)$. В силу левой части оценки (20) при почти всех $t \in (0, T)$

$$\varepsilon \|u(t)\|_{V^3} \leq \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)u(t)\|_{V^{-1}} = \|w(t)\|_{V^{-1}}.$$

Возводя это неравенство в квадрат и интегрируя его по отрезку $[0, T]$, получим

$$\varepsilon \int_0^T \|u(t)\|_{V^3}^2 dt \leq \int_0^T \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)u(t)\|_{V^{-1}}^2 dt = \int_0^T \|w(t)\|_{V^{-1}}^2 dt. \quad (25)$$

Поскольку $w \in L_2(0, T; V^{-1})$, то из последнего неравенства следует $u \in L_2(0, T; V^3)$. Таким образом, получили, что множество значений оператора $J + \kappa A + \varepsilon A^2 : L_2(0, T; V^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ совпадает со всем пространством $L_2(0, T; V^{-1})$.

Также непосредственно из неравенства (25) получим левую часть оценки (22), откуда, как и в п. 1), непосредственно получаем $\text{Ker}(J + \kappa A + \varepsilon A^2) = \{0\}$.

В итоге $J + \kappa A + \varepsilon A^2$ обратим как оператор из $L_2(0, T; V^3)$ в $L_2(0, T; V^{-1})$. Более того, в силу теоремы Банаха обратный к нему оператор является непрерывным. $\square$

Лемма 6. *Оператор $L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ обратим и обратный к нему оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_1$ непрерывен.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой Банаха об обратном операторе для доказательства непрерывной обратимости оператора

$$L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \kappa A + \varepsilon A^2)v' + \nu Av, v|_{t=0}).$$

Сначала покажем его непрерывность. В силу линейности этого оператора достаточно показать его ограниченность.

Для любой функции $v \in W_1$ в силу неравенств (13), (22) имеем

$$\begin{aligned} \|L(v)\|_{L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3} &= \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)v' + \nu Av\|_{L_2(0, T; V^{-1})} + \|v|_{t=0}\|_{V^3} \leq \\ &\leq \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)v'\|_{L_2(0, T; V^{-1})} + \nu \|Av\|_{L_2(0, T; V^{-1})} + \max_{t \in [0, T]} \|v(t)\|_{V^3} \leq \\ &\leq (C_9 + \kappa C_1^2 + \varepsilon) \|v'\|_{L_2(0, T; V^3)} + \nu C_2 \|v\|_{C([0, T]; V^3)} + \|v\|_{C([0, T]; V^3)} \leq \\ &\leq (C_9 + \kappa C_1^2 + \varepsilon + \nu C_2 + 1) (\|v'\|_{L_2(0, T; V^3)} + \|v\|_{C([0, T]; V^3)}) = \\ &= (C_9 + \kappa C_1^2 + \varepsilon + \nu C_2 + 1) \|v\|_{W_1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что линейный оператор $L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ ограничен и, следовательно, непрерывен.

Покажем теперь, что оператор L является взаимно однозначным. Для этого достаточно показать, что для каждого $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $a \in V^3$ существует единственный элемент $v \in W_1$ такой, что

$$L(v) = (f, a).$$

Последнее уравнение можно переписать в виде задачи Коши

$$(J + \kappa A + \varepsilon A^2)v' + \nu Av = f, \quad (26)$$

$$v(0) = a. \quad (27)$$

Покажем, что при каждом $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $a \in V^3$ данная задача имеет единственное решение $v \in W_1$.

В силу п. 2) леммы 5 имеем, что оператор $J + \kappa A + \varepsilon A^2 : L_2(0, T; V^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ обратим и обратный к нему оператор непрерывен. Следовательно, применяя оператор $(J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1}$ к (26), получаем, что задача (26), (27) эквивалентна задаче Коши

$$v' + \nu(J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1}Av = (J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1}f, \quad (28)$$

$$v(0) = a. \quad (29)$$

Проинтегрировав (28) от 0 до t , где $t \in [0, T]$, получим, что задача нахождения решения $v \in W_1$ задачи Коши (28), (29) эквивалентна задаче нахождения решения $v \in C([0, T], V^3)$

следующего операторного уравнения:

$$v(t) = a - \int_0^t (\nu(J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1} Av(s) - (J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1} f(s)) ds. \quad (30)$$

Введем вспомогательное отображение

$$(Uv)(t) = a - \int_0^t (\nu(J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1} Av(s) - (J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1} f(s)) ds, \quad t \in [0, T].$$

Поскольку интеграл Бохнера от интегрируемой функции есть функция непрерывная, получаем, что $U : C([0, T], V^3) \rightarrow C([0, T], V^3)$.

Покажем, что отображение U является сжимающим. Для любых $v, w \in C([0, T], V^3)$ в силу определения оператора U , воспользовавшись неравенствами (21), (11) и непрерывностью вложения $V^3 \subset V^1$, получим для любого вещественного числа $k > 0$ (точное значение числа k будет указано ниже)

$$\begin{aligned} \|(Uv)(t) - (Uw)(t)\|_{V^3} &= \\ &= \left\| \int_0^t \nu(J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1} Av(s) ds - \int_0^t \nu(J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1} Aw(s) ds \right\|_{V^3} = \\ &= \left\| \int_0^t \nu(J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1} A(v - w)(s) ds \right\|_{V^3} \leq \nu \int_0^t \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2)^{-1} A(v - w)(s)\|_{V^3} ds \leq \\ &\leq \frac{\nu}{\varepsilon} \int_0^t \|A(v - w)(s)\|_{V^{-1}} ds \leq C_1 \frac{\nu}{\varepsilon} \int_0^t \|v(s) - w(s)\|_{V^3} ds = \\ &= C_1 \frac{\nu}{\varepsilon} \int_0^t \|v(s) - w(s)\|_{V^3} e^{-ks} e^{ks} ds \leq C_1 \frac{\nu}{\varepsilon} \int_0^t \max_{s \in [0, t]} (e^{-ks} \|v(s) - w(s)\|_{V^3}) e^{ks} ds = \\ &= C_1 \frac{\nu}{\varepsilon} \|v - w\|_{C([0, t], V^3), k} \int_0^t e^{ks} ds \leq C_1 \frac{\nu}{\varepsilon} \|v - w\|_{C([0, T], V^3), k} \left(\frac{e^{kt} - 1}{k} \right), \end{aligned}$$

где $\|u\|_{C([0, T], V^3), k} = \max_{t \in [0, T]} (e^{-kt} \|u(t)\|_{V^3})$, $k \geq 0$, — норма, эквивалентная стандартной норме $C([0, T], V^3)$ ([20], с. 191, лемма 1.2).

В итоге получили, что при $t \in [0, T]$ имеет место неравенство

$$\|(Uv)(t) - (Uw)(t)\|_{V^3} \leq C_1 \frac{\nu}{\varepsilon} \|v - w\|_{C([0, T], V^3), k} \left(\frac{e^{kt} - 1}{k} \right).$$

Умножая обе части последнего неравенства на e^{-kt} и оценивая правую часть сверху, окончательно получим

$$e^{-kt} \|(Uv)(t) - (Uw)(t)\|_{V^3} \leq C_1 \frac{\nu}{\varepsilon} \|v - w\|_{C([0, T], V^3), k} \left(\frac{1 - e^{-kT}}{k} \right).$$

Правая часть последнего неравенства не зависит от t . Тогда, переходя к максимуму по $t \in [0, T]$ в левой части и выбирая постоянную k таким образом, чтобы $\frac{C_1 \nu}{k \varepsilon} \leq 1$, получим неравенство

$$\|Uv - Uw\|_{C([0, T], V^3), k} \leq \eta \|v - w\|_{C([0, T], V^3), k}, \quad (31)$$

где η — константа, $0 < \eta < 1$. Воспользовались тем, что $1 - e^{-kT} < 1$.

Таким образом, из неравенства (31) непосредственно получаем, что отображение $U : C([0, T], V^3) \rightarrow C([0, T], V^3)$ является сжимающим. Тогда в силу принципа сжимающих отображений отображение U имеет единственную неподвижную точку, т.е. такую точку

$w \in C([0, T], V^3)$, что $Uw = w$. Следовательно, эта функция $w \in C([0, T], V^3)$ удовлетворяет уравнению (30).

В силу проведенных выше рассуждений имеем, что для каждой пары $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $a \in V^3$ существует единственное решение $w \in W_1$ задачи (26), (27). Следовательно, оператор $L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является взаимно однозначным. Таким образом, в силу теоремы Банаха об обратном операторе оператор $L : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ обратим и обратный оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_1$ непрерывен. $\square$

Лемма 7. Оператор $K : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ вполне непрерывный.

Доказательство непосредственно следует из определения оператора

$$K : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3, \quad K(v) = (B_1(v) - \kappa B_2(v), 0),$$

и вполне непрерывности операторов: $B_1 : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ (п. 3) леммы 2), $B_2 : W_1 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ (п. 3) леммы 3). $\square$

5. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Вместе с операторным уравнением (10) будем рассматривать семейство операторных уравнений

$$L(u) - \lambda K(u) = \lambda(f, b), \quad \text{где } \lambda \in [0, 1]. \quad (32)$$

Лемма 8. Если $u \in W_1$ — решение (32) для какого-то $\lambda \in [0, 1]$, то для него имеют место оценки

$$\|u\|_{C([0, T], V^2)}^2 \leq \frac{2}{\varkappa^2} C_{11}; \quad (33)$$

$$\frac{\varepsilon \kappa}{2} \|u\|_{C([0, T], V^3)}^2 \leq C_{11}, \quad (34)$$

где $C_{11} = \frac{C_{10}^2 + \kappa^2}{\nu \kappa} \|f\|_{L_2(0, T; V^0)}^2 + \frac{1}{2} \|b\|_{V^0}^2 + \kappa \|b\|_{V^1}^2 + \frac{\varepsilon + \kappa^2}{2} \|b\|_{V^2}^2 + \frac{\varepsilon \kappa}{2} \|b\|_{V^3}^2$.

Доказательство. Если $u \in W_1$ — решение (32) для некоторого $\lambda \in [0, 1]$, то

$$(J + \kappa A + \varepsilon A^2) u' + \nu Au - \lambda B_1(u) + \lambda \kappa B_2(u) = \lambda f, \quad (35)$$

$$u(0) = \lambda b. \quad (36)$$

Применим (35) к функции $\varphi = (J + \kappa A) u$. Получим

$$\begin{aligned} \langle (J + \kappa A + \varepsilon A^2) u', (J + \kappa A) u \rangle + \langle \nu Au, (J + \kappa A) u \rangle - \lambda \langle B_1(u), (J + \kappa A) u \rangle + \\ + \lambda \kappa \langle B_2(u), (J + \kappa A) u \rangle = \lambda \langle f, (J + \kappa A) u \rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle (J + \kappa A + \varepsilon A^2) u', (J + \kappa A) u \rangle &= \langle (J + \kappa A) u', (J + \kappa A) u \rangle + \varepsilon \langle A^2 u', u \rangle + \varepsilon \kappa \langle A^2 u', Au \rangle = \\ &= \int_{\Omega} u' u dx - \kappa \int_{\Omega} u' \Delta u dx + \kappa \int_{\Omega} \nabla u' : \nabla u dx - \kappa^2 \int_{\Omega} \nabla u' : \nabla \Delta u dx - \\ &- \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \Delta u' : \nabla u dx + \varepsilon \kappa \int_{\Omega} \nabla \Delta u' : \nabla \Delta u dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} u^2 dx + \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u : \nabla u) dx + \\ &+ \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla u : \nabla u) dx + \frac{\kappa^2}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u \Delta u) dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u \Delta u) dx + \\ &+ \frac{\varepsilon \kappa}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Delta u : \nabla \Delta u) dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{V^0}^2 + \kappa \frac{d}{dt} \|u\|_{V^1}^2 + \frac{\varepsilon + \kappa^2}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{V^2}^2 + \frac{\varepsilon \kappa}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{V^3}^2. \end{aligned}$$

Переходим к следующему слагаемому

$$\begin{aligned}\langle \nu Au, (J + \kappa A) u \rangle &= \nu \langle Au, u \rangle + \nu \kappa \langle Au, Au \rangle = \\ &= \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla u dx + \nu \kappa \int_{\Omega} \Delta u \Delta u dx = \nu \|u\|_{V^1}^2 + \nu \kappa \|u\|_{V^2}^2.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}& -\lambda \langle B_1(u), (J + \kappa A) u \rangle + \lambda \kappa \langle B_2(u), (J + \kappa A) u \rangle = -\lambda \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial (u - \kappa \Delta u)_j}{\partial x_i} dx + \\ & + \lambda \kappa \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \Delta u_j \frac{\partial (u - \kappa \Delta u)_j}{\partial x_i} dx = -\lambda \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} u_i (u - \kappa \Delta u)_j \frac{\partial (u - \kappa \Delta u)_j}{\partial x_i} dx \right) = \\ & = -\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_i \frac{\partial ((u - \kappa \Delta u)_j (u - \kappa \Delta u)_j)}{\partial x_i} dx = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} (u - \kappa \Delta u)_j (u - \kappa \Delta u)_j dx = 0.\end{aligned}$$

Оценим правую часть сверху:

$$\begin{aligned}\langle f, (J + \kappa A) u \rangle &= \langle f, u \rangle + \kappa \langle f, Au \rangle \leq \|f\|_{V^0} \|u\|_{V^0} + \kappa \|f\|_{V^0} \|Au\|_{V^0} \leq \\ & \leq C_{10} \|f\|_{V^0} \|u\|_{V^2} + \kappa \|f\|_{V^0} \|u\|_{V^2} \leq \|u\|_{V^2} (C_{10} \|f\|_{V^0} + \kappa \|f\|_{V^0}) \leq \\ & \leq \frac{\nu \kappa}{2} \|u\|_{V^2}^2 + \frac{(C_{10} + \kappa)^2 \|f\|_{V^0}^2}{2\nu \kappa} \leq \frac{\nu \kappa}{2} \|u\|_{V^2}^2 + \frac{C_{10}^2 + \kappa^2}{\nu \kappa} \|f\|_{V^0}^2.\end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые, получим неравенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{V^0}^2 + \kappa \frac{d}{dt} \|u\|_{V^1}^2 + \frac{\varepsilon + \kappa^2}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{V^2}^2 + \frac{\varepsilon \kappa}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{V^3}^2 + \nu \|u\|_{V^1}^2 + \frac{\nu \kappa}{2} \|u\|_{V^2}^2 \leq \\ \leq \frac{C_{10}^2 + \kappa^2}{\nu \kappa} \|f\|_{V^0}^2.\end{aligned}$$

Проинтегрируем это неравенство по t

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2} \|u(t)\|_{V^0}^2 + \kappa \|u(t)\|_{V^1}^2 + \frac{\varepsilon + \kappa^2}{2} \|u(t)\|_{V^2}^2 + \frac{\varepsilon \kappa}{2} \|u(t)\|_{V^3}^2 + \nu \int_0^t \|u(s)\|_{V^1}^2 ds + \\ & + \frac{\nu \kappa}{2} \int_0^t \|u(s)\|_{V^2}^2 ds \leq \frac{C_{10}^2 + \kappa^2}{\nu \kappa} \int_0^t \|f(s)\|_{V^0}^2 ds + \frac{\lambda^2}{2} \|b\|_{V^0}^2 + \kappa \lambda^2 \|b\|_{V^1}^2 + \frac{\varepsilon + \kappa^2}{2} \lambda^2 \|b\|_{V^2}^2 + \\ & + \frac{\varepsilon \kappa \lambda^2}{2} \|b\|_{V^3}^2 \leq \frac{C_{10}^2 + \kappa^2}{\nu \kappa} \|f\|_{L_2(0,T;V^0)}^2 + \frac{1}{2} \|b\|_{V^0}^2 + \kappa \|b\|_{V^1}^2 + \frac{\varepsilon + \kappa^2}{2} \|b\|_{V^2}^2 + \frac{\varepsilon \kappa}{2} \|b\|_{V^3}^2 = C_{11}.\end{aligned}$$

Так как в левой части неравенства все слагаемые положительные, то каждое из них не больше правой части, поэтому имеем

$$\frac{\kappa^2}{2} \|u(t)\|_{V^2}^2 \leq C_{11} \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon \kappa}{2} \|u(t)\|_{V^3}^2 \leq C_{11}.$$

Поскольку правая часть этих неравенств не зависит от t , то можно перейти к максимуму по $t \in [0, T]$ в левой части. Получим

$$\frac{\kappa^2}{2} \max_{t \in [0, T]} \|u\|_{V^2}^2 \leq C_{11} \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon \kappa}{2} \max_{t \in [0, T]} \|u\|_{V^3}^2 \leq C_{11}.$$

Отсюда следуют требуемые оценки. $\square$

Лемма 9. Если $u \in W_1$ — решение (32) для какого-то $\lambda \in [0, 1]$, то имеют место оценки

$$\varepsilon \|u'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leq C_{14}, \quad (37)$$

$$\kappa \|u'\|_{L_2(0,T;V^1)} \leq 2C_{14}. \quad (38)$$

Доказательство. Если $u \in W_1$ — решение (32), то для него справедливо равенство (35), откуда $(J + \kappa A + \varepsilon A^2) u' = -\nu Au + \lambda B_1(u) - \lambda \kappa B_2(u) + \lambda f$. Следовательно, в силу неравенств (14), (16), (17) и оценки (33) получим

$$\begin{aligned} \|(J + \kappa A + \varepsilon A^2) u'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} &= \|- \nu Au + \lambda B_1(u) - \lambda \kappa B_2(u) + \lambda f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq \\ &\leq \nu \|Au\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|B_1(u)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \kappa \|B_2(u)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq \\ &\leq \nu \|u\|_{C([0,T],V^2)} + C_6 \|u\|_{C([0,T],V^1)}^2 + \kappa C_8 \|u\|_{C([0,T],V^2)}^2 + C_{12} \|f\|_{L_2(0,T;V^0)} \leq \\ &\leq \nu C_4 \left(\|u\|_{C([0,T],V^2)}^2 + 1 \right) + C_6 C_{13}^2 \|u\|_{C([0,T],V^2)}^2 + \kappa C_8 \|u\|_{C([0,T],V^2)}^2 + C_{12} \|f\|_{L_2(0,T;V^0)} \leq \\ &\leq (\nu C_4 + C_6 C_{13}^2 + \kappa C_8) \left(\frac{2}{\kappa^2} C_{11} + 1 \right) + C_{12} \|f\|_{L_2(0,T;V^0)} = C_{14}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|(J + \kappa A + \varepsilon A^2) u'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq C_{14}$.

Так как в силу левой части неравенства (22) для любого $w \in L_2(0,T;V^3)$ справедливо неравенство $\|(J + \kappa A + \varepsilon A^2) w\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \geq \varepsilon \|w\|_{L_2(0,T;V^3)}$, получаем оценку (37). Аналогично, воспользовавшись полученной оценкой и неравенством (18), имеем

$$\begin{aligned} \|(J + \kappa A) u'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} &= \|\varepsilon A^2 u' - \nu Au + \lambda B_1(u) - \lambda \kappa B_2(u) + \lambda f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq \\ &\leq \varepsilon \|A^2 u'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|\nu Au + \lambda B_1(u) - \\ &\quad - \lambda \kappa B_2(u) + \lambda f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq \varepsilon \|u'\|_{L_2(0,T;V^3)} + C_{14} \leq 2C_{14}. \end{aligned}$$

Поскольку $\|(J + \kappa A) w\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \geq \kappa \|w\|_{L_2(0,T;V^1)}$, то получаем оценку (38). $\square$

6. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Теорема. Операторное уравнение (10) имеет хотя бы одно решение $v \in W_1$.

Доказательство. Воспользуемся теорией степени Лере–Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

В силу априорных оценок (34) и (37) все решения семейства уравнений (32):

$$L(v) - \lambda K(v) = \lambda(f, b), \quad \text{где } \lambda \in [0, 1],$$

лежат в шаре $B_R \subset W_1$ радиуса $R = C_{15} + 1$ с центром в нуле, где

$$C_{15} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon \kappa} C_{11}} + \frac{1}{\varepsilon} C_{14}.$$

Следовательно, все решения семейства уравнений

$$v - \lambda L^{-1} [K(v) + (f, b)] = 0, \quad \text{где } \lambda \in [0, 1],$$

лежат в том же шаре B_R . По лемме 7 отображение $[K(\cdot) + (f, b)] : W_1 \rightarrow L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ является вполне непрерывным. В силу леммы 6 оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_1$ непрерывен. Таким образом, отображение $L^{-1} [K(\cdot) + (f, b)] : W_1 \rightarrow W_1$ вполне непрерывно. Тогда отображение

$$G : [0, 1] \times W_1 \rightarrow W_1, \quad G(\lambda, v) = \lambda L^{-1} [K(v) + (f, b)],$$

вполне непрерывно по совокупности переменных λ и v . Из вышесказанного имеем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$ невырождено на границе шара B_R . Следовательно, для него определена степень Лере–Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим

$$\deg_{LS}(\Phi(0, \cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0).$$

Вспомним, что $\Phi(0, \cdot) = I$ и по условию нормировки $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$. Отсюда $\deg_{LS}(\Phi(1, \cdot), B_R, 0) = 1$. Получили, что существует хотя бы одно решение $v \in W_1$ уравнения

$$v - L^{-1}[K(v) + (f, b)] = 0$$

и, следовательно, уравнения (10). $\square$

Поскольку существует решение $v \in W_1$ уравнения (10), то из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача (8), (9) имеет хотя бы одно решение $v \in W_1$.

7. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

В силу теоремы при каждом $\varepsilon > 0$ существует слабое решение аппроксимационной задачи (8), (9). Следовательно, вспоминая определения операторов, существует функция $v_\varepsilon \in W_1$, которая удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v'_\varepsilon \varphi dx + \varkappa \int_{\Omega} \nabla v'_\varepsilon : \nabla \varphi dx - \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\Delta v'_\varepsilon) : \nabla \varphi dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v_\varepsilon : \nabla \varphi dx - \\ - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_\varepsilon)_i (v_\varepsilon)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \varkappa \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_\varepsilon)_i (\Delta v_\varepsilon)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \int_{\Omega} f \varphi dx \end{aligned} \quad (39)$$

и начальному условию

$$v_\varepsilon(0) = b. \quad (40)$$

Выберем последовательность ε_n , сходящуюся к нулю следующим образом. Если начальное условие исходной задачи $a \equiv 0$, то положим $\varepsilon_n = 1/n$, если же $a \not\equiv 0$, то в силу плотности V^3 в V^2 найдется такая последовательность $\{b_n\} \subset V^3$, которая сходится к a по норме V^2 и, начиная с некоторого номера, возможно переходя к подпоследовательности, $\|b_n\|_{V^3} \neq 0$. Таким образом, положим в этом случае $\varepsilon_n = \frac{1}{n\|b_n\|_{V^3}^2}$.

Тогда в силу оценок (33) и (38) решение v_n , удовлетворяющее соотношениям (39), (40), удовлетворяет также оценкам (без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon_n \leq 1$):

$$\|v_n\|_{L_\infty(0,T;V^2)}^2 \leq C_{16}, \quad (41)$$

$$\|v'_n\|_{L_2(0,T;V^1)} \leq \frac{2}{\varkappa} \left((\nu C_4 + C_6 C_{13}^2 + \varkappa C_8) \left(\frac{2}{\varkappa^2} C_{16} + 1 \right) + C_{12} \|f\|_{L_2(0,T;V^0)} \right), \quad (42)$$

где

$$C_{16} = \frac{2C_{10}^2 + 2\varkappa^2}{\nu \varkappa^3} \|f\|_{L_2(0,T;V^0)}^2 + \left(\frac{2}{\varkappa} + \frac{2 + \varkappa^2}{\varkappa^2} \right) (\|a\|_{V^0}^2 + \|a\|_{V^1}^2 + \|a\|_{V^2}^2 + 1) + \frac{1}{\varkappa}.$$

Следовательно, в силу оценки (41) без ограничения общности и, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, получим, что $\{v_n\}$ сходится $*$ -слабо к функции $u \in L_\infty(0, T; V^2)$ (а также слабо к той же функции в любом $L_p(0, T; V^2)$ для $1 < p < \infty$), а в силу оценки (42) также без ограничения общности и, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, имеем, что v'_n сходится слабо к функции u' в $L_2(0, T; V^1)$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v'_n \varphi dx &\rightarrow \int_{\Omega} u' \varphi dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \\ \kappa \int_{\Omega} \nabla v'_n : \nabla \varphi dx &\rightarrow \kappa \int_{\Omega} \nabla u' : \nabla \varphi dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \\ \nu \int_{\Omega} \nabla v_n : \nabla \varphi dx &\rightarrow \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla \varphi dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

По теореме Обена–Дубинского–Симона [21] имеет место компактное вложение

$$\{w : w \in L_{\infty}(0, T; V^2), w' \in L_2(0, T; V^1)\} \subset C([0, T], V^1).$$

В силу этого вложения и оценок (41) и (42) как и ранее, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, получим, что последовательность $\{v_n\}$ сходится сильно в $C([0, T], V^1)$ к той же самой функции u .

Поэтому

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_n)_i (v_n)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \rightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Далее, аналогично теореме Обена–Дубинского–Симона [21] имеет место компактное вложение $\{w : w \in L_{\infty}(0, T; V^2), w' \in L_2(0, T; V^1)\} \subset C([0, T], C(\bar{\Omega})^n)$, в силу которого $v_n \rightarrow u$ в $C([0, T], C(\bar{\Omega})^n)$. Отсюда и из упомянутой выше слабой сходимости $v_n \rightarrow u$ в $L_2(0, T; V^2)$ получим

$$\kappa \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (v_n)_i (\Delta v_n)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \rightarrow \kappa \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \Delta u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Далее, в виду оценки (37) пользуясь тем, что $\varepsilon \leq 1$, имеем

$$\varepsilon_n \|v'_n\|_{L_2(0,T;V^3)} \leq (\nu C_4 + C_6 C_{13}^2 + \kappa C_8) \left(\frac{2}{\kappa^2} C_{16} + 1 \right) + C_{12} \|f\|_{L_2(0,T;V^0)}.$$

Как и ранее, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{\varepsilon_n v'_n\}$ сходится слабо к некоторой функции w в $L_2(0, T; V^3)$. В смысле распределений на отрезке $[0, T]$ со значениями в V^{-3} эта последовательность сходится к нулю. Действительно, для любых $\chi \in \mathfrak{D}(0, T)$, $\varphi \in V^3$, используя формулу интегрирования по частям и тот факт, что v'_n слабо сходится в $L_2(0, T; V^1)$ к u' , следовательно, сходится к u' и в смысле распределений, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \varepsilon_n \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (\Delta v'_n) : \nabla \varphi dx \chi dt \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \left| \int_0^T \int_{\Omega} \Delta v'_n \Delta \varphi dx \chi dt \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (v'_n) : \nabla (\Delta \varphi) dx \chi dt \right| = \left| \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (u') : \nabla (\Delta \varphi) dx \chi dt \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела

$$\varepsilon_n \int_{\Omega} \nabla (\Delta v'_{\varepsilon_n}(t)) : \nabla \varphi dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Далее, из сильной сходимости $\{v_n\}$ в $C([0, T], V^1)$ к функции u следует поточечная сходимость и, следовательно, в виду выбора последовательности начальных условий $\{b_n\}$, получаем, что предельная функция $u(0) = a$.

Таким образом, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (39), (40), получим, что предельная функция $u \in W$ удовлетворяет интегральному равенству (5), начальному условию (6) и, значит, является слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Павловский В.А. *К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров*, ДАН СССР **200** (4), 809–812 (1971).
- [2] Амфилохий В.Б., Войткунский Я.И., Мазаева Н.П., Ходорковский Я.С. *Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений*, Тр. Ленинградск. кораблестроительного ин-та **96**, 3–9 (1975).
- [3] Амфилохий В.Б., Павловский В.А. *Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах*, Тр. Ленинградск. кораблестроительного ин-та **104**, 3–5 (1976).
- [4] Noll W., Truesdell C. *The nonlinear field theories of mechanics*. In: Handbuch der Physik (Flügge S., ed.) (Springer, Berlin, 1965).
- [5] Rivlin R.S., Ericksen J.L. *Stress-deformation relations for isotropic materials*, J. Rational Mechan. and Anal. **4**, 323–425 (1955).
- [6] Осколков А.П. *О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров*, Зап. научн. сем. ЛОМИ **38**, 98–136 (1973).
- [7] Осколков А.П. *О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости*, Зап. научн. сем. ЛОМИ **27**, 145–160 (1972).
- [8] Осколков А.П. *О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей*, Зап. научн. сем. ЛОМИ **52**, 128–157 (1975).
- [9] Ладыженская О.А. *О погрешностях в двух моих публикациях по уравнениям Навье–Стокса и их исправлениях*, Зап. научн. сем. ЛОМИ **271**, 151–155 (2000).
- [10] Звягин В.Г., Турбин М.В. *Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред* (КРАСАНД (URSS), М., 2012).
- [11] Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики* (Едиториал УРСС, М., 2004).
- [12] Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A. *Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics* (Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2008).
- [13] Звягин А.В. *О разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров*, Изв. вузов. Матем., № 2, 103–105 (2011).
- [14] Звягин А.В., Звягин В.Г., Поляков Д.М. *О разрешимости одной альфа-модели движения жидкости с памятью*, Изв. вузов. Матем., № 6, 78–84 (2018).
- [15] Темам Р. *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ* (Мир, М., 1981).
- [16] Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости* (ГИФМЛ, М., 1961).
- [17] Солонников В.А. *Оценки тензоров Грина для некоторых граничных задач*, ДАН СССР **130** (5), 988–991 (1960).
- [18] Ворович И.И., Юдович В.И. *Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости*, Матем. сб. **53** (4), 393–428 (1961).
- [19] Фурсиков А.В. *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения* (Научная книга, Новосибирск, 1999).
- [20] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения* (Мир, М., 1978).
- [21] Simon J. *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Mat. Pura Appl. **146**, 65–96 (1987).

Михаил Вячеславович Турбин

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: mrmike@mail.ru

Анастасия Сергеевна Устюжанинова

*Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,*

e-mail: nastyzhka@gmail.com

M.V. Turbin and A.S. Ustiuzhaninova

The existence theorem for a weak solution to initial-boundary value problem for system of equations describing the motion of weak aqueous polymer solutions

Abstract. In the paper we prove the existence of weak solutions for the initial-boundary value problem describing the motion of weakly concentrated aqueous solutions of polymers. The proof is based on the approximation-topological approach. At the first step we prove the operator equation which is equivalent to the weak formulation of the considered problem is approximated by another operator equation with good properties and the solvability of this equation. At the second step, the passage to the limit is made, i. e., it is shown that from a sequence of solutions one can extract a subsequence that converges weakly to the solution of the original problem as the parameter of approximation tends to zero.

Keywords: initial-boundary value problem, model of aqueous solutions of polymers, weak solution, approximation-topological approach, operator equation, a priori estimate, Leray–Schauder degree theory.

Mikhail Vyacheslavovich Turbin

*Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,*

e-mail: mrmike@mail.ru

Anastasiya Sergeevna Ustiuzhaninova

*Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,*

e-mail: nastyzhka@gmail.com