Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Л. Иванков, О линейной независимости продифференцированных по параметру функций и их значений, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 9, 27–36

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-9-27-36>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:07:23

П.Л. ИВАНКОВ

О ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ПО ПАРАМЕТРУ ФУНКЦИЙ И ИХ ЗНАЧЕНИЙ

Аннотация. Рассматриваются гипергеометрические функции, а также их производные (в том числе и по параметру). Для таких функций доказываются теоремы об их линейной независимости над полем рациональных дробей. При этом применяется метод, специально разработанный для решения данной задачи. Доказанные теоремы используются затем для исследования арифметических свойств значений указанных функций с помощью модифицированного метода Зигеля.

Для получения результатов об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций часто приходится предварительно устанавливать линейную независимость этих функций над полем рациональных дробей. В случае отсутствия производных по параметру известны теоремы, содержащие необходимые и достаточные условия упомянутой линейной независимости. Для продифференцированных по параметру функций опубликованы многочисленные теоремы, касающиеся их алгебраической независимости. Однако эти теоремы не позволяют установить линейную независимость функций, рассматриваемых в данной работе.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, линейная независимость, дифференцирование по параметру.

УДК: 511.361

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-9-27-36

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время опубликовано достаточно много результатов, относящихся к арифметическим свойствам значений продифференцированных по параметру обобщенных гипергеометрических функций. Предложено несколько вариантов эффективного построения аппроксимаций Паде для таких функций (например, [1]–[3]). При этом развитие данного направления исследований сдерживается отсутствием условий линейной независимости указанных функций над полем рациональных дробей. Опубликованные на настоящий момент результаты либо относятся к не продифференцированным по параметру функциям, либо дают достаточные условия алгебраической независимости для функций частного вида (см., например, [4]–[6], а также [7], замечания к гл. 7). Поэтому актуальным является проведенное в настоящей статье исследование вопроса о линейной независимости продифференцированных по параметру функций в достаточно общей ситуации.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть

$$b_1(x), \dots, b_t(x) \quad (1)$$

— многочлены, среди которых могут быть и тождественно равные единице, и пусть при $m_k > 0$, $1 \leq k \leq t$,

$$b_k(x) = (x + \beta_{k1}) \dots (x + \beta_{km_k}), \quad (2)$$

где $\beta_{k1}, \dots, \beta_{km_k}$ — вещественные числа. Пусть далее даны вещественные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ и ненулевые комплексные числа $\omega_1, \dots, \omega_t$. Рассмотрим функции

$$F_{k0j_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \omega_k^{\nu} \nu^{j_k-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)b_k(x)(\lambda_k + x)}, \quad (3)$$

а также функции, полученные из них дифференцированием по параметру λ_k :

$$F_{klj_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \omega_k^{\nu} \nu^{j_k-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)b_k(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_k + x},$$

$$k = 1, \dots, t, \quad j_k = 1, \dots, u_k, \quad u_k = \deg b(x)b_k(x) + 1, \quad l_k = 1, \dots, \tau_k - 1,$$

$\tau_1, \dots, \tau_k$ — произвольные натуральные числа, а $b(x)$ — многочлен из кольца $\mathbb{C}[x]$, старший коэффициент которого равен единице. При этом будем считать, что

$$\prod_{k=1}^t b(x)b_k(x)(\lambda_k + x) \neq 0 \quad \text{при } x = 1, 2, \dots$$

Теорема 1. Пусть выполняются все перечисленные выше условия, и пусть $\vartheta_k = \beta_{k1} + \dots + \beta_{km_k} + \lambda_k$, причем если $b_k(x) \equiv 1$, то положим $\vartheta_k = \lambda_k$. Тогда для линейной независимости функций

$$1, F_{klj_k}(z), \quad k = 1, \dots, t, \quad j_k = 1, \dots, u_k, \quad l_k = 0, 1, \dots, \tau_k - 1, \quad (4)$$

над полем рациональных дробей достаточно потребовать, чтобы для любых различных индексов k_1 и k_2 и для любого числа $C \in \mathbb{Z}$ упорядоченные пары $(\omega_{k_1}, \vartheta_{k_1} + C)$ и $(\omega_{k_2}, \vartheta_{k_2})$ были различны.

Другая теорема о линейной независимости продифференцированных по параметру гипергеометрических функций доказана в [8]. При $\tau_1 = \dots = \tau_k = 1$ утверждение теоремы 1 вытекает из результатов работ [9], [10], в которых задаются (в случае отсутствия дифференцирований по параметру) необходимые и достаточные условия линейной независимости над $\mathbb{C}(z)$ гипергеометрических функций общего вида. Если попытаться применить теорему 1 к функциям

$$F_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\beta_k + x)(\lambda_k + x)}, \quad j, k = 1, 2, \quad (5)$$

при $\beta_1 = \frac{1}{5}$, $\lambda_1 = \frac{4}{5}$, $\beta_2 = \frac{2}{5}$, $\lambda_2 = \frac{3}{5}$, то ничего не получится: упорядоченные пары, о которых идет речь в упомянутой теореме, имеют вид $(1, 1 + C)$ и $(1, 1)$. Такие пары не позволяют сделать вывод о линейной независимости функций (5). С другой стороны, с помощью теорем из работ [9], [10] линейная независимость этих функций (вместе с функцией, тождественно равной единице, над $\mathbb{C}(z)$) устанавливается без труда. Если, однако, изменить параметры β_k , положив, например, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, а λ_1 и λ_2 оставить прежними и к функциям (5)

добавить некоторое количество новых функций, полученных из них дифференцированием по параметру, т. е. функций

$$F_{klkj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\beta_k + x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\lambda_k + x)}, \quad l_k = 1, \dots, \tau_k, \quad j, k = 1, 2,$$

где τ_1 и τ_2 — любые натуральные числа, то получим совокупность функций, которая по теореме 1 линейно независима над полем рациональных дробей, и к которой нельзя применить теоремы из упомянутых выше работ [9] и [10]. С помощью сформулированной ниже теоремы 3 можно затем исследовать вопрос о линейной независимости значений этих функций.

В частном случае, когда все многочлены (1) тождественно равны единице, справедлива

Теорема 2. Пусть $b_1(x) = \dots = b_t(x) = 1$. Тогда условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для линейной независимости над полем рациональных дробей функций (4).

Необходимость здесь следует из ([9], теорема 1), причем при нарушении условий теоремы 2 линейно зависимыми будут уже соответствующие не продифференцированные по параметру функции.

Применительно к рассматриваемому случаю можно переформулировать и другие теоремы из [9]. Приведем лишь один результат такого рода.

Пусть $\mathbb{I}$ — поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ или мнимое квадратичное поле, $b_k(x)$, $k = 1, \dots, t$, и $b(x) \in \mathbb{I}[x]$ — многочлены, старшие коэффициенты которых равны единице. Будем считать, что степени многочленов $b_k(x)$ не зависят от k , а их корни так же, как и числа $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ рациональны; относительно $\omega_1, \dots, \omega_t$ предположим, что это ненулевые числа из $\mathbb{I}$. Рассмотрим функции

$$\psi_{klkj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^{j-1} \omega_k^{\nu} z^{\nu}}{\prod_{x=1}^{\nu} b(x) b_k(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x + \lambda_k}, \quad (6)$$

$$k = 1, \dots, t, \quad l_k = 0, 1, \dots, \tau_k - 1, \quad j = 1, \dots, u, \quad u = \deg b(x) b_k(x) + 1.$$

Теорема 3. Пусть функции (6) линейно независимы над полем рациональных дробей. Тогда числа

$$1, \psi_{klkj}(1), \quad k = 1, \dots, t, \quad l_k = 0, 1, \dots, \tau_k - 1, \quad j = 1, \dots, u,$$

линейно независимы над полем $\mathbb{I}$.

Можно получить и количественный результат в виде оценки снизу модуля линейной формы (однородной или неоднородной) от значений функций (6) с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ по аналогии с тем, как это сделано в [9].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим функциональную линейную форму

$$P_0(z) + \sum_{k=1}^t \sum_{l_k=1}^{\tau_k-1} \sum_{j_k=1}^{u_k} P_{kl_kj_k}(z) F_{kl_kj_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}, \quad (7)$$

где $P_0(z) = \sum_{s=0}^{\nu_0} p_{0s} z^s$,

$$P_{kl_kj_k}(z) = \sum_{s=0}^n p_{kl_kj_k s} z^s. \quad (8)$$

Предположим, что функции (4) линейно зависимы. Это означает, что существуют многочлены (8) не все равные нулю тождественно, и неотрицательное число $\nu \in \mathbb{Z}$, для которых в правой части (7)

$$c_\nu = 0, \quad \nu = \nu_0 + 1, \quad \nu_0 + 2, \dots$$

Чтобы доказать, что такая ситуация невозможна в условиях теоремы 1, выделим главный член коэффициента c_ν при $\nu \rightarrow \infty$.

Лемма 1. *При $\nu \rightarrow \infty$ имеем*

$$\frac{d^q}{d\lambda^q} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x} = (-1)^q \ln^q \nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x} (1 + o(1)),$$

где число λ отлично от $-1, -2, \dots$, q — неотрицательное число из $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Применим индукцию. При $q = 0$ нечего доказывать. Пусть $q = 1$. Тогда

$$\frac{d}{d\lambda} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x} = - \left(\frac{1}{\lambda+1} + \dots + \frac{1}{\lambda+\nu} \right) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x}.$$

Отсюда и из известного соотношения

$$\frac{1}{\lambda+1} + \dots + \frac{1}{\lambda+\nu} = \ln \nu + O(1) \quad (\nu \rightarrow \infty)$$

следует требуемое. Далее, применяя формулу Лейбница, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^{q+1}}{d\lambda^{q+1}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x} &= - \frac{d^q}{d\lambda^q} \left(\left(\frac{1}{\lambda+1} + \dots + \frac{1}{\lambda+\nu} \right) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x} \right) = \\ &= - \left(\frac{1}{\lambda+1} + \dots + \frac{1}{\lambda+\nu} \right) \frac{d^q}{d\lambda^q} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x} - \\ &\quad - \sum_{\mu=0}^{q-1} \binom{q}{\mu} \frac{d^\mu}{d\lambda^\mu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x} \cdot \frac{d^{q-\mu}}{d\lambda^{q-\mu}} \left(\frac{1}{\lambda+1} + \dots + \frac{1}{\lambda+\nu} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Из последнего равенства, используя надлежащим образом сформулированное предположение индукции, получим утверждение леммы. $\square$

Пусть $1 \leq k \leq t$ и $0 \leq l_k \leq \tau_k - 1$. Тогда

$$\sum_{j_k=1}^{u_k} P_{kl_k j_k}(z) F_{kl_k j_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{kl_k \nu} z^\nu,$$

где при $\nu > \max(\nu_0, n)$

$$c_{kl_k \nu} = \sum_{j_k=1}^{u_k} \sum_{s=0}^n p_{kl_k j_k s} \omega_k^{\nu-s} (\nu-s)^{j_k-1} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{b(x)b_k(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{\lambda_k+x}. \quad (10)$$

Лемма 2. *Пусть при фиксированных k и l_k среди многочленов*

$$P_{kl_k j_k}(z), \quad j_k = 1, \dots, u_k,$$

имеется хотя бы один отличный от тождественного нуля. Обозначим через n_{kl_k} степень многочлена (13) при $\mu = l_k$, и пусть a_{kl_k} — соответствующий старший коэффициент.

Тогда при $\nu \rightarrow \infty$

$$c_{kl_k\nu} = (-1)^{l_k} a_{kl_k} \omega_k^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)b_k(x)(\lambda_k + x)} \nu^{n_{kl_k}} \ln^{l_k} \nu (1 + o(1)). \quad (11)$$

Доказательство. Преобразуем правую часть (10):

$$\begin{aligned} c_{kl_k\nu} &= \omega_k^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)b_k(x)} \sum_{j_k=1}^{u_k} \sum_{s=0}^n p_{kl_k j_k s} \omega_k^{-s} (\nu - s)^{j_k-1} \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu - x) b_k(\nu - x) \times \\ &\times \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \left(\prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_k + x} \prod_{x=0}^{s-1} (\nu + \lambda_k - x) \right) = \omega_k^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)b_k(x)} \sum_{\mu=0}^{l_k} Q_{kl_k\mu}(\nu) \frac{d^\mu}{d\lambda_k^\mu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_k + x}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$Q_{kl_k\mu}(\nu) = \binom{l_k}{\mu} \sum_{j_k=1}^{u_k} \sum_{s=0}^n p_{kl_k j_k s} \omega_k^{-s} (\nu - s)^{j_k-1} \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu - x) b_k(\nu - x) \frac{\partial^{l_k-\mu}}{\partial \lambda_k^{l_k-\mu}} \prod_{x=0}^{s-1} (\nu + \lambda_k - x). \quad (13)$$

Структура многочлена (13) показывает, что при $\mu = l_k$ он отличен от тождественного нуля в условиях леммы, и его можно записать в виде

$$a_{kl_k} \nu^{n_{kl_k}} (1 + o(1)) \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

Поскольку при дифференцировании по λ_k в правой части (13) степень соответствующего многочлена понижается, то с учетом леммы 1 из (12) и (13) получаем требуемое. $\square$

3. ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ ФУНКЦИЙ

Для тех пар (k, l_k) , для которых многочлен (13) при $\mu = l_k$ отличен от тождественного нуля (в дальнейшем рассматриваем только такие пары), из (11) и формулы Стирлинга следует, что при $\nu \rightarrow \infty$

$$|c_{kl_k\nu}| = |C_{kl_k}| |\omega_k|^\nu \nu^{-(m_k+1)\nu + n_{kl_k} - \vartheta_k - (m_k+1)/2} e^{m_k\nu} \ln^{l_k} \nu \left| \prod_{k=1}^{\nu} 1/b(x) \right| (1 + o(1)), \quad (14)$$

где C_{kl_k} — ненулевая константа (ее значение легко определяется), не зависящая от ν , а число ϑ_k определено в условии теоремы 1. Пусть $m = \min(m_1, \dots, m_t)$. Через S_1 обозначим множество тех пар (k, l_k) , для которых $m_k = m$. Далее, обозначим $\omega = \max |\omega_k|$, где максимум берется по всем тем k , для которых $(k, l_k) \in S_1$, и определим множество S_2 , которое получается из S_1 удалением всех тех пар (k, l_k) , для которых $|\omega_k| < \omega$. Из пар (k, l_k) , входящих в S_2 , удалим все пары, для которых $n_{kl_k} - \vartheta_k$ меньше максимально возможного значения (по всем парам из S_2), указанное максимальное значение обозначим θ_0 . Таким образом, получим множество S_3 . Множество S_4 получим из S_3 отбрасыванием всех элементов, для которых l_k меньше максимального значения l_0 среди всех пар из S_3 . Запишем теперь очевидное равенство

$$c_\nu = \sum_{(k, l_k) \in S_4} c_{kl_k\nu} + \sum_{(k, l_k) \notin S_4} c_{kl_k\nu}. \quad (15)$$

Лемма 2 и метод построения множества S_4 показывают, что вторая сумма в правой части последнего равенства бесконечно мала по сравнению с первой при $\nu \rightarrow \infty$.

Лемма 3. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ — попарно различные комплексные числа, модули которых равны единице, а $C_1, \dots, C_q$ — ненулевые комплексные числа. Тогда существует положительное число ε_0 и бесконечно много натуральных чисел ν , для которых выполняется неравенство

$$|C_1 \alpha_1^\nu + \dots + C_q \alpha_q^\nu| \geq \varepsilon_0.$$

Доказательство. Пусть

$$l_\nu^{(\mu)} = C_1 \alpha_1^{\nu+\mu} + \dots + C_q \alpha_q^{\nu+\mu}, \quad \mu = 0, 1, \dots, q-1.$$

Поскольку $|\alpha_1| = \dots = |\alpha_q| = 1$, для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_1 \alpha_1^\nu & \dots & C_q \alpha_q^\nu \\ C_1 \alpha_1^{\nu+1} & \dots & C_q \alpha_q^{\nu+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1 \alpha_1^{\nu+q-1} & \dots & C_q \alpha_q^{\nu+q-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_\nu^{(0)} & C_2 \alpha_2^\nu & \dots & C_q \alpha_q^\nu \\ l_\nu^{(1)} & C_2 \alpha_2^{\nu+1} & \dots & C_q \alpha_q^{\nu+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_\nu^{(q-1)} & C_2 \alpha_2^{\nu+q-1} & \dots & C_q \alpha_q^{\nu+q-1} \end{vmatrix}$$

справедлива оценка сверху

$$|\Delta| \leq (|l_\nu^{(0)}| + \dots + |l_\nu^{(q-1)}|) (q-1)! |C_2 \dots C_q|.$$

С другой стороны, согласно формуле для определителя Вандермонда

$$|\Delta| = |C_1 \dots C_q| \prod_{q_2 > q_1} |\alpha_{q_2} - \alpha_{q_1}|.$$

Отсюда $\max_{0 \leq \mu \leq q-1} |l_\nu^{(\mu)}| \geq \varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_0 = \frac{|C_1| \prod_{q_2 > q_1} |\alpha_{q_2} - \alpha_{q_1}|}{q!}.$$

Теперь ясно, что утверждение леммы справедливо. $\square$

Обозначим первую сумму из правой части (15) через σ_0 и запишем эту сумму с помощью (14) в виде

$$\sigma_0 = \sum_{(k, l_k) \in S_4} \omega^\nu \nu^{-(m+1)\nu + \vartheta_0 - (m+1)/2} e^{(m+1)\nu \ln l_0} \nu C_{kl_k} \left(\frac{\omega_k}{\omega} \right)^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} (1 + o(1)) \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

Заметим, что все ω_k , входящие в последнюю сумму различны, так как в случае $\omega_{k_1} = \omega_{k_2}$ по условию теоремы 1 числа $n_{k_1 l_{k_1}} - \vartheta_{k_1}$ и $n_{k_2 l_{k_2}} - \vartheta_{k_2}$ различны и не могут оба равняться максимальному значению ϑ_0 . Учитывая последнее замечание и лемму 3, можем утверждать, что для бесконечно многих значений ν выполняется неравенство

$$|\sigma_0| \geq \frac{\varepsilon_0^*}{2} \omega^\nu \nu^{-(m+1)\nu + n_0 - (m+1)/2} e^{(m+1)\nu \ln l_0} \nu \left| \prod_{x=1}^{\nu} 1/b(x) \right|,$$

где ε_0^* — вычисленное при соответствующих значениях параметров число ε_0 из леммы 3. Отсюда следует $c_\nu \neq 0$ также для бесконечно многих значений ν , что означает невозможность равенства нулю нетривиальной линейной формы из (7), и, следовательно, справедливость теоремы 1. $\square$

4. ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Для доказательства теоремы 3 используем модифицированный метод Зигеля, который впервые был применен в работе [11] (см. также [12]).

Лемма 4. Пусть $\beta \in \mathbb{Q}$, и пусть $Q_n^{(1)}(\beta)$ — наименьшее натуральное число, для которого

$$Q_n^{(1)}(\beta) \frac{\nu!}{(\beta+1) \dots (\beta+\nu)} \in \mathbb{Z}, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Тогда $Q_n^{(1)}(\beta)$ есть величина порядка $e^{O(n)}$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы стандартно (например, [7], с. 186, лемма 2).

Лемма 5. Пусть $\lambda \in \mathbb{Q}$, и пусть $Q_n^{(2)}(\lambda)$ — наименьшее натуральное число, для которого

$$\nu! Q_n^{(2)}(\lambda) \frac{d^s}{d\lambda^s} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x} \in \mathbb{Z}, \quad \nu = 1, \dots, n, \quad s = 0, 1, \dots, q.$$

Тогда $Q_n^{(2)}(\lambda)$ есть величина порядка $e^{O(n)}$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Отметим сначала, что существует натуральное число Q , не превосходящее $e^{\gamma n}$, для которого

$$Q \left(\frac{1}{\lambda+1} + \dots + \frac{1}{\lambda+\nu} \right) \in \mathbb{Z}, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

константа γ зависит от λ . Далее следует применить индукцию по s , используя равенство (9) и предыдущую лемму. $\square$

Рассмотрим систему однородных уравнений относительно неизвестных $A_{k\mu_k\sigma}$:

$$\sum_{k=1}^t \omega_k^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b_k(x)} \sum_{\mu_k=0}^{\tau_k-1} S_{k\mu_k} \frac{d^{\mu_k}}{d\lambda_k^{\mu_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda_k+x} = 0, \quad (16)$$

$$S_{k\mu_k}(\nu) = \sum_{\sigma=0}^{u(n+1)-1} A_{k\mu_k\sigma} \frac{\nu(\nu-1) \dots (\nu-\sigma+1)}{\sigma!}, \quad (17)$$

$$\nu = n+1, \dots, N, \quad N = [n + u(n+1)T - \epsilon n],$$

где $T = \tau_1 + \dots + \tau_t$, ϵ — некоторое положительное число (др. обозначения см. перед формулировкой теоремы 3).

Лемма 6. При выполнении условий теоремы 3 система уравнений (16) имеет нетривиальное решение в целых числах из поля $\mathbb{I}$, для которых

$$|A_{kl\sigma}| \leq e^{\gamma_1 n}, \quad k = 1, \dots, t, \quad l_k = 0, 1, \dots, \tau_k - 1, \quad \sigma = 0, 1, \dots, u(n+1) - 1,$$

константа γ_1 зависит от параметров функций (6).

Доказательство. Умножим ν -е уравнение системы на

$$\Omega^N (\nu!)^{m+1} \prod_{k=1}^t Q_N^{(1)}(\beta_{k1}) \dots Q_N^{(1)}(\beta_{km}) Q_N^{(2)}(\lambda_k),$$

где $\beta_{k1}, \dots, \beta_{km}$ определяются равенством (2), а натуральное число Ω таково, что все числа $\Omega \omega_k$, $k = 1, \dots, t$ лежат в $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. После этого коэффициенты системы станут целыми в поле $\mathbb{I}$, причем абсолютные величины этих коэффициентов ограничены сверху числом $e^{\gamma_2 n}$. Теперь можно доказать существование решений системы с требуемыми свойствами с помощью ([7],

с. 111, лемма 13). Максимумы модулей сопряженных алгебраических чисел, фигурирующие в этой лемме, заменяются на модули самих чисел, поскольку поле $\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное. Применив указанную лемму, завершаем доказательство. $\square$

Лемма 7. Пусть $P(z)$ — многочлен, степень которого не выше $u(n+1) - 1$. Тогда найдутся числа w_{kjs} , для которых тождественно по z выполняется равенство

$$P(z) = \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^u w_{kjs} (z-s)^{j-1} \prod_{x=0}^{s-1} b_k(z-x)b(z-x)(z+\lambda_k-x). \quad (18)$$

Если при этом $P(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}[z]$, то все числа w_{js} лежат в поле $\mathbb{I}$, и их общий наименьший знаменатель ограничен сверху числом $e^{\gamma_{3n}}$, константа в показателе степени зависит от параметров функций (6).

Общим наименьшим знаменателем некоторого множества $X \subset \mathbb{I}$ здесь называется наименьшее натуральное число M такое, что для любого $x \in X$ выполняется включение $Mx \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. Эта лемма доказывается так же, как и ([13], лемма 3). Доказательство основано на применении теории рядов Ньютона (например, [14], с. 40–41).

Рассмотрим многочлены

$$P_0(z) = \sum_{s=0}^n p_{0s} z^s, \quad P_{klkj}(z) = \sum_{s=0}^n p_{klkjs} z^s \quad (19)$$

с неопределенными коэффициентами и по аналогии с (7) составим линейную функциональную форму

$$P_0(z) + \sum_{k=1}^t \sum_{l_k=1}^{\tau_k-1} \sum_{j=1}^u P_{klkj}(z) \psi_{klkj}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}, \quad (20)$$

где при $\nu > n$

$$c_{\nu} = \sum_{k=1}^t \sum_{l_k=1}^{\tau_k-1} \sum_{j=1}^u \sum_{s=0}^n p_{klkjs} (\nu-s)^{j-1} \omega_k^{\nu-s} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{b(x)b_k(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{1}{x+\lambda_k}. \quad (21)$$

Преобразуем это выражение по уже знакомой схеме

$$c_{\nu} = \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)} \sum_{k=1}^t \omega_k^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b_k(x)} \sum_{\mu_k=0}^{\tau_k-1} V_{k\mu_k}(\nu) \frac{d^{\mu_k}}{d\lambda_k^{\mu_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x+\lambda_k},$$

где

$$V_{k\mu_k}(\nu) = \sum_{l_k=\mu_k}^{\tau_k-1} W_{k\mu_k l_k}(\nu), \quad (22)$$

$$W_{k\mu_k l_k}(\nu) = \binom{l_k}{\mu_k} \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^u p_{klkjs} \omega_k^{-s} (\nu-s)^{j-1} \prod_{x=0}^{s-1} b(\nu-x)b_k(\nu-x) \frac{d^{l_k-\mu_k}}{d\lambda_k^{l_k-\mu_k}} \prod_{x=0}^{s-1} (\nu+\lambda_k-x). \quad (23)$$

Теперь подберем коэффициенты p_{klkjs} так, чтобы при всех допустимых значениях индексов тождественно по ν выполнялось равенство

$$S_{k\mu_k}(\nu) = V_{k\mu_k}(\nu),$$

где многочлен $S_{k\mu_k}(\nu)$ определяется равенством (17). Делается это следующим образом. Зафиксируем k , и пусть $\mu_k = \tau_k - 1$. Тогда $S_{k,\tau_k-1}(\nu) = W_{k,\tau_k-1,\tau_k-1}(\nu)$. Коэффициенты

$p_{k,\tau_k-1,j,s}$ определяются из последнего равенства с помощью леммы 7. Затем запишем равенство

$$S_{k,\tau_k-2}(\nu) = W_{k,\tau_k-2,\tau_k-2}(\nu) + W_{k,\tau_k-2,\tau_k-1}(\nu),$$

которое получается из (17) при $\mu_k = \tau_k - 2$ с учетом (22) и (23). Из (23) видно, что, зная $S_{k,\tau_k-2}(\nu)$ и $W_{k,\tau_k-2,\tau_k-1}(\nu)$, с помощью леммы 7 можем найти все коэффициенты $p_{k,\tau_k-2,j,s}$. Рассуждая по индукции, определим все коэффициенты многочленов $P_{kl,j}(z)$ из левой части (19), и при этом окажется, что в (21) коэффициент c_ν равен (с точностью до множителя $\prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)}$) левой части (16), т. е. $c_\nu = 0$ при указанных в (17) значениях ν . Очевидно, можно так подобрать коэффициенты многочлена $P_0(z)$ из (19), чтобы выполнялись равенства $c_\nu = 0$, $\nu = 0, \dots, n$, и тогда получим функциональную форму (20), имеющую достаточно высокий порядок нуля при $z = 0$.

Чтобы доказать теорему 3, предстоит еще большая работа, но все дальнейшие рассуждения стандартны. Подробное описание этих рассуждений приведено в ([11] или [7], гл. 3). Могут оказаться полезными также явные формулы, с помощью которых из равенства (18) можно найти коэффициенты w_{kjs} ; эти формулы имеются в ([13]; см. также [15]). Более подробно доказательство теоремы 3 не рассматриваем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возможности метода, примененного в настоящей работе, не исчерпываются доказанными теоремами. Использование некоторых дополнительных соображений позволит распространить полученные результаты о линейной независимости над полем $\mathbb{C}(z)$ также и на функции более общего вида, у которых в правой части (3) в числителе дроби под знаком произведения единица заменяется на многочлен $a(x)$, $\deg a(x) \leq u_k$. Возможны и другие обобщения. Эти результаты (а также и теоремы, доказанные в настоящей работе) можно будет применить для развития и обобщения результатов работ, упомянутых во введении.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иванков П.Л. *О дифференцировании гипергеометрической функции по параметру*, Фундамент. и прикл. матем. **16** (6) 91–94 (2010).
- [2] Иванков П.Л. *О значениях продифференцированных по параметру гипергеометрических функций*, Чебышевск. сб. **13** (2) 64–70 (2012).
- [3] Иванков П.Л. *О значениях некоторых функций, удовлетворяющих однородным дифференциальным уравнениям*, Чебышевск. сб. **14** (2) 104–112 (2013).
- [4] Белогривов И.И. *О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций*, Вестн. МГУ, Сер. 1, матем., механика, № 2, 55–62 (1967).
- [5] Белогривов И.И. *О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций одного класса*, Сиб. матем. журн. **14** (1), 16–35 (1973).
- [6] Väinänen K. *On the algebraic independence of the values of some E-functions*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. A., math. **1** (1), 93–109 (1975).
- [7] Шидловский А.Б. *Трансцендентные числа* (Наука, М., 1987).
- [8] Иванков П.Л. *О линейной независимости некоторых функций*, Чебышевск. сб. **11** (1) 145–151 (2010).
- [9] Galochkin A.I. *On effective bounds for certain linear forms*, New Advances in Transcendence theory, Cambridge, New Rochell, Melbourne, Sydney, 207–215 (1988).
- [10] Galochkin A.I. *Linear independence and transcendence of values of hypergeometric functions*, Moscow J. Comb. Number Theory **1** (2) 27–32 (2011).
- [11] Галочкин А.И. *О некотором аналоге метода Зигеля*, Вестн. МГУ. Сер. 1. матем., механика, № 2, 30–34 (1986).
- [12] Иванков П.Л. *О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами*, Сиб. матем. журн. **34** (5), 53–62 (1993).

- [13] Иванков П.Л. *Уточнение оценок некоторых неоднородных линейных форм*, Матем. заметки **77** (4), 515–521 (2005).
- [14] Фельдман Н.И. *Седьмая проблема Гильберта* (Изд-во Московск. ун-та, М., 1982).
- [15] Иванков П.Л. *Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций*, Матем. сб. **182** (2), 283–302 (1991).

Павел Леонидович Иванков

*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская, д. 5/1, г. Москва, 105005, Россия,*

e-mail: ivankovpl@mail.ru

P.L. Ivankov

On linear independence of differentiated with respect to parameter functions and their values

Abstract. We consider hypergeometric functions and their derivatives (including with respect to parameter). For such functions we prove theorems concerning their linear independence over the field of rational fractions. In this connection we apply method that has been specially developed for this purpose. The proven independence of the functions under consideration is subsequently used for the investigation of arithmetic properties of their values by means of the modified Siegel's method.

Some papers have been previously published containing in case of absence of differentiation with respect to parameter necessary and sufficient conditions for the aforementioned linear independence. For differentiated with respect to parameter functions there have been published many theorems concerning their algebraic independence. But by means of all these theorems one is unable to establish linear independence of the functions which are considered in this paper.

Keywords: hypergeometric function, linear independence, differentiation with respect to parameter.

Pavel Leonidovich Ivankov

*Bauman Moscow State Technical University,
5/1 2-ya Baumanskaya str., Moscow, 105005 Russia,*

e-mail: ivankovpl@mail.ru