Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, Б. И. Голубов, Дробные модифицированные операторы Харди и Харди–Литтлвуда и их коммутаторы, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 9, 16–26

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-9-16-26>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 05:09:01

С.С. ВОЛОСИВЕЦ, Б.И. ГОЛУБОВ

ДРОБНЫЕ МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ХАРДИ И ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА И ИХ КОММУТАТОРЫ

Аннотация. Для модифицированных дробных операторов Харди и Харди–Литтлвуда и их коммутаторов с символом из пространства функций ограниченной центральной осцилляции мы изучаем условия их ограниченности из одного модифицированного пространства Герца в другое. Устанавливается точность результата, связанного с коммутаторами дробного оператора Харди–Литтлвуда.

Ключевые слова: модифицированные операторы Харди и Харди–Литтлвуда, коммутатор, модифицированное пространство Герца, пространство CMO^q .

УДК: 517.518

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-9-16-26

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность натуральных чисел таких, что $2 \leq p_n \leq N$, $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $p_{-n} = p_n$, $m_{-n} = m_n^{-1}$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in \mathbb{R}_+$ записывается в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n / m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_i), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

Здесь первая сумма конечна и для $x = l/m_k$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, мы выбираем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для $x \in [m_{n-1}, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, положим $|x|_{\mathbf{P}} = m_n$, а $|0|_{\mathbf{P}} = 0$, тогда $N^{-1}|x|_{\mathbf{P}} \leq x \leq |x|_{\mathbf{P}}$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. Для x, y , записанных в виде (1), по определению

$$x \oplus y = z := \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} z_n / m_n,$$

где $x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $z_n = x_n + y_n \pmod{p_n}$. В случае, когда $z_n = p_n - 1$ при $n \geq n_0$ (это возможно для счетного числа y при фиксированном x) считаем, что $x \oplus y$ не определено. Для функций из используемых ниже классов это не существенно. Аналогично определяется $x \ominus y$. Подробнее см. ([1], § 1.5).

Классические операторы Харди и Харди–Литтлвуда для функций f , определенных на $\mathbb{R}_+$, задаются формулами $\mathcal{H}(f)(x) = \int_x^\infty t^{-1} f(t) dt$ и $\mathcal{B}(f)(x) = x^{-1} \int_0^x f(t) dt$ соответственно.

Известно, что первый оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, а второй — в $L^p(\mathbb{R}_+)$ при $1 < p \leq \infty$ ([2], теоремы 327 и 328). В ряде работ изучались дробные операторы Харди и Харди–Литтлвуда (например, [3] и [4]).

Поступила в редакцию 11.08.2018, после доработки 11.08.2018. Принята к публикации 19.12.2018

Можно рассмотреть операторы $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)(x) = |x|_{\mathbf{P}}^{-1} \int_{|t|_{\mathbf{P}} \leq |x|_{\mathbf{P}}} f(t) dt$ и сопряженный к нему $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)(x) = \int_{|t|_{\mathbf{P}} \geq |x|_{\mathbf{P}}} |t|_{\mathbf{P}}^{-1} f(t) dt$, называемые модифицированными операторами Харди–Литтлвуда и Харди соответственно. В случае $p_i \equiv 2$ такие операторы ввел второй из авторов [5], [6], который доказал тождества типа Титчмарша для этих операторов и $\mathbf{P}$ -ичного преобразования Фурье, а также ограниченность $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ в двоичных пространствах BMO и VMO на полупрямой и ограниченность $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$ в двоичном пространстве Харди на $\mathbb{R}_+$. На случай произвольной ограниченной последовательности $\mathbf{P}$ эти результаты были перенесены первым автором [7]. Ряд свойств модифицированных операторов Харди–Литтлвуда и Харди в пространствах Гёльдера–Бесова, локальных пространствах bmo , vmo и Харди был установлен в работе [8]. Там же было установлено, что удобно изучать действие указанных модифицированных операторов в $\mathbf{P}$ -ичных пространствах Герца, в частности, оператор $\mathcal{B}(\mathbf{P}, f)$ ограничен в $K_r^{\alpha, q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+)$ при $\alpha < 1 - 1/r$ и это свойство нарушается при $\alpha = 1 - 1/r$, аналогичное свойство верно для $\mathcal{H}(\mathbf{P}, f)$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда по определению $|\mathbf{x}|_{\mathbf{P}} := \max(|x_1|_{\mathbf{P}}, \dots, |x_n|_{\mathbf{P}})$, $B_k(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_{\mathbf{P}} \leq m_k\}$ и $S_k(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_{\mathbf{P}} = m_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Через B_k и S_k обозначаем $B_k(\mathbf{0})$ и $S_k(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0}$ — нуль $\mathbb{R}^n$. Ясно, что $|B_k(\mathbf{a})| = m_k^n$ и $|S_k(\mathbf{a})| = m_k^n - m_{k-1}^n$, где $|\cdot|$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать дробные операторы типа Харди–Литтлвуда и Харди (при $0 \leq \beta \leq n$)

$$B_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} \int_{|t|_{\mathbf{P}} \leq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad H_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = \int_{|t|_{\mathbf{P}} \geq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} |t|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

и для $b \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+^N)$ их коммутаторы

$$B_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})B_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) - B_\beta(\mathbf{P}, bf)(\mathbf{x}),$$

$$H_{\beta, b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})H_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) - H_\beta(\mathbf{P}, bf)(\mathbf{x}).$$

Пусть для $f \in L^1(B_k(\mathbf{a}))$ по определению $f_{B_k(\mathbf{a})} = |B_k(\mathbf{a})|^{-1} \int_{B_k(\mathbf{a})} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$. Функция $f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq q < \infty$, принадлежит классу $CMO^q(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, если

$$\|f\|_{CMO^q} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(|B_k(\mathbf{0})|^{-1} \int_{B_k(\mathbf{0})} |f(\mathbf{t}) - f_{B_k(\mathbf{0})}|^q d\mathbf{t} \right)^{1/q} < \infty.$$

Классическое пространство $CMO^q(\mathbb{R}^n)$ было введено одновременно Й. Ченом и К. Лау [9] и Х. Гарсия-Куэрва [10], одними из первых предложили использовать его в задачах, связанных с коммутаторами, С. Лонг и Ж. Ванг [11].

Далее пусть X_E обозначает индикатор множества E . Для $\alpha \in \mathbb{R}$, $q, r \in (0, \infty)$ функция $f \in L_{loc}^r(\mathbb{R}_+^n)$ принадлежит пространству Герца $K_r^{\alpha, q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, если

$$\|f\|_{K_r^{\alpha, q}} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q} \|f X_{S_k}\|_r^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Здесь, как обычно, $\|f\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(\mathbf{t})|^r d\mathbf{t} \right)^{1/r}$ — норма или квазинорма в пространстве

$L^r(\mathbb{R}_+^n) = K_r^{0, r}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$. Пространство Герца было введено К. Герцем [12], а его модификация

для групп Виленкина, соответствующая нашему определению при $n = 1$, — К. Онневиром [13].

Рассмотрим весовую функцию $w(x)$, измеримую и почти всюду (п. в.) положительную на $\mathbb{R}_+^n$. Тогда $L_w^q(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq q < \infty$, состоит из функций с конечной нормой $\|f\|_{q,w} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(\mathbf{t})|^q w(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right)^{1/q}$.

Будем писать $A_i \asymp B_i$, если существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что $C_1 A_i \leq B_i \leq C_2 A_i$ для всех допустимых значений i .

Целью нашей работы является получение достаточных условий ограниченности операторов $B_\beta(\mathbf{P}, f)$ и $H_\beta(\mathbf{P}, f)$ (теорема 3) и их коммутаторов (теорема 1) из одного модифицированного пространства Герца в другое. Доказывается неумлучшаемость условия из теоремы 1 для коммутатора $B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)$ (теорема 2). В p -адическом случае некоторые близкие к данной работе результаты можно найти в статье Г. Гао и Й. Жонга [14].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. Пусть $1 \leq q < p < \infty$. Тогда $CMO^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n) \subset CMO^q(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ и при этом для $b \in CMO^p(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ имеем неравенство $\|b\|_{CMO^q} \leq \|b\|_{CMO^p}$.

Доказательство. По неравенству Гёльдера для любого B_k имеем

$$\left(|B_k|^{-1} \int_{B_k} |b(\mathbf{x}) - b_{B_k}|^q d\mathbf{x} \right)^{1/q} \leq \left(|B_k|^{-1} \int_{B_k} |b(\mathbf{x}) - b_{B_k}|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leq \|b\|_{CMO^p}.$$

Переходя в левой части последнего неравенства к точной верхней грани по $k \in \mathbb{Z}$, получаем оба утверждения леммы. $\square$

Лемма 2. Пусть $b \in CMO^1(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Тогда $|b_{B_j} - b_{B_k}| \leq N^n |k - j| \|b\|_{CMO^1}$, где $2 \leq p_i \leq N$, $i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $j < k$. В силу определения b_{B_i} имеем

$$\begin{aligned} |b_{B_i} - b_{B_{i+1}}| &= |B_i|^{-1} \left| \int_{B_i} (b(\mathbf{t}) - b_{B_{i+1}}) d\mathbf{t} \right| \leq \\ &\leq \left(\frac{m_{i+1}}{m_i} \right)^n m_{i+1}^{-n} \int_{B_{i+1}} |f(\mathbf{t}) - f_{B_{i+1}}| dt \leq N^n \|b\|_{CMO^1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Суммируя неравенства (2) по i от j до $k - 1$, получаем

$$|b_{B_j} - b_{B_k}| \leq \sum_{i=j}^{k-1} |b_{B_i} - b_{B_{i+1}}| \leq N^n |k - j| \|b\|_{CMO^1}, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $\beta \geq 0$, $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1 < r_1 < \infty$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$, $1/r_1 + 1/r'_1 = 1$, $\gamma = \max(r'_1, r_2)$ и $b \in CMO^\gamma(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$. Тогда

- 1) если $\alpha < n/r'_1$, то $\|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha,q_2}} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha,q_1}}$;
- 2) если $\alpha > -n/r_2$, то $\|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha,q_2}} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha,q_1}}$.

Доказательство. По определению имеем

$$\begin{aligned}
\|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} &= \int_{S_k} m_k^{r_2(\beta-n)} \left| \int_{B_k} [b(\mathbf{x}) - b(\mathbf{t})] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right|^{r_2} d\mathbf{x} \leq \\
&\leq m_k^{r_2(\beta-n)} \int_{S_k} \left(\sum_{j=-\infty}^k \int_{S_j} |f(\mathbf{t})| |b(\mathbf{t}) - b_{B_k} + b_{B_k} - b(\mathbf{x})| d\mathbf{t} \right)^{r_2} d\mathbf{x} \leq \\
&\leq 2^{r_2-1} m_k^{r_2(\beta-n)} \int_{S_k} \left(\sum_{j=-\infty}^k \int_{S_j} |f(\mathbf{t})| |b(\mathbf{t}) - b_{B_k}| d\mathbf{t} \right)^{r_2} d\mathbf{x} + \\
&\quad + 2^{r_2-1} m_k^{r_2(\beta-n)} \int_{S_k} \left(\sum_{j=-\infty}^k \int_{S_j} |f(\mathbf{t})| |b(\mathbf{x}) - b_{B_k}| d\mathbf{t} \right)^{r_2} d\mathbf{x} =: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Обозначим fX_{S_j} через f_j . Так как $|b(\mathbf{x}) - b_{B_k}|$ не зависит от t и по неравенству Гёльдера $\|f_j\|_1 \leq \|f_j\|_{r_1} (m_j^n - m_{j-1}^n)^{1/r'_1}$, то

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq C_1 m_k^{r_2(\beta-n)} m_k^{-n} \int_{S_k} |b(\mathbf{x}) - b_{B_k}|^{r_2} d\mathbf{x} m_k^n \left(\sum_{j=-\infty}^k m_j^{n/r'_1} \|f_j\|_{r_1} \right)^{r_2} \leq \\
&\leq C_1 \|b\|_{CMO^{r_2}}^{r_2} \left(\sum_{j=-\infty}^k (m_j/m_k)^{n/r'_1} \|f_j\|_{r_1} \right)^{r_2}, \quad (3)
\end{aligned}$$

поскольку в силу условия

$$\beta - n + n/r_2 = n(\beta/n - 1/r_1 - 1/r'_1 + 1/r_2) = -n/r'_1. \quad (4)$$

Для I_1 по лемме 2 и неравенству Гёльдера для интегралов имеем

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C_1 m_k^{r_2(\beta-n)} \int_{S_k} \left(\sum_{j=-\infty}^k \int_{S_j} |f(\mathbf{t})| (|b(\mathbf{t}) - b_{B_j}| + |b_{B_j} - b_{B_k}|) d\mathbf{t} \right)^{r_2} d\mathbf{x} \leq \\
&\leq C_2 m_k^{r_2(\beta-n)} |S_k| \left(\sum_{j=-\infty}^k \left(\int_{S_j} |f(\mathbf{t})|^{r_1} d\mathbf{t} \right)^{1/r_1} \left(m_j^{-n} \int_{B_j} |b(\mathbf{t}) - b_{B_j}|^{r'_1} d\mathbf{t} \right)^{1/r'_1} m_j^{n/r'_1} \right)^{r_2} d\mathbf{x} + \\
&\quad + C_2 m_k^{r_2(\beta-n)} |S_k| \|b\|_{CMO^1}^{r_2} \left(\sum_{j=-\infty}^k (k-j) \left(\int_{S_j} |f(\mathbf{t})|^{r_1} d\mathbf{t} \right)^{1/r_1} m_j^{n/r'_1} \right)^{r_2} d\mathbf{x} =: I_{11} + I_{12}.
\end{aligned}$$

Для I_{11} в силу (4) получаем оценку

$$\begin{aligned}
I_{11} &\leq C_2 m_k^{-nr_2/r'_1} \|b\|_{CMO^{r'_1}}^{r_2} \left(\sum_{j=-\infty}^k \|f_j\|_{r_1} m_j^{n/r'_1} \right)^{r_2} = \\
&= C_2 \|b\|_{CMO^{r'_1}}^{r_2} \left(\sum_{j=-\infty}^k \|f_j\|_{r_1} (m_j/m_k)^{n/r'_1} \right)^{r_2}, \quad (5)
\end{aligned}$$

а для I_{12} соответственно

$$I_{12} \leq C_3 \|b\|_{CMO^1}^{r_2} \left(\sum_{j=-\infty}^k (k-j) \|f_j\|_{r_1} (m_j/m_k)^{n/r'_1} \right)^{r_2}. \quad (6)$$

Из (3), (5) и (6) следует

$$\|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f) X_{S_k}\|_{r_2} \leq C_4 \|b\|_{CMO^\gamma} \sum_{j=-\infty}^k (k-j) \|f_j\|_{r_1} (m_j/m_k)^{n/r'_1},$$

откуда в силу неравенства Иенсена вида $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где $a_k \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q_2} \|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f) X_{S_k}\|_{r_2}^{q_2} \right)^{1/q_2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q_1} \|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f) X_{S_k}\|_{r_2}^{q_1} \right)^{1/q_1} \leq \\ &\leq C_4 \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \left(\sum_{j=-\infty}^k (k-j) \|f_j\|_{r_1} (m_j/m_k)^{n/r'_1} \right)^{q_1} \right]^{1/q_1}. \quad (7) \end{aligned}$$

Для $0 < q_1 \leq 1$ используем снова неравенство Иенсена (согласно условию $n/r'_1 - \alpha = \delta > 0$):

$$\begin{aligned} \|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}}^{q_1} &\leq C_4^{q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q_1} \left(\sum_{j=-\infty}^k (k-j) \|f_j\|_{r_1} (m_j/m_k)^{n/r'_1} \right)^{q_1} \leq \\ &\leq C_4^{q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-\infty}^k m_j^\alpha (k-j) \|f_j\|_{r_1} (m_j/m_k)^{n/r'_1 - \alpha} \right)^{q_1} \leq \\ &\leq C_5 \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-\infty}^k m_j^{\alpha q_1} (k-j)^{q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} (m_j/m_k)^{q_1(n/r'_1 - \alpha)} = \\ &= C_5 \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=j}^{\infty} (m_j/m_k)^{q_1(n/r'_1 - \alpha)} (k-j)^{q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} \leq \\ &\leq C_5 \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{l=0}^{\infty} l^{q_1} 2^{-l q_1(n/r'_1 - \alpha)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_j^{\alpha q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} = C_6 \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}^{q_1}. \quad (8) \end{aligned}$$

В последнем неравенстве из (8) использована замена $l = k - j$ и неравенство $m_j/m_k \leq 2^{j-k}$ при $j \leq k$. При $q_1 > 1$ применяем неравенство Гёльдера к преобразованной внутренней

сумме из (7) (при этом обозначим $n/r'_1 - \alpha > 0$ через δ):

$$\begin{aligned} \|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}}^{q_1} &\leq C_4^{q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=-\infty}^k m_j^\alpha (k-j)(m_j/m_k)^\delta \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_1} \leq \\ &\leq C_4^{q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-\infty}^k m_j^{\alpha q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} (m_j/m_k)^{\delta q_1/2} \left(\sum_{j=-\infty}^k (k-j)^{q'_1} (m_j/m_k)^{\delta q'_1/2} \right)^{q_1/q'_1} \leq \\ &\leq C_4^{q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=j}^\infty 2^{(j-k)q_1 \delta/2} m_j^{\alpha q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} \left(\sum_{l=0}^\infty l^{q'_1} 2^{-l q'_1 \delta/2} \right)^{q_1-1} = C_7 \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}^{q_1}. \end{aligned}$$

Первое неравенство теоремы доказано.

2) По определению

$$\begin{aligned} \|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} &= \int_{S_k} \left| \int_{|\mathbf{t}|_{\mathbf{P}} \geq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} |\mathbf{t}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} f(\mathbf{t})(b(\mathbf{x}) - b(\mathbf{t})) d\mathbf{t} \right|^{r_2} d\mathbf{x} \leq \\ &\leq \int_{S_k} \left(\sum_{j=k}^\infty \int_{S_j} m_j^{\beta-n} |f(\mathbf{t})| |b(\mathbf{x}) - b(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right)^{r_2} d\mathbf{x} \leq \\ &\leq 2^{r_2-1} \int_{S_k} \left(\sum_{j=k}^\infty \int_{S_j} m_j^{\beta-n} |f(\mathbf{t})| |b(\mathbf{x}) - b_{B_k}| d\mathbf{t} \right)^{r_2} d\mathbf{x} + \\ &\quad + 2^{r_2-1} \int_{S_k} \left(\sum_{j=k}^\infty \int_{S_j} m_j^{\beta-n} |f(\mathbf{t})| |b(\mathbf{t}) - b_{B_k}| d\mathbf{t} \right)^{r_2} d\mathbf{x} = I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Аналогично доказательству 1) с помощью неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} I_3 &= 2^{r_2-1} \int_{S_k} |b(\mathbf{x}) - b_{B_k}|^{r_2} d\mathbf{x} \left(\sum_{j=k}^\infty m_j^{\beta-n} \int_{S_j} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right)^{r_2} \leq \\ &\leq 2^{r_2-1} m_k^n \left(|B_k|^{-1} \int_{B_k} |b(\mathbf{x}) - b_{B_k}|^{r_2} d\mathbf{x} \right) \left(\sum_{j=k}^\infty m_j^{\beta-n+n/r'_1} \|f_j\|_{r_1} \right)^{r_2} \leq \\ &\leq 2^{r_2-1} \|b\|_{CMO^{r_2}}^{r_2} \left(\sum_{j=k}^\infty (m_k/m_j)^{n/r_2} \|f_j\|_{r_1} \right)^{r_2}. \quad (9) \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу леммы 2 и неравенства Гёльдера находим

$$\begin{aligned} I_4 &\leq 2^{r_2-1} |B_k| \left(\sum_{j=k}^\infty \int_{S_j} m_j^{\beta-n} |f(\mathbf{t})| [|b(\mathbf{t}) - b_{B_j}| + |b_{B_j} - b_{B_k}|] d\mathbf{t} \right)^{r_2} \leq \\ &\leq C_8 m_k^n \left(\sum_{j=k}^\infty m_j^{\beta-n} \left(\int_{S_j} |f(\mathbf{t})|^{r_1} d\mathbf{t} \right)^{1/r_1} \left(\int_{S_j} |b(\mathbf{t}) - b_{B_j}|^{r'_1} d\mathbf{t} \right)^{1/r'_1} \right)^{r_2} + \end{aligned}$$

$$+C_8 m_k^n \|b\|_{CMO^1}^{r_2} \left(\sum_{j=k}^{\infty} m_j^{\beta-n} (j-k) \|f_j\|_{r_1} m^{n/r'_1} \right)^{r_2} = I_{41} + I_{42}. \quad (10)$$

Пользуясь определением пространства $CMO^{r'_1}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$, видим, что

$$\begin{aligned} I_{41} &\leq C_8 m_k^n \left(\sum_{j=k}^{\infty} m_j^{\beta-n+n/r'_1} \|f_j\|_{r_1} \left(|B_j|^{-1} \int_{B_j} |b(\mathbf{t}) - b_{B_j}|^{r'_1} d\mathbf{t} \right)^{1/r'_1} \right)^{r_2} \leq \\ &\leq C_8 \left(\sum_{j=k}^{\infty} (m_k/m_j)^{n/r_2} \|f_j\|_{r_1} \right)^{r_2} \|b\|_{CMO^{r'_1}}^{r_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Наконец,

$$I_{42} \leq C_8 \|b\|_{CMO^1}^{r_2} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (m_k/m_j)^{n/r_2} (j-k) \|f_j\|_{r_1} \right)^{r_2}. \quad (12)$$

Из оценок (9)–(12) и леммы 1 вытекает неравенство

$$\|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f) X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} \leq C_9 \|b\|_{CMO^\gamma}^{r_2} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (j-k) (m_k/m_j)^{n/r_2} \|f_j\|_{r_1} \right)^{r_2},$$

откуда с помощью неравенства Иенсена находим, что

$$\begin{aligned} \|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}}^{q_1} &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q_2} \|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f) X_{S_k}\|_{r_2}^{q_2} \right)^{1/q_2} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q_1} \|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f) X_{S_k}\|_{r_2}^{q_1} \right)^{1/q_1} \leq \\ &\leq C_{10} \|b\|_{CMO^\gamma} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k^{\alpha q_1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (m_k/m_j)^{n/r_2} (j-k) \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_1} \right)^{1/q_1}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Иенсена и замену $l = j - k$, при $0 < q_1 \leq 1$ получаем

$$\begin{aligned} \|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}}^{q_1} &\leq C_{10}^{q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=k}^{\infty} m_k^{\alpha q_1} (m_k/m_j)^{q_1 n/r_2} (j-k)^{q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} \leq \\ &\leq C_{10}^{q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^j (m_k/m_j)^{n q_1/r_2 + \alpha q_1} (j-k)^{q_1} m_j^{\alpha q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} \leq C_{11} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}^{q_1}, \end{aligned}$$

где $C_{11} = C_{10}^{q_1} \sum_{l=0}^{\infty} l^{q_1} 2^{-q_1 l(n/r_2 + \alpha)}$ и по условию $n/r_2 + \alpha > 0$. Обозначая $n/r_2 + \alpha$ через δ , при $q_1 > 1$ с помощью неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}
\|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha,q_2}}^{q_1} &\leq C_{10}^{q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=k}^{\infty} m_j^\alpha (k-j) (m_k/m_j)^\delta \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_1} \leq \\
&\leq C_{10}^{q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=k}^{\infty} m_j^{\alpha q_1} (m_k/m_j)^{\delta q_1/2} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (k-j)^{q'_1} (m_k/m_j)^{\delta q'_1/2} \right)^{q_1/q'_1} \leq \\
&\leq C_{10}^{q_1} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} l^{q'_1} 2^{-l\delta q'_1/2} \right)^{q_1-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_j^{\alpha q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\delta q_1/2} = C_{12} \|b\|_{CMO^\gamma}^{q_1} \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha,q_1}}^{q_1}. \quad \square
\end{aligned}$$

Докажем неулучшаемость условия $b \in CMO^\gamma(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ в первой части теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$ и $1 < r'_1 < r < r_2$ (т. е. $\gamma = r_2$ в обозначениях теоремы 1) и выполняются другие условия теоремы 1. Тогда существуют $b \in CMO^r(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n) \setminus CMO^{r_2}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ и $f \in K_{r_1}^{\alpha,q_1}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ такие, что $B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f) \notin K_{r_2}^{\alpha,q_2}$.

Доказательство. Пусть

$$D_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j < m_i + 1, 1 \leq j \leq n\} \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j < m_i, 1 \leq j \leq n\},$$

$$b(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} m_{j+1}^{1/r} X_{D_j}(\mathbf{x}), \quad f(x) = \{|\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{n+\alpha r_1} (\log_2 |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}})^m\}^{-1/r_1} X_{D_0},$$

где $D_0 = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}} \geq m_1\} \setminus \cup_{j=1}^{\infty} D_j$, $m \in \mathbb{N}$, $m q_1/r_1 > 1$. Ясно, что $|D_i| \asymp m_i^{n-1}$ и $f X_{S_j} = 0$ при $j \leq 0$, а при $j \geq 2$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\|f X_{S_j}\|_{r_1}^{q_1} &= \left(\int_{S_j \setminus D_{j-1}} |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{-n-\alpha r_1} (\log_2 |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}})^{-m} d\mathbf{x} \right)^{q_1/r_1} \leq \\
&\leq (m_j^n m_j^{-n-\alpha r_1} (\log_2 m_j)^{-m})^{q_1/r_1} \leq m_j^{-\alpha q_1} j^{-m q_1/r_1}.
\end{aligned}$$

Поэтому в силу условия $m q_1/r_1 > 1$ имеем

$$\|f\|_{K_{r_1}^{\alpha,q_1}}^{q_1} \leq m_1^{\alpha q_1} \|f X_{S_1}\|_{r_1}^{q_1} + \sum_{j=2}^{\infty} j^{-m q_1/r_1} < \infty.$$

Так как носители b и f не перекрываются, то $B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)(x) = b(x) B_{\beta}(\mathbf{P}, f)(x)$. Для $x \in D_i \subset S_{i+1}$, $i \geq 1$, в силу неравенства $m_i \leq N^i$ имеем

$$\begin{aligned}
B_{\beta}(\mathbf{P}, f)(x) &= m_{i+1}^{\beta-n} \int_{B_{i+1}} m_{i+1}^{-n/r_1-\alpha} (\log_2 m_{i+1})^{-m/r_1} X_{D_0}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \geq \\
&\geq C_1 m_{i+1}^{\beta-n-n/r_1-\alpha} (i+1)^{-m/r_1} |S_{i+1} \setminus D_i| \geq C_2 m_{i+1}^{\beta-n/r_1-\alpha} (i+1)^{-m/r_1}.
\end{aligned}$$

Поэтому в силу равенства $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$ получаем

$$\begin{aligned}
\|b B_{\beta}(\mathbf{P}, f) X_{S_{i+1}}\|_{r_2}^{q_2} &\geq C_2^{q_2} (m_{i+1}^{\beta-n/r_1-\alpha} (i+1)^{-m/r_1} m_{i+1}^{1/r})^{q_2} |D_i|^{q_2/r_2} \geq \\
&\geq C_3 m_{i+1}^{-q_2(\alpha+n/r_2)} m_{i+1}^{q_2/r} m_{i+1}^{q_2 n/r_2 - q_2/r_2} (i+1)^{-q_2 m/r_1} = C_3 m_{i+1}^{-q_2 \alpha} m_{i+1}^{q_2(1/r-1/r_2)} (i+1)^{-q_2 m/r_1}
\end{aligned}$$

и

$$\|bB_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}}^{q_2} \geq \sum_{i=1}^{\infty} m_{i+1}^{q_2 \alpha} \|bB_\beta(\mathbf{P}, f)X_{S_{i+1}}\|_{r_2}^{q_2} \geq C_3 \sum_{i=1}^{\infty} m_{i+1}^{q_2(1/r-1/r_2)} (i+1)^{-q_2 m/r_1} = \infty.$$

Покажем теперь, что $b \in CMO^r(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n) \setminus CMO^{r_2}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$. Пусть $x \in B_{i+1}$, $i \geq 1$. Тогда

$$b_{B_{i+1}} = m_{i+1}^{-n} \sum_{j=1}^i m_j^{1/r} [(m_j + 1)^n - m_j^n] \asymp m_{i+1}^{-n} \sum_{j=1}^i m_j^{n-1+1/r} \asymp m_{i+1}^{1/r-1}$$

и $b(x) - b_{B_{i+1}} = -b_{B_{i+1}}$ на $B_{i+1} \setminus \bigcup_{j=1}^i D_j$. Соответственно на D_j , $1 \leq j \leq i$, имеем $b(x) - b_{B_{i+1}} = m_j^{1/r} - b_{B_{i+1}}$. Поэтому в силу неравенства треугольника в $L^{r_2}(\mathbb{R}_+^n)$ получаем

$$\begin{aligned} \left(|B_{i+1}|^{-1} \int_{B_{i+1}} |b(\mathbf{x}) - b_{B_{i+1}}|^{r_2} d\mathbf{x} \right)^{1/r_2} &\geq \left(|B_{i+1}|^{-1} \int_{B_{i+1}} |b(\mathbf{x})|^{r_2} d\mathbf{x} \right)^{1/r_2} - |b_{B_{i+1}}| \geq \\ &\geq \left(m_{i+1}^{-n} \sum_{j=1}^i C_4 m_j^{r_2/r} m_j^{n-1} \right)^{1/r_2} - |b_{B_{i+1}}| \geq C_5 m_i^{1/r-1/r_2} - C_6 m_{i+1}^{1/r-1} \rightarrow +\infty, \quad i \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \left(|B_{i+1}|^{-1} \int_{B_{i+1}} |b(\mathbf{x}) - b_{B_{i+1}}|^r d\mathbf{x} \right)^{1/r} &\leq |b_{B_{i+1}}| + C_7 \left(m_{i+1}^{-n} \sum_{j=1}^i m_j^{r/r} m_j^{n-1} \right)^{1/r} \leq \\ &\leq C_8 (m_{i+1}^{1/r-1} + i/m_{i+1}) \leq C_9 < \infty. \end{aligned}$$

В результате $b \in CMO^r(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ и $b \notin CMO^{r_2}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$. $\square$

Поскольку $K_q^{0,q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n) = L^q(\mathbb{R}_+^n)$, приведем следствие из теоремы 1 для этого случая.

Следствие 1. Пусть $0 \leq \beta < n$, $1 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1/q_1 - 1/q_2 = \beta/n$, $1/q_i + 1/q'_i = 1$, $i = 1, 2$, $\gamma = \max(q'_1, q'_2)$. Тогда для $b \in CMO^\gamma(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ справедливы неравенства

$$\|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q_2} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{q_1}, \quad \|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q_2} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{q_1}.$$

Замечание. Так как $K_q^{\alpha/q,q}(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n) = L_{w_\alpha}^q(\mathbb{R}_+^n)$, где $w_\alpha(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^\alpha$, то для соблюдения условий теоремы 1 требуется равенство $\alpha/q_1 = \alpha/q_2$, т.е. $q_1 = q_2 = q$ и в этом случае $\beta = 0$. Поэтому из теоремы 1 вытекает

Следствие 2. Пусть $1 < q < \infty$, $1/q + 1/q' = 1$, $\gamma = \max(q', q)$. Тогда для $b \in CMO^\gamma(\mathbf{P}, \mathbb{R}_+^n)$ справедливы неравенства

- 1) $\|B_{0,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q, w_\alpha} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{q, w_\alpha}$, $\alpha < n(q-1)$;
- 2) $\|H_{0,b}(\mathbf{P}, f)\|_{q, w_\alpha} \leq C \|b\|_{CMO^\gamma} \|f\|_{q, w_\alpha}$, $\alpha > -n$.

Действительно, неравенство $\alpha/q < n/q'$ равносильно условию $\alpha < n(q-1)$, откуда по теореме 1 вытекает утверждение п. 1) следствия. Аналогично, неравенство $\alpha/q > -n/q$ равносильно условию $\alpha > -n$, откуда вытекает утверждение п. 2) следствия.

Для самих операторов $B_\beta(\mathbf{P}, f)$ и $H_\beta(\mathbf{P}, f)$ справедлив аналог теоремы 1, доказываемый тем же методом.

Теорема 3. Пусть $\beta \geq 0$, $0 < q_1 \leq q_2 < \infty$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$, $1 < r_1 < \infty$, $1/r_i + 1/r'_i = 1$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы неравенства

- 1) $\|B_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}} \leq C\|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}, \alpha < n/r_1';$
- 2) $\|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}} \leq C\|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}, \alpha > -n/r_2.$

Доказательство. 2) По определению и неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \|H_\beta(\mathbf{P}, f)X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} &= \int_{S_k} \left| \int_{|\mathbf{t}|_{\mathbf{P}} \geq |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} |\mathbf{t}|_{\mathbf{P}}^{\beta-n} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right|^{r_2} d\mathbf{x} = \\ &= \int_{S_k} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \int_{S_j} m_j^{\beta-n} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \right)^{r_2} d\mathbf{x} \leq m_k^n \left(\sum_{j=k}^{\infty} m_j^{\beta-n+n/r_1'} \|f_j\|_{r_1} \right)^{r_2}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условия $\beta - n/r_1 = -n/r_2$ получаем

$$\|H_\beta(\mathbf{P}, f)X_{S_k}\|_{r_2}^{r_2} \leq \left(\sum_{j=k}^{\infty} (m_k/m_j)^{n/r_2} \|f_j\|_{r_1} \right)^{r_2}.$$

Используя неравенство Иенсена (7) и неравенство $\delta = n/r_2 + \alpha > 0$, при $0 < q_1 \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}}^{q_1} &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=k}^{\infty} m_k^{\alpha q_1} (m_k/m_j)^{q_1 n/r_2} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^j (m_k/m_j)^{nq_1/r_2 + \alpha q_1} m_j^{\alpha q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} \leq C_1 \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_j^{\alpha q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} = C_1 \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}^{q_1}. \end{aligned}$$

Аналогично, при $q_1 > 1$ с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} \|H_\beta(\mathbf{P}, f)\|_{K_{r_2}^{\alpha, q_2}}^{q_1} &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=k}^{\infty} m_j^{\alpha} (m_k/m_j)^{\delta/2 + \delta/2} \|f_j\|_{r_1} \right)^{q_1} \leq \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=k}^{\infty} m_j^{\alpha q_1} (m_k/m_j)^{\delta q_1/2} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} \left(\sum_{j=k}^{\infty} (m_k/m_j)^{\delta q_1'/2} \right)^{q_1/q_1'} \leq \\ &\leq \left(\sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\delta q_1'/2} \right)^{q_1-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_j^{\alpha q_1} \|f_j\|_{r_1}^{q_1} \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l\delta q_1/2} = C_2 \|f\|_{K_{r_1}^{\alpha, q_1}}^{q_1}. \end{aligned}$$

Тем самым, утверждение п. 2) теоремы 3 доказано. Утверждение п. 1) доказывается аналогично.

Авторы выражают признательность рецензенту, чьи замечания позволили улучшить текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша* (Наука, М., 1987).
- [2] Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. *Неравенства* (ИЛ, М., 1948; 2-е изд.: Ком. кн., М., 2006).
- [3] Andersen K.F., Muckenhoupt B. *Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions*, Studia Math. **72** (1), 9–26 (1982).
- [4] Волосивец С.С. *Тождества типа Титчмарша для обобщенных операторов Харди и Харди-Литтлвуда*, Изв. Саратовск. ун-та, Сер. матем., механ., информатика **13** (1), ч. 2, 28–33 (2013).
- [5] Голубов Б.И. *О двоичных аналогах операторов Харди и Харди-Литтлвуда*, Сиб. матем. журн. **40** (6), 1244–1252 (1999).

- [6] Голубов Б.И. *Об ограниченности двоичных операторов Харди и Харди–Литтлвуда в двоичных пространствах H и BMO* , Anal. Math. **26** (4), 287–298 (2000).
- [7] Volosivets S.S. *On P -adic analogs of Hardy and Hardy–Littlewood operators*, East J. Approx. **11** (1), 57–72 (2005).
- [8] Волосивец С.С. *Модифицированные операторы Харди и Харди–Литтлвуда и их поведение в различных пространствах*, Изв. РАН. Сер. матем. **75** (1), 29–52 (2011).
- [9] Chen Y.Z., Lau K.S. *Some new classes of Hardy spaces*, J. Funct. Anal. **84** (2), 255–278 (1989).
- [10] Garcia-Cuerva J. *Hardy spaces and Beurling algebras*, J. London Math. Soc. **39** (3), 499–513 (1989).
- [11] Long S., Wang J. *Commutators of Hardy operators*, J. Math. Anal. Appl. **274** (2), 626–644 (2002).
- [12] Herz C. *Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms*, J. Math. Mech. **18** (4), 283–324 (1968).
- [13] Onneweer C.W. *Generalized Lipschitz spaces and Herz spaces on certain totally disconnected groups*, Martingale theory in harmonic analysis and Banach spaces, Lect. Notes in Math., **939** (Springer, Berlin, 1981), 106–121.
- [14] Gao G., Zhong Y. *Some estimates of Hardy operators and their commutators on Morrey–Herz spaces*, J. Math. Ineq. **11** (1), 49–58 (2017).

Сергей Сергеевич Волосивец

Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,

e-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Борис Иванович Голубов

Московский физико-технический институт,
Институтский пер., д. 9., Московская обл., г. Долгопрудный, 141700, Россия,

e-mail: golubov@mail.mipt.ru

S.S. Volosivets and B.I. Golubov

Fractional modified Hardy and Hardy–Littlewood operators and their commutators

Abstract. For modified fractional Hardy and Hardy–Littlewood operators and its commutators with symbol from a central mean oscillation space we study conditions for its boundedness from one modified Herz space to another. The sharpness of the result concerning commutators of fractional Hardy–Littlewood operator is established.

Keywords: modified Hardy and Hardy–Littlewood operators, commutator, modified Herz space, CMO^q space.

Sergei Sergeevich Volosivets

Saratov State University,
83 Astrahanskaya str., Saratov, 410012 Russia,

e-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Boris Ivanovich Golubov

National Engineering Physics Institute,
9 Institutskii per., Moscow region, Dolgoprudny, 141700 Russia,

e-mail: golubov@mail.mipt.ru