Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Песчанский, Интегральные уравнения типа криволинейной свертки с гипергеометрической функцией в ядре, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 9, 50–62

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-9-50-62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:23:35

А.И. ПЕСЧАНСКИЙ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА КРИВОЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ В ЯДРЕ

Аннотация. На замкнутой кривой в комплексной плоскости исследуется класс интегральных уравнений первого рода, ядра которых содержат гипергеометрическую функцию Гаусса и зависят от отношения аргументов. В качестве частных случаев этот класс содержит уравнения со степенными и логарифмическими ядрами. Для корректной постановки вопроса о нетеровости уравнений используется метод нормализации оператора с незамкнутой областью. Пространство правых частей уравнений описывается как пространство дробных интегралов типа криволинейной свертки. Решение уравнений в явном виде получается в результате последовательного решения характеристических сингулярных уравнений с ядром Коши и обращению оператора криволинейной свертки, которое проводится с помощью преобразования Лорана функций, заданных на замкнутой кривой.

Ключевые слова: оператор криволинейной свертки с функцией Гаусса в ядре, обращение оператора криволинейной свертки, преобразование Лорана, нетеровость интегрального уравнения.

УДК: 517.968

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-9-50-62

1. ВВЕДЕНИЕ

При построении математических моделей широкого круга прикладных задач используется аппарат теории интегральных уравнений. Обширную библиографию и обзор полученных результатов по одномерным сингулярным интегральным уравнениям и уравнениям типа свертки можно найти в монографиях [1]–[5], а по сингулярным интегральным уравнениям, которые имеют особенности логарифмического или степенного вида, а также различные сочетания слабых и сильных особенностей — в [6], [7]. Общая теория таких уравнений, в общем, считается завершенной, однако при этом интерес представляет нахождение новых классов уравнений, допускающих решение в замкнутой форме.

Целью данной работы является решение в явном виде некоторых интегральных уравнений на замкнутом контуре в комплексной плоскости, ядра которых содержат гипергеометрическую функцию Гаусса и зависят от отношения аргументов. При частных значениях параметров функции Гаусса и конкретном виде коэффициентов рассматриваемые уравнения содержат исследованные ранее уравнения типа Абеля [8], [9] и уравнения с логарифмическим ядром на замкнутом контуре [10], [11]. Аппаратом исследования будет развитый в [6], [12] метод нормализации оператора с незамкнутой областью значений, а также преобразование Лорана функций, заданных на произвольной замкнутой кривой [13].

2. ОПЕРАТОРЫ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ

Пусть Γ — простая гладкая замкнутая ориентированная кривая на комплексной плоскости с параметрическим уравнением $y = y(s)$, $0 \leq s \leq l$, s — дуговая абсцисса, l — длина Γ . Предположим, что Γ лежит в кольце $T = \{z \mid r < |z| < R\}$ и разбивает плоскость на две области: G^+ ($0 \in G^+$) и G^- ($\infty \in G^-$). Оператор криволинейной свертки в пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, определяется с использованием преобразования Лорана L , которое вводится с помощью обобщенных функций [13]. Обратное преобразование Лорана L^{-1} ставит в соответствие всякой функции $f(t) \in L_p(\Gamma)$ бесконечномерный вектор из пространства $\{R, r\}_{\Gamma, p}$, координаты которого (коэффициенты Лорана) определяются формулами $f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t) t^{-n-1} dt$, $n \in \mathbb{Z}$. Прямое преобразование Лорана L ставит в соответствие вектору из пространства $\{R, r\}_{\Gamma, p}$ функцию $(Lf_n)(t) \in L_p(\Gamma)$ по формуле $\int_{\Gamma} (Lf_n)(t) \phi(t) dt = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{-n-1} \phi_n$, где $\phi(z)$ — любая функция из основного пространства (аналитическая в кольце T), а члены последовательности $\{\phi_n\}$ являются коэффициентами Лорана этой функции. Функцию $f(t)$ можно восстановить по ее коэффициентам Лорана и другим путем. С этой целью введем понятие A -суммируемости ряда относительно контура Γ .

Определение 1. Ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n t^n$, $t \in \Gamma$, A -суммируем относительно Γ , если существует функция $f(t) \in L_p(\Gamma)$ такая, что интеграл типа Коши $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt$ разлагается в окрестностях $z = 0$ и $z = \infty$ соответственно по формулам $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ и $-\sum_{n=-\infty}^{-1} f_n z^n$.

Можно убедиться, что последовательность $\{f_n\}$ принадлежит пространству $\{R, r\}_{\Gamma, p}$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n t^n$ A -суммируем относительно Γ , причем сумма этого ряда вычисляется по формуле $f(t) = (Lf_n)(t)$.

Определение 2. Последовательность $\{k_n\}_{-\infty}^{\infty}$ комплексных чисел называется мультипликатором преобразования Лорана в $L_p(\Gamma)$, если для любой функции $f(t) \in L_p(\Gamma)$ выполняется неравенство $\|L k_n L^{-1} f\|_{L_p(\Gamma)} \leq c_p \|f\|_{L_p(\Gamma)}$, где постоянная c_p не зависит от f .

Обозначим через $M_{\Gamma, p}$ соответствующую алгебру мультипликаторов, а $P^{\pm} = 1/2(I \pm S)$ (I — тождественный оператор) — проекционные операторы, связанные с оператором сингулярного интегрирования $(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t}$ с ядром Коши.

Введенное понятие мультипликатора преобразования Лорана тесно связано с композицией Адамара рядов ([14], с. 37). Для мультипликатора $\{k_n\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\forall f(t) \in L_p(\Gamma)$ композиция Адамара $(K^+ \circ F_1)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n f_n z^n$ ($|z| < r$) рядов $K^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n$ ($|z| < 1$) и $F_1(z) = (P^+ f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ ($|z| < r$) аналитически продолжима в область G^+ и принадлежит классу В.И. Смирнова $E_p(G^+)$. Аналогично композиция Адамара $(K^- \circ F_2)(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} k_n f_n z^n$ ($|z| > R$) функций $K^-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} k_n z^n$ ($|z| > 1$) и $F_2(z) = (P^- f)(z) =$

$= \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n z^n$ ($|z| > R$) аналитически продолжима в G^- и принадлежит классу В.И. Смирнова $\mathring{E}_p(G^-)$.

Как известно ([15], с. 169), композиции Адамара допускают интегральные представления

$$(K^+ \circ P^+ f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K^+ \left(\frac{z}{\tau} \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad |z| < r, \quad (1)$$

$$(K^- \circ P^- f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K^- \left(\frac{z}{\tau} \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad |z| > R. \quad (2)$$

Поскольку функции (1) и (2) принадлежат классам В.И. Смирнова, то для них почти всюду на Γ существуют угловые граничные значения, которые обозначим соответственно $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K^+ \left(\frac{t}{\tau} \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$ и $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K^- \left(\frac{t}{\tau} \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$. Здесь $K^{\pm}(t/\tau)$ понимаются как граничные значения функций $K^{\pm}(z/\tau)$ при $z \rightarrow t \in \Gamma$. Таким образом, для оператора криволинейной сверки K справедливо представление

$$(Kf)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K^+ \left(\frac{t}{\tau} \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K^- \left(\frac{t}{\tau} \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (3)$$

Рассмотрим примеры криволинейных сверток. Для доказательства принадлежности последовательности $\{k_n\}_{-\infty}^{\infty}$ алгебре мультипликаторов $M_{\Gamma,p}$ достаточно показать, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n f_n t^n \quad (4)$$

A -суммируем относительно Γ .

1) Если члены последовательности удовлетворяют условиям

$$|k_n| (R/r)^n \leq \text{const}, \quad n \geq 0, \quad |k_n| (r/R)^n \leq \text{const}, \quad n < 0,$$

то $Kf = Lk_n L^{-1}f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K \left(\frac{t}{\tau} \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$, где $K(\varsigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n \varsigma^n$ — аналитическая в кольце $r/R < |\varsigma| < R/r$ функция.

2) Если члены последовательности $\{k_n\}_{-\infty}^{\infty}$ определяются формулами $k_n = \text{sign}(n+1/2)$, $n \in \mathbb{Z}$, то ряд (4) A -суммируем относительно Γ к функции $(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau) d\tau}{\tau-t}$.

3) Рассмотрим последовательность

$$k_n = \begin{cases} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (1)_n}, & n \geq 0, \quad \text{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > -1, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots; \\ \frac{(\alpha')_{-n-1} (\beta')_{-n-1}}{(\gamma')_{-n-1} (1)_{-n-1}}, & n < 0, \quad \text{Re}(\gamma' - \alpha' - \beta') > -1, \quad \gamma' \neq 0, -1, -2, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

где $(\alpha)_n$ — символ Похгаммера, определяемый как $(\alpha)_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$, $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha)_0 = 1$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Композиция Адамара (1) для этой последовательности имеет представление

$$(K^+ \circ P^+ f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F \left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{\tau} \right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad |z| < r, \quad (6)$$

где $F(\alpha, \beta; \gamma; \varsigma)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, определяемая при $|\varsigma| < 1$ рядом $F(\alpha, \beta; \gamma; \varsigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (1)_n} \varsigma^n$. Для любой функции $f(t) \in L_p(\Gamma)$ интеграл в правой части равенства (6) будет определять функцию аналитическую в области G^+ и принадлежащую

классу $E_p(G^+)$, поскольку функция Гаусса в окрестности единицы имеет следующее поведение. В случае $\operatorname{Re}(\gamma - \beta - \alpha) > 0$ она непрерывна и $F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$; если $-1 < \operatorname{Re}(\gamma - \beta - \alpha) \leq 0$, $\gamma \neq \alpha + \beta$, то $|F(\alpha, \beta; \gamma; \varsigma)| < C|1 - \varsigma|^{\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)}$; если $\gamma = \alpha + \beta$, то $|F(\alpha, \beta; \gamma; \varsigma)| < C|\ln(1 - \varsigma)|$, $C = \text{const}$.

Граничные значения функции (6) определяются формулой

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{t}{\tau}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad t \in \Gamma,$$

которая определяет непрерывный оператор в пространстве $L_p(\Gamma)$, так как его ядро имеет разве лишь интегрируемую особенность при $t = \tau$. Аналогично устанавливается, что свертка Адамара $(K^- \circ P^- f)(z)$ при $z \rightarrow t$, $z \in G^-$, имеет предельное значение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha', \beta'; \gamma'; \frac{\tau}{t}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{t}, \quad t \in \Gamma.$$

Следовательно, оператор криволинейной свертки, соответствующий мультипликатору (5) имеет представление

$$(Kf)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{t}{\tau}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha', \beta'; \gamma'; \frac{\tau}{t}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{t}. \quad (7)$$

Заметим, что в силу того, что $F(\alpha, 1; \alpha; z) = (1 - z)^{-1}$, проекторы $P^{\pm}$ можно представить в виде операторов криволинейной свертки $(P^+ f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(\alpha, 1; \alpha; \frac{t}{\tau}) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$, $(P^- f)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F(\alpha, 1; \alpha; \frac{\tau}{t}) \phi(\tau) \frac{d\tau}{t}$.

4) Рассмотрим последовательность с общим членом

$$k_n = \begin{cases} \frac{P_{m_1}(n)}{P_m(n)}, & n \geq 0, \quad n \neq n_j, \quad j = \overline{1, \nu_1}; \\ \frac{Q_{s_1}(n)}{Q_s(n)}, & n < 0, \quad n \neq n_j, \quad j = \overline{\nu_1 + 1, \nu}; \\ \mu_j, & n = n_j, \quad j = \overline{1, \nu}, \end{cases} \quad (8)$$

где $P_{m_1}(x)$, $P_m(x)$, $Q_{s_1}(x)$, $Q_s(x)$ — многочлены соответственно степени m_1 , m , s_1 , s ($m_1 \leq m$, $s_1 \leq s$), $\mu_j \in C$; $P_m(n_j) = 0$, $\mu_j \in Z$, $n_j \geq 0$, $j = \overline{1, \nu_1}$; $Q_s(n_j) = 0$, $n_j \in Z$, $j < 0$, $j = \overline{\nu_1 + 1, \nu}$. Принадлежность последовательности (8) алгебре мультипликаторов следует из возможности разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби и того факта, что $\frac{-a_j}{n-a_j} = \frac{(-a_j)_n}{(-a_j+1)_n}$, $n \geq 0$, и $-\frac{b_i+1}{n-b_i} = \frac{(b_i+1)_{-n-1}}{(b_i+2)_{-n-1}}$, $n < 0$.

Таким образом, оператор криволинейной свертки, соответствующий мультипликатору (8), представляется в виде суммы криволинейных сверток, отвечающих мультипликаторам вида (5).

Покажем, что некоторые операторы криволинейной свертки допускают интегральное представление, отличное от (3). Так, в случае мультипликатора (5) при $\alpha = \alpha' = 1$, $\beta = \beta' = 1$, $\gamma = \gamma' = 1 + \eta$, $\operatorname{Re} \eta > 0$, согласно формуле $\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\eta)}{\Gamma(n+1+\eta)} = \int_0^1 \xi^n (1 - \xi)^{\eta-1} d\xi$ для композиции Адамара $K^+ \circ P^+ f$ имеет место известное представление

$$(K^+ \circ P^+ f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{(1+\eta)_n} f_n z^n = \eta z^{-\eta} \int_0^z (z - \tau)^{\eta-1} (P^+ f)(\tau) d\tau, \quad |z| < r.$$

Отметим, что интеграл $(1/\Gamma(\eta)) \int_0^z (z-\tau)^{\eta-1} (P^+f)(\tau) d\tau$ есть исследованный многими авторами (например, [6]) оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля аналитической функции $(P^+f)(z)$. В нашем случае граничное значение функции $(K^+ \circ P^+f)(z)$ будет задаваться формулой $\eta \int_0^t (1-\frac{\tau}{t})^{\eta-1} (P^+f)(\tau) \frac{d\tau}{t}$, $t \in \Gamma$, в которой в качестве контура интегрирования берется любая дуга, лежащая в области G^+ (требование звездобразности области является излишним). Аналогичные рассуждения можно провести для композиции $(K^- \circ P^-f)(z)$ и получить для оператора свертки K в случае $\alpha = \alpha' = 1$, $\beta = \beta' = 1$, $\gamma = \gamma' = 1 + \eta$, $\text{Re } \eta > 0$, представление

$$(Kf)(t) = \eta \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\eta-1} (P^+f)(\tau) \frac{d\tau}{t} + \eta \int_t^\infty \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\eta-1} (P^-f)(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad t \in \Gamma, \quad (9)$$

где контур интегрирования во втором интеграле лежит в области G^- .

Особо выделим случай, когда $\eta = m$ — натуральное число. С учетом теоремы Коши интегральное представление свертки (9) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (Kf)(t) = & mt^{-m} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-1} (P^+f)(\tau) d\tau + \\ & + (-1)^m m \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-1} (P^-f)(\tau) \frac{d\tau}{\tau^m} + \sum_{k=0}^{m-1} \left(c_k t^{-k-1} + d_k t^k \right), \end{aligned}$$

где t_0 — фиксированная точка на Γ ,

$$\begin{aligned} c_k &= (-1)^k m \binom{m-1}{k} \int_0^{t_0} \tau^k (P^+f)(\tau) d\tau, \\ d_k &= (-1)^{k-1} m \binom{m-1}{k} \int_\infty^{t_0} \tau^{-k-1} (P^-f)(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

3. ОПИСАНИЕ ОБРАЗА ОПЕРАТОРА КРИВОЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ С ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРЕ

Обозначим через $F_{\alpha,\gamma}^+$, $F_{\alpha,\gamma}^-$ операторы криволинейной свертки, содержащие гипергеометрическую функцию Гаусса в ядре

$$F_{\alpha,\gamma}^+ \phi = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{t}{\tau}\right) \phi(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad t \in \Gamma, \quad \gamma \geq \alpha; \quad \gamma, \alpha \neq 0, -1, -2, \dots,$$

$$F_{\alpha,\gamma}^- \phi = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{\tau}{t}\right) \phi(\tau) \frac{d\tau}{t}, \quad t \in \Gamma, \quad \gamma \geq \alpha; \quad \gamma, \alpha \neq 0, -1, -2, \dots,$$

$$F_{\alpha,\gamma} \equiv F_{\alpha,\gamma}^+ + F_{\alpha,\gamma}^-.$$

Для упрощения записи условимся обозначать $F_\eta^+ \equiv F_{1,1+\eta}^+$, $F_\eta^- \equiv F_{1,1+\eta}^-$, $F_\eta \equiv F_\eta^+ + F_\eta^-$. Введем пространства функций

$$L_p^\eta(\Gamma) = \left\{ f \mid f = F_\eta \phi, \phi \in L_p(\Gamma), \|f\|_{L_p^\eta} = \|\phi\|_{L_p} \right\}, \quad L_p^{\eta\pm}(\Gamma) = L_p^\eta(\Gamma) \cap L_p^\pm(\Gamma).$$

Заметим, что, используя представление оператора свертки F_η в форме (9), пространства $L_p^{\eta\pm}(\Gamma)$ можно также определить как множества функций, представимых соответственно в виде

$$f(t) = \eta \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right)^{\eta-1} (P^+ \phi)(\tau) \frac{d\tau}{t},$$

$$f(t) = \eta \int_t^\infty \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\eta-1} (P^- \phi)(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad \phi \in L_p(\Gamma).$$

Свойства оператора $F_{\alpha,\gamma}$ и связь пространства $L_p^\eta(\Gamma)$ с известными пространствами функций устанавливаются в следующих утверждениях.

1. *Образы операторов $F_{\alpha,\gamma}$ и $F_{1,1+\gamma-\alpha}$ совпадают, т. е. $F_{\alpha,\gamma}(L_p(\Gamma)) = F_{1,1+\gamma-\alpha}(L_p(\Gamma))$.*
2. *Пространство $L_p^{\eta_1}(\Gamma)$ вложено плотно и компактно в пространство $L_p^\eta(\Gamma)$, $\eta_1 > \eta$.*
3. *Пространство $L_p^m(\Gamma)$, $m \in \mathbb{N}$, изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_p^m(\Gamma)$.*
4. *В случае, когда Γ — единичная окружность, подпространство $\tilde{L}_p^\eta(\Gamma)$ пространства $L_p^\eta(\Gamma)$, определяемое условием $\int_\Gamma f(t) dt = 0$, изоморфно пространству Вейля $\tilde{W}_p^\eta(R)$ ([16], с. 200) функций, имеющих производную порядка $\eta > 0$.*

В [17] для случая $0 < \eta < 1$ дано описание пространства $L_p^\eta(\Gamma)$ в терминах модифицированных производных Маршо D_η : $D_\eta = D_\eta^+ + D_\eta^-$, $D_\eta^\pm f = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} D_\eta^{\varepsilon\pm} f$. Здесь $D_\eta^{\varepsilon\pm}$ — усеченные

модифицированные производные Маршо

$$D_\eta^{\varepsilon+} f \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon(t)}} \frac{\tau f(\tau) - t f(t)}{(1 - t/\tau)^{1+\eta}} \frac{d\tau}{\tau^2}, \quad D_\eta^{\varepsilon-} f \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon(t)}} \frac{f(\tau) - f(t)}{(1 - \tau/t)^{1+\eta}} \frac{d\tau}{t},$$

$\Gamma_{\varepsilon(t)}$ — часть кривой Γ , оставшаяся после удаления из нее дуги с концами $t_2 = y(s_0 - \varepsilon)$, $t_1 = y(s_0 + \varepsilon)$ и которая содержит точку $t = y(s_0)$. Для того, чтобы функция $f(t)$ принадлежала пространству $L_p^\eta(\Gamma)$, $0 < \eta < 1$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t) \in L_p(\Gamma)$ и существовали пределы $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (L_p)}} D_\eta^{\varepsilon\pm} f$. В случае выполнения этих условий $\phi(t) = (D_\eta f)(t)$. В [18]

пространство $L_p^\eta(\Gamma)$ описано для произвольного вещественного показателя $\eta > 1$. Если m — целая часть числа η , и дробная часть числа $\{\eta\} \neq 0$, то для того, чтобы $f(t) \in L_p^\eta(\Gamma)$, $\eta > 1$, необходимо и достаточно, чтобы $f^{(i)}(t) \in L_p(\Gamma)$, $i = \overline{0, m-1}$, $f^{(m)}(t) \in L_p^{\{\eta\}}(\Gamma)$. При этом норма функции $\|f(t)\|_{L_p^\eta(\Gamma)}$ эквивалентна норме $\|f\|_{L_p^\eta} = \sum_{i=0}^m \|f^{(i)}\|_{L_p} + \|D_{\{\eta\}} f^{(m)}\|_{L_p}$.

4. ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА КРИВОЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ С ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРЕ

Рассмотрим в пространстве $L_p(\Gamma)$ уравнение первого рода

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{t}{\tau}\right) \phi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{\tau}{t}\right) \phi(\tau) \frac{d\tau}{t} = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad \gamma > \alpha,$$

$$\gamma, \alpha \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (10)$$

или в операторной форме $(F_{\alpha,\gamma} f)(t) = g(t)$. Образ оператора $F_{\alpha,\gamma}$ незамкнут в пространстве $L_p(\Gamma)$ и совпадает с пространством $L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$. Следовательно, для разрешимости уравнения (10) необходимо, чтобы $g(t) \in L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$. Изложим два метода решения этого уравнения.

Первый метод основывается на представлении оператора $F_{\alpha,\gamma}$ в виде произведения четырех операторов $F_{\alpha,\gamma} = F_{\{\gamma-\alpha\}} F_m M_1 M_2$, где $\{\gamma - \alpha\}$ и m — соответственно дробная и целая

части числа $\gamma - \alpha$; M_1, M_2 — обратимые в $L_p(\Gamma)$ операторы сингулярной криволинейной свертки, соответствующие соответственно мультипликаторам $\{m_n^{(1)}\}, \{m_n^{(2)}\}$ вида

$$m_n^{(1)} = \frac{(1 + \{\gamma - \alpha\})_n (1 + m)_n}{(1 + \gamma - \alpha)_n (1)_n}, \quad n \geq 0, \quad m_n^{(1)} = \frac{(1 + \{\gamma - \alpha\})_{-n-1} (1 + m)_{-n-1}}{(1 + \gamma - \alpha)_{-n-1} (1)_{-n-1}}, \quad n < 0;$$

$$m_n^{(2)} = \frac{(1 + \gamma - \alpha)_n (\alpha)_n}{(\gamma)_n (1)_n}, \quad n \geq 0, \quad m_n^{(2)} = \frac{(1 + \gamma - \alpha)_{-n-1} (\alpha)_{-n-1}}{(\gamma)_{-n-1} (1)_{-n-1}}, \quad n < 0.$$

С помощью свойств преобразования Лапласа легко убедиться, что оператор

$$F_m^{-1} = \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^m \left(t \frac{d}{dt} + i \right) P^+ + \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{i=0}^{m-1} \left(t \frac{d}{dt} - i \right) P^-$$

является обратным оператору F_m . Учитывая, что оператор $D_{\{\gamma-\alpha\}}$ — обратный оператору $F_{\{\gamma-\alpha\}}$, получим представление для оператора $F_{\alpha, \gamma}^{-1}$: $F_{\alpha, \gamma}^{-1} = D_{\{\gamma-\alpha\}} F_m^{-1} M_1^{-1} M_2^{-1}$.

Второй метод решения уравнения (10) приводит к необходимости нахождения A -суммы ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n g_n t^n$ относительно Γ , где $g_n = (L^{-1}g)_n$; $k_n = \frac{(\gamma)_n}{(\alpha)_n}$, $n \geq 0$; $k_n = \frac{(\gamma)_{-n-1}}{(\alpha)_{-n-1}}$, $n < 0$. Для этого найдем граничные значения на Γ функций из класса В.И. Смирнова

$$(K^+ \circ P^+g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\gamma, 1; \alpha; \frac{z}{\tau}\right) (P^+g)(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad |z| < r, \quad (11)$$

$$(K^- \circ P^-g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\gamma, 1; \alpha; \frac{\tau}{z}\right) (P^-g)(\tau) \frac{d\tau}{z}, \quad |z| > R.$$

Учитывая вложение $L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma) \rightarrow L_p^m(\Gamma)$ и свойство преобразования Лапласа L , преобразуем функцию (11)

$$\begin{aligned} (K^+ \circ P^+g)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n}{(\alpha)_n} g_n z^n = \sum_{n=0}^m \frac{(\gamma)_n}{(\alpha)_n} g_n z^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} (n + \gamma - 1) \frac{(\gamma)_{n-m-1}}{(\alpha)_n} \prod_{i=2}^{m+1} (n + \gamma - i) g_n z^n = \\ &= \left(T_m^{(1)}g\right)(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(D_m^{(1)}P^+g\right)(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \left(z \frac{d}{dz} + \gamma - 1\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{(\alpha + m + 1)_k} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{k+m+1} = \\ &= \left(T_m^{(1)}g\right)(z) + \frac{1}{2\pi i} \left(z \frac{d}{dz} + \gamma - 1\right) \int_{\Gamma} \left(\frac{z}{\tau}\right)^{m+1} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{z}{\tau}\right) \left(D_m^{(1)}P^+g\right)(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\left(T_m^{(1)}g\right)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^m \frac{(\gamma)_n}{(\alpha)_n} z^n \int_{\Gamma} g(\tau) \tau^{-n-1} d\tau$ — конечномерный оператор, $\left(D_m^{(1)}\right)(t) = \frac{1}{(\alpha)_{m+1}} \prod_{i=2}^{m+1} \left(t \frac{d}{dt} + \gamma - i\right) g(t)$, $m \geq 1$, — дифференциальный оператор, $\left(D_0^{(1)}g\right)(t) = \frac{1}{\alpha} g(t)$.

Отметим, что для функции $F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{z}{\tau}\right)$ из ядра интегрального оператора в правой части равенства (12) справедлива оценка

$$\left|F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{z}{\tau}\right)\right| < \frac{c}{|\tau - z|^{\gamma-\alpha-m}}, \quad 0 \leq \gamma - \alpha - m < 1.$$

Поэтому граничные значения на Γ функции $(K^+ \circ P^+g)(z)$ будут определяться выражением (учитывая что $D_m^{(1)}P^+ = P^+D_m^{(1)}$)

$$\left(T_m^{(1)}g\right)(t) + \frac{1}{2\pi i} \left(t \frac{d}{dt} + \gamma - 1\right) \int_{\Gamma} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{m+1} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{t}{\tau}\right) \left(D_m^{(1)}g\right)(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad t \in \Gamma.$$

Аналогично находятся граничные значения функции $(K^- \circ P^-g)(z)$. Следовательно, оператор $F_{\alpha, \gamma}^{-1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} (F_{\alpha, \gamma}^{-1}g)(t) &= \frac{1}{2\pi i} \left(t \frac{d}{dt} + \gamma - 1\right) \int_{\Gamma} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{m+1} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{t}{\tau}\right) \left(D_m^{(1)}g\right)(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \left(t \frac{d}{dt} - \gamma + 2\right) \int_{\Gamma} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{m+1} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{\tau}{t}\right) \left(D_m^{(2)}g\right)(\tau) \frac{d\tau}{t} + \left(T_m^{(1)} + T_m^{(2)}\right)g(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\left(T_m^{(2)}g\right)(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^m \frac{(\gamma)_n}{(\alpha)_n} t^{-n-1} \int_{\Gamma} g(\tau) \tau^n d\tau$, $\left(D_m^{(2)}\right)(t) = \frac{(-1)^{m+1}}{(\alpha)_{m+1}} \prod_{i=3}^{m+2} \left(t \frac{d}{dt} - \gamma + i\right) g(t)$, $m \geq 1$, $\left(D_0^{(2)}g\right)(t) = -\frac{1}{\alpha} g(t)$. Отметим, что условие $g \in L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$ является и достаточным для разрешимости уравнения (10).

Замечание 1. Если для преобразования функций $(K^{\pm} \circ P^{\pm}g)(z)$ использовать формулы $\frac{(\gamma)_n}{(\alpha)_n} = \frac{(\gamma)_n}{(\alpha+m+1)_n} \prod_{j=0}^m \left(1 + \frac{n}{\alpha+j}\right)$, $n \geq 0$; $\frac{(\gamma)_{-n-1}}{(\alpha)_{-n-1}} = \frac{(\gamma)_{-n-1}}{(\alpha+m+1)_{-n-1}} \prod_{j=0}^m \left(1 - \frac{n+1}{\alpha+j}\right)$, $n < 0$, то для оператора $F_{\alpha, \gamma}^{-1}$ получается представление

$$\begin{aligned} (F_{\alpha, \gamma}^{-1}g)(t) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\prod_{j=0}^m \left(1 + \frac{1}{\alpha+j} t \frac{d}{dt}\right) \right] \int_{\Gamma} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{t}{\tau}\right) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \left[\prod_{j=0}^m \left(1 - \frac{1}{\alpha+j} (t \frac{d}{dt} + 1)\right) \right] \int_{\Gamma} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{\tau}{t}\right) g(\tau) \frac{d\tau}{t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Замечание 2. На функциях $g(t)$ из пространства С.Л. Соболева $W_p^{m+1}(\Gamma)$ оператор $F_{\alpha, \gamma}^{-1}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} (F_{\alpha, \gamma}^{-1}g)(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{t}{\tau}\right) \left[\prod_{j=0}^m \left(1 + \frac{1}{\alpha+j} \tau \frac{d}{d\tau}\right) \right] g(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\gamma, 1; \alpha + m + 1; \frac{\tau}{t}\right) \left[\prod_{j=0}^m \left(1 - \frac{1}{\alpha+j} (\tau \frac{d}{d\tau} + 1)\right) \right] g(\tau) \frac{d\tau}{t}. \end{aligned}$$

Замечание 3. Пусть $C^{m, \lambda}(\Gamma)$ — алгебра функций таких, что m -я производная $f^{(m)}$ принадлежит классу непрерывных по Гёльдеру с показателем λ . Если функция $g(t) \in C^{m, \lambda}(\Gamma)$,

$m = [\gamma - \alpha]$, $\lambda > \{\gamma - \alpha\} \neq 0$, то для оператора $F_{\alpha, \gamma}^{-1}$ имеет место представление

$$\begin{aligned} (F_{\alpha, \gamma}^{-1} g)(t) &= \frac{1}{2\pi i (\alpha)_m} \int_{\Gamma} \left(\frac{t}{\tau}\right)^m F\left(\gamma, 1; \alpha + m; \frac{t}{\tau}\right) \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\prod_{i=1}^m \tau \frac{d}{d\tau} + \gamma - i \right] (P^+ g)(\tau) - \left[\prod_{i=1}^m t \frac{d}{dt} + \gamma - i \right] (P^+ g)(t) \right\} \frac{d\tau}{\tau} + \\ &\quad + \frac{(-1)^m}{2\pi i (\alpha)_m} \int_{\Gamma} \left(\frac{\tau}{t}\right)^m F\left(\gamma, 1; \alpha + m; \frac{\tau}{t}\right) \times \\ &\quad \times \left\{ \left[\prod_{i=2}^{m+1} \left(\tau \frac{d}{d\tau} + \gamma - i\right) \right] (P^- g)(\tau) - \left[\prod_{i=2}^{m+1} \left(t \frac{d}{dt} + \gamma - i\right) \right] (P^- g)(t) \right\} \frac{d\tau}{t} + \\ &\quad + \left(T_{m-1}^{(1)} + T_{m-1}^{(2)}\right) g(t) + \delta_{0m} (P^+ g)(t), \quad \prod_{i=1}^0 \equiv I, \quad \prod_{i=2}^1 \equiv I, \quad T_{-1}^{(1)} = T_{-1}^{(2)} \equiv O, \quad \delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 0, & m \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Замечание 4. В случае $\gamma - \alpha = m \in \mathbb{N}$

$$(F_{\alpha, \gamma}^{-1} g)(t) = \left[\prod_{j=0}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{\alpha + j} t \frac{d}{dt}\right) \right] (P^+ g)(t) + \left[\prod_{j=0}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{\alpha + j} \left(t \frac{d}{dt} + 1\right)\right) \right] (P^- g)(t).$$

В частности, при $\alpha = 1$ оператор $F_m^{-1} \equiv F_{1, 1+m}^{-1}$ можно преобразовать к виду

$$(F_m^{-1} g)(t) = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dt^m} [t^m (P^+ g)(t)] + \frac{(-1)^m}{m!} t^m \frac{d^m}{dt^m} (P^- g)(t). \quad (15)$$

Отметим, что в форме (15) оператор F_m^{-1} найден в [19].

Изложенными выше методами в пространстве $L_p^{\pm}(\Gamma)$ решаются соответственно уравнения $F_{\alpha, \gamma}^{\pm} f = g$.

Пример 1. Решим уравнение типа Абеля на замкнутом контуре с внутренним весом в вырожденном случае

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\tau) \tau^{\alpha-1}}{(\tau - t)^{\alpha}} d\tau = g(t), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (16)$$

Запишем это уравнение в операторной форме $F_{\alpha, 1}^{+} f = \frac{1}{2\pi i} g$. Для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы $g \in L_p^{(1-\alpha)+}(\Gamma)$. Решение $f \in L_p(\Gamma)$ с учетом формулы (14) есть $f(t) = -\frac{1}{4\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\alpha} t \frac{d}{dt}\right) \int_{\Gamma} F\left(1, 1; \alpha + 1; \frac{t}{\tau}\right) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \psi(t)$, где $\psi(t)$ — произвольная функция из пространства $L_p^{-}(\Gamma)$. Пользуясь представлением оператора свертки в форме (9) преобразуем решение к виду $f(t) = \frac{\alpha}{2\pi i} \left(1 + \frac{1}{\alpha} t \frac{d}{dt}\right) \left(t^{-\alpha} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau\right) + \psi(t)$ или

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau + \psi(t). \quad (17)$$

Отметим, что решение уравнения (16) в форме (17) другим методом найдено в [9].

Пример 2. Рассмотрим в $L_p(\Gamma)$ другой вырожденный случай уравнения типа Абеля на замкнутом контуре

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha}} d\tau = g(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (18)$$

или в операторной форме $t^{1-\alpha} (F_{\alpha,1}^{-} f)(t) = \frac{1}{2\pi i} g(t)$. Уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $t^{\alpha-1} g(t) \in L_p^{(1-\alpha)^-}(\Gamma)$. Решение $f(t) \in L_p(\Gamma)$ согласно (13) определяется формулой

$$f(t) = \psi(t) - \frac{1}{4\alpha\pi^2} \left(\alpha - 1 + t \frac{d}{dt} \right) \int_{\Gamma} F\left(1, 1; \alpha + 1; \frac{\tau}{t}\right) \tau^{\alpha-1} g(\tau) \frac{d\tau}{t},$$

где $\psi(t)$ — произвольная функция из пространства $L_p^+(\Gamma)$.

5. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КРИВОЛИНЕЙНОЙ СВЕРТКИ С ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРЕ

В этом разделе в пространстве $L_p(\Gamma)$ решаются в замкнутой форме уравнения типа криволинейной свертки, обобщающие уравнение (10), как с внешними, так и внутренними коэффициентами. Начнем с уравнения с внешними коэффициентами

$$\frac{a(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{t}{\tau}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + \frac{b(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} F\left(\alpha, 1; \gamma; \frac{\tau}{t}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{t} = g(t), \quad t \in \Gamma, \quad (19)$$

или в операторной форме $(A_1 f)(t) \equiv a(t) (F_{\alpha,\gamma}^{+} f)(t) + b(t) (F_{\alpha,\gamma}^{-} f)(t) = g(t)$, $t \in \Gamma$, где $a(t)$, $b(t)$ — заданные функции; $a(t), b(t) \in C^{m,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda > \{\gamma - \alpha\} \neq 0$ ($\{\gamma - \alpha\}$ — дробная часть числа $\gamma - \alpha$); $\lambda = 0$ в случае $\{\gamma - \alpha\} = 0$; $\gamma > \alpha$; $\gamma, \alpha \neq 0, -1, -2, \dots$.

Поскольку $F(\alpha, 1; 1; \varsigma) = (1 - \varsigma)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то (19) содержит уравнение со степенным ядром

$$\frac{a(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{(1 - t/\tau)^{\alpha}} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{b(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{(1 - \tau/t)^{\alpha}} \frac{d\tau}{t} = g(t), \quad 0 < \alpha < 1,$$

которое обобщает уравнения (16) и (18) типа Абеля с весом на замкнутом контуре.

Другим частным случаем уравнения (19) ($F(1, 1; 2; \varsigma) = -\varsigma^{-1} \ln(1 - \varsigma)$) является уравнение с логарифмическим ядром

$$\frac{a(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{t} + \frac{b(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln\left(1 - \frac{\tau}{t}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = g(t), \quad t \in \Gamma,$$

которое с коэффициентами конкретного вида исследовано в [10], [11].

Оператор A_1 уравнения (19), как вполне непрерывный, не является нормально разрешимым в $L_p(\Gamma)$. Для исследования этого уравнения применим метод нормализации оператора с незамкнутой областью значений, общая идея которого развита в [6], [12]. Представим оператор A_1 в виде композиции нетерова оператора и простейшего оператора с незамкнутым образом, и пространство, в котором задана правая часть уравнения, надлежащим образом сузим.

Для A_1 справедливо представление $A_1 = (aP^{+} + bP^{-}) F_{\alpha,\gamma}$. Можно показать, что при условии $a(t), b(t) \in C^{m,\lambda}(\Gamma)$, $m = [\gamma - \alpha]$, $\lambda > \{\gamma - \alpha\} \neq 0$, $\lambda = 0$ при $\{\gamma - \alpha\} = 0$, оператор $aP^{+} + bP^{-}$ действует инвариантно в $L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$. И поскольку оператор $F_{\alpha,\gamma}$ осуществляет изоморфизм пространств $L_p(\Gamma)$ и $L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$, то для разрешимости уравнения (19) необходимо,

чтобы $g \in L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$. Относительно новой неизвестной функции $\phi(t) = (F_{\alpha,\gamma}f)(t)$ уравнение (19) является характеристическим сингулярным

$$(aP^+ + bP^-)\phi(t) = g(t). \quad (20)$$

Как известно, условия $a(t) \neq 0$, $b(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, обеспечивают нетеровость оператора $aP^+ + bP^-$ в пространстве $L_p(\Gamma)$, а его индекс χ_1 равен индексу Коши функции $b(t)a^{-1}(t)$. В случае $\chi_1 \geq 0$ уравнение (20) безусловно разрешимо, а при $\chi_1 < 0$ необходимы и достаточны условия разрешимости

$$\int_{\Gamma} g(t)Z^{-1}(t)t^{k-1}dt = 0, \quad k = \overline{1, -\chi_1}. \quad (21)$$

Решения задается формулой

$$2\phi = (a+b)g - (a-b)ZSZ^{-1}g + \sum_{k=1}^{\chi_1} c_k\phi_k, \quad (22)$$

где $Z(t)$ — предельное значение канонической функции соответствующей задачи Римана, $\{2\phi_k(t) = [a(t) - b(t)]Z(t)t^{k-1}\}_{k=1}^{\chi_1}$ — базис ядра оператора $aP^+ + bP^-$, c_k — произвольные постоянные, $c_k = 0$ при $\chi_1 < 0$.

Функция $\phi(t)$ определяется по функции $g(t)$ с помощью операторов, действующих инвариантно в пространстве $L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$. Поэтому, если $g \in L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$, то и $\phi \in L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$. Тогда в силу теоремы 3.9 ([5], с. 44) оператор $aP^+ + bP^-$ является нетеровым в пространстве $L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$, т. е. $aP^+ + bP^- \in \Phi(L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma))$.

Решение $f(t)$ уравнения (19) будет определяться по решению $\phi(t)$ уравнения (19) формулой $f = F_{\alpha,\gamma}^{-1}\phi$. Проведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $a(t), b(t) \in C^{m,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda > \{\gamma - \alpha\} \neq 0$; $\lambda = 0$ при $\{\gamma - \alpha\} = 0$; $a(t), b(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, тогда $A_1 \in \Phi[L_p(\Gamma), L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)]$. Индекс оператора $\text{Ind } A_1 = \chi_1 = \text{ind}[b(t)a^{-1}(t)]$, d -характеристика оператора A_1 имеет вид $(\chi_1, 0)$ при $\chi_1 \geq 0$, $(0, \chi_1)$ при $\chi_1 < 0$. Решения уравнения (19) находятся по формулам (22) и (13).

Рассмотрим в пространстве $L_p(\Gamma)$ уравнение с внутренними коэффициентами

$$(A_2f)(t) \equiv F_{\alpha,\gamma}^+(c(t)f(t)) + F_{\alpha,\gamma}^-(d(t)f(t)) = \phi(t), \quad t \in \Gamma. \quad (23)$$

Предположим, что коэффициенты $c(t)$, $d(t)$ непрерывны и $c(t) \neq 0$, $d(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Поскольку $A_2 = F_{\alpha,\gamma}(P^+cI + P^-dI)$, то решение уравнения (23) сводится к последовательному решению уравнений $F_{\alpha,\gamma}\psi = \phi$ и $(P^+cI + P^-dI)f = \psi$. Если $\phi \in L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$, то $\psi = F_{\alpha,\gamma}^{-1}\phi$ ($\in L_p(\Gamma)$). В случае $\chi_2 = \text{ind}[d(t)c^{-1}(t)] \geq 0$ (23) безусловно разрешимо, а при $\chi_2 < 0$ необходимы и достаточны условия разрешимости

$$\int_{\Gamma} \psi(t)[d(t) - c(t)]Z_1(t)t^{k-1}dt = 0, \quad k = \overline{1, -\chi_2}, \quad (24)$$

где $Z_1(t)$ — предельное значение канонической функции соответствующей задачи Римана (не ограничивая общности, считаем $d(t)c(t) = 1$). Решения даются формулой

$$2f = (c+d)\psi - Z_1^{-1}S(c-d)Z_1\psi + \sum_{k=1}^{\chi_2} b_k f_k, \quad (25)$$

где $\{f_k(t) = Z_1^{-1}(t)t^k\}_{k=1}^{\chi_2}$ — базис ядра оператора $P^+cI + P^-dI$, постоянные $b_k = 0$ при $\chi_2 \leq 0$.

Теорема 2. Если $c(t), d(t) \in C(\Gamma)$, $c(t), d(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, то $A_2 \in \Phi[L_p(\Gamma), L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)]$. Индекс оператора $\text{Ind} A_2 = \chi_2 = \text{ind}[d(t)c^{-1}(t)]$; d -характеристика оператора A_2 имеет вид $(\chi_2, 0)$ при $\chi_2 \geq 0$; $(0, \chi_2)$ при $\chi_2 < 0$. Решения уравнения (23) находятся по формулам (13) и (25).

Уравнение с внутренними и внешними коэффициентами

$$(A_3 f)(t) \equiv a(t)F_{\alpha,\gamma}^+(c(t)f(t)) + b(t)F_{\alpha,\gamma}^-(d(t)f(t)) = \phi(t), \quad t \in \Gamma, \quad (26)$$

сводится к последовательному решению трех уравнений $(aP^+ + bP^-)\phi = g$, $F_{\alpha,\gamma}\psi = \phi$ и $(P^+cI + P^-dI)f = \psi$. Заметим, что в случае $\alpha = \gamma$ уравнение (26) — сингулярное уравнение с ядром Коши, исследовано в [20]. Сформулируем окончательный результат для уравнения (26) в случае $\gamma > \alpha$.

Теорема 3. Оператор A_3 принадлежит классу $\Phi[L_p(\Gamma), L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)]$. $\text{Ind} A_3 = \chi_1 + \chi_2 = \text{ind}[b(t)a^{-1}(t)] + \text{ind}[d(t)c^{-1}(t)]$. 1) При $\chi_1 \geq 0$, $\chi_2 \geq 0$ уравнение (26) безусловно разрешимо, $\dim \ker A_3 = \chi_1 + \chi_2$. 2) При $\chi_1 < 0$, $\chi_2 < 0$ необходимы и достаточны условия разрешимости (21), (24), $\dim \ker A_3 = 0$. 3) При $\chi_1 < 0$, $\chi_2 \geq 0$ необходимы и достаточны условия разрешимости (21), $\dim \ker A_3 = \chi_2$. 4) При $\chi_1 \geq 0$, $\chi_2 < 0$ для разрешимости уравнения необходима и достаточна совместность алгебраической системы

$$\sum_{k=1}^{\chi_1} \sigma_{ik} c_k = h_i, \quad i = \overline{1, -\chi_2}, \quad (27)$$

в которую превращаются условия (24) при подстановке в них функции $\psi(t)$, определяемой формулами (22) и (13), $\dim \ker A_3 = \chi_1 - \rho$, где ρ — ранг матрицы системы (27). В случае разрешимости уравнения (26) его решения определяются формулами (22), (13) и (25).

Замечание 5. Элементы ядер сопряженных операторов A_i^* являются, вообще говоря, обобщенными функциями. Обозначим $L_q^{\alpha-\gamma}(\Gamma)$ пространство обобщенных функций над основным пространством $L_p^{\gamma-\alpha}(\Gamma)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Сопряженный оператор $F_{\alpha,\gamma}^*$ осуществляет изоморфизм пространства обобщенных функций $L_q^{\alpha-\gamma}(\Gamma)$ и пространства $L_q(\Gamma)$. Как нетрудно проверить, оператор $F_{\alpha,\gamma}^*$ на пространстве $L_q(\Gamma)$ совпадает с $F_{\alpha,\gamma}$. Условимся $\ker(A_i^*|X)$ обозначать ядро оператора A_i^* в пространстве X . Можно доказать что при некоторых дополнительных условиях ядра сопряженных операторов A_i^* состоят только из “обычных” функций, т. е. имеет место

Теорема 4. Пусть $a(t), b(t), c(t), d(t) \in C^{m,\lambda}(\Gamma)$, где $m = [\gamma - \alpha]$, $\lambda > \{\gamma - \alpha\} \neq 0$; $\lambda = 0$ при $\{\gamma - \alpha\} = 0$. Тогда $\ker(A_i^*|L_q^{\alpha-\gamma}) = \ker(A_i^*|L_q)$, $i = 1, 2, 3$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гахов Ф.Д. Краевые задачи (Наука, М., 1977).
- [2] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения (Наука, М., 1968).
- [3] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки (Наука, М., 1978).
- [4] Полянин А.Д., Манжиров А.В. Сингулярные интегральные уравнения. Ч. 1 (Юрайт, М., 2018), Ч. 2 (Юрайт, М., 2018).
- [5] Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений (Мир, М., 1979).
- [6] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications (Gordon and Breach Sci., 1993).
- [7] Плещинский Н.Б. Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре (Казанск. ун-т, Казань, 2018).

- [8] Peters A.S. *Some integral equations related to Abel's equation and the Hilbert transform*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (4), 539–560 (1969).
- [9] Чумаков В.Ф., Васильев И.Л. *Интегральные уравнения типа Абеля на замкнутом контуре*, Вестн. Белорусск. ун-та. Сер. 1, №2, 40–44 (1980).
- [10] Сакс Р.С. *Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений* (Изд-во НГУ, Новосибирск, 1975).
- [11] Товмасын Н.Е. *К теории сингулярных интегральных уравнений*, Дифференц. уравнения **3** (1), 69–80 (1967).
- [12] Хайкин М.И. *О регуляризации операторов с незамкнутой областью значений*, Изв. вузов. Матем., №8, 118–123 (1970).
- [13] Песчанский А.И., Черский Ю.И. *Интегральное уравнение с криволинейными свертками на замкнутом контуре*, Укр. матем. журн. **36** (3), 335–340 (1984).
- [14] Бибербах Л. *Аналитическое продолжение* (Мир, М., 1967).
- [15] Смирнов В.И., Лебедев А.Н. *Конструктивная функция комплексного переменного* (Наука, М., 1964).
- [16] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, Т. 2 (Мир, М., 1967).
- [17] Песчанский А.И. *Об описании пространства дробных интегралов типа криволинейной свертки*, Изв. вузов. Матем., №7, 29–39 (1989).
- [18] Песчанский А.И. *Об описании пространства дробных интегралов типа криволинейной свертки*, Материалы XXV Междунар. науч.-техн. конф. “Прикл. задачи матем.”, Севастополь, 18–22 сентября 2017 (Изд-во СевГУ, Севастополь, 2017), с. 104–108.
- [19] Исаханов Р.С. *Дифференциальная граничная задача линейного сопряжения и ее применение к теории интегро-дифференциальных уравнений*, Сообщ. АН ГрузССР **20** (6), 659–666 (1958).
- [20] Черский Ю.И. *Интегральные уравнения, сводящиеся к двум задачам Римана*, ДАН СССР **248** (4), 802–805 (1979).

Алексей Иванович Песчанский

*Севастопольский государственный университет,
ул. Университетская, д. 33, г. Севастополь, 299053, Россия,*

e-mail: peschansky_sntu@mail.ru

A.I. Peschanskii

Integral equations of curvilinear convolution type with hypergeometric function in a kernel

Abstract. We study the class of integral equations of first kind over the circumference in the complex plane. The kernels of the equations contain a Gaussian hypergeometric function and depend on the arguments ratio. This class includes such specific cases as the equations with power and logarithmic kernels. To set the Noetherian property of equations correctly the method of operator normalization with a non-closed image is applied. The space of the right-hand sides of equations is described as the space of fractional integrals of curvilinear convolution type. The solutions of equations in explicit form are obtained as a result of consequent solving characteristic singular equations with a Cauchy kernel and inversion of a curvilinear convolution operator by means of Laurent transform of the functions defined on the circumference.

Keywords: operator of curvilinear convolution with a Gaussian function in a kernel, inversion of a curvilinear convolution operator, Laurent transform, Noetherian property of an integral equation.

Aleksei Ivanovich Peschanskii

*Sevastopol State University,
33 Universitetskaya str., Sevastopol, 299053 Russia,*

e-mail: peschansky_sntu@mail.ru