Общероссийский математический портал

В. И. Щербаков, Сравнения V- и S-признаков Дини. Контрпримеры на симметричные признаки Дини по обобщенным системам Хаара и Уолша, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 9, 73–95

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-9-73-95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 04:28:26

В.И. ЩЕРБАКОВ

СРАВНЕНИЯ V- И S-ПРИЗНАКОВ ДИНИ. КОНТРИМЕРЫ НА СИММЕТРИЧНЫЕ ПРИЗНАКИ ДИНИ ПО ОБОБЩЕННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА И УОЛША

Аннотация. Показано, что для симметричных признаков Дини по системам Прайса и обобщенным системам Хаара важны оба условия; выполнение лишь одного из них не может гарантировать сходимости ряда Фурье ни при какой мажоранте ядер Дирихле. Построены соответствующие контрпримеры.

Ключевые слова: абелева группа, группа Виленкина, системы характеров, системы Прайса, обобщенные системы Хаара, ядра Дирихле, признак Дини.

УДК: 517.52

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-9-73-95

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКИ ТЕОРЕМ

1. Основные определения. Пусть $p_0 = 1$, $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность, состоящая из простых чисел, $m_n = \prod_{k=0}^n p_k$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Всякое натуральное число n единственным образом можно разложить по формуле

$$n = \sum_{k=0}^s a_k m_k = a_s m_s + n', \quad (1)$$

где a_k , s и n' — целые с $0 \leq a_k \leq p_{k+1} - 1$, $1 \leq a_s \leq p_{s+1} - 1$ (т.е. $m_s \leq n \leq m_{s+1} - 1$) и $0 \leq n' \leq m_s - 1$.

Отметим, что если $n < p_1 = m_1$, то $s = 0$ (или $m_s = m_0 = 1$), $a_s = a_0 = n$ и $n' = 0$.

Пусть G — абелева группа с операцией $\dot{+}$, обратной операцией $\dot{-}$ и вложенной системой подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots, \quad \bigcap_{n=0}^\infty G_n = \{0_G\}, \quad (2)$$

где 0_G — нулевой элемент группы G и фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок p_n .

Подгруппы G_n определяют систему окрестностей нуля и, таким образом, на G задана топология (окрестностями точки $x \in G$ являются смежные классы $x \dot{+} G_n$), относительно которой на G определяются предел и непрерывность функции (под функцией будем понимать отображение группы G в множество комплексных чисел $\mathbb{C}$). Получилась нульмерная (т.е. всякое подмножество в G , содержащее более, чем одну точку, не является связным) компактная абелева группа, которую обычно называют группой Виленкина [1], [2].

Мера на группе G определяется следующим образом: мера смежного класса

$$\mu(x \dot{+} G_n) = \mu(G_n) = \frac{1}{m_n} \left(\text{тогда } \mu(G) = \mu(x \dot{+} G_0) = \frac{1}{m_0} = 1 \right). \quad (3)$$

Далее задается система борелевских множеств как разность, счетное объединение и пересечение смежных классов $x \dot{+} G_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), определяются их меры и далее по схеме Лебега вводятся измеримые (по Лебегу) множества и функции, а также интеграл Лебега от этих функций. Таким образом, на группе Виленкина G можно определить ортогональные и ортонормированные системы функций.

В каждом из множеств $G_{n-1} \setminus G_n$ выберем по элементу e_n , который назовем базисным. Тогда для всякого $x \in G$ существует единственный набор целых чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $0 \leq x_n < p_n$ (числа x_n , вообще говоря, зависят от базисных элементов e_n) такой, что

$$x = x_1 \cdot e_1 \dot{+} x_2 \cdot e_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n \cdot e_n \dot{+} \dots \quad (4)$$

(умножение целого числа n на элемент $a \in G$ определяется следующим образом: $0 \cdot a = 0_G$, $1 \cdot a = a$, $n \cdot a = \underbrace{a \dot{+} a \dot{+} \dots \dot{+} a}_n$ и $(-n) \cdot a = \dot{-}(n \cdot a)$). Тогда, если $x = x_1 \cdot e_1 \dot{+} x_2 \cdot e_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n \cdot e_n \dot{+} \dots$ и $y = y_1 \cdot e_1 \dot{+} y_2 \cdot e_2 \dot{+} \dots \dot{+} y_n \cdot e_n \dot{+} \dots$, то

$$x \dot{+} y = z_1 \cdot e_1 \dot{+} z_2 \cdot e_2 \dot{+} \dots \dot{+} z_n \cdot e_n \dot{+} \dots, \text{ где } z_n = (x_n + y_n) \bmod p_n, \text{ а} \quad (5)$$

$$\dot{-}x = \bar{x}_1 \cdot e_1 \dot{+} \bar{x}_2 \cdot e_2 \dot{+} \dots \dot{+} \bar{x}_n \cdot e_n \dot{+} \dots, \text{ где } \bar{x}_n = \begin{cases} 0, & \text{если } x_n = 0; \\ p_n - x_n, & \text{если } x_n \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Определенные в (4) числа x_n будем называть *координатами* элемента $x \in G$ по базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Введем отображение группы G на отрезок $[0, 1]$ (оно зависит от выбора системы базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем (для простых p_n) элемент $e_n \in G_{n-1} \setminus G_n$ может быть выбран произвольно):

$$x = x_1 \cdot e_1 \dot{+} x_2 \cdot e_2 \dot{+} \dots \dot{+} x_n \cdot e_n \dot{+} \dots \mapsto \langle x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}. \quad (7)$$

Отображение группы Виленкина (7) обычно называют отображением Монна [3], [4]. По точке $x \in G$ определим $\tilde{x}_n \in [0, 1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, по формулам

$$\tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{m_k} \quad (8)$$

(т.е. $\tilde{x}_n$ являются n -ми частичными суммами числового ряда, стоящего в правой части равенства (7), а x_n определены в (4)).

2. Обобщенные системы Хаара и Уолша (системы Н.Я. Виленкина). Названия определенных в данной работе систем функций, а также их более ранние исследования будут приведены в исторических сведениях (см. ниже).

Системы Н.Я. Виленкина. Пусть $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ($x \in G$), где

$$\psi_0(x) \equiv 1, \quad r_k(x) = \psi_{m_k}(x) = \exp \frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}, \text{ если } k = 0, 1, 2, \dots, \text{ и } \psi_n(x) = \prod_{k=0}^s (r_k(x))^{a_k}, \quad (9)$$

числа a_k и s определены формулой (1).

$\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система непрерывных на G функций, являющаяся системой характеров на группе G , или

$$\psi_n(x \dot{+} y) = \psi_n(x) \psi_n(y) \text{ и } |\psi_n(x)| = 1 \text{ для всех } x, y \in G. \quad (10)$$

Обобщенные системы Хаара (либо системы типа Хаара). Рассмотрим еще одну полную ортонормированную систему непрерывных на группе G кусочно-постоянных функций $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^\infty$: $\gamma_0(x) \equiv 1$,

$$\gamma_n(x) = \gamma_{a_s m_s + n'}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_s} \exp \frac{2i\pi a_s x_{s+1}}{p_{s+1}}, & \text{если } n' = \tilde{x}_s m_s; \\ 0, & \text{если } n' \neq \tilde{x}_s m_s \end{cases} \quad (11)$$

($\tilde{x}_s$ определены формулой (8), а s, a_s и n' — равенством (1)).

Отметим, что носителем функции $\gamma_n(x) = \gamma_{a_s m_s + n'}(x)$ является смежный класс $\frac{n'}{m_s} \dot{+} G_s$, вне которого $\gamma_n(x) = 0$. Также $\gamma_n(x) = \gamma_{a_s m_s + n'}(x)$ постоянна на всех смежных классах по подгруппе G_{s+1} (но не является постоянной, кроме $\gamma_0(x)$, на всей группе G).

3. Ядра Дирихле по системам Ψ, Γ и их мажоранты. Напомним, что n -е ядро Дирихле по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ вычисляется по формуле $D_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(t)}$. Так как $|\psi_n(x)| \equiv 1$, то $\overline{\psi_k(t)} = \frac{1}{\psi_k(t)} = \psi_k(\dot{-}t)$, и, используя равенство (10), для системы Ψ имеем

$$D_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x) \overline{\psi_k(t)} = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x \dot{-} t) = D_n(x \dot{-} t)$$

(т.е. в данном случае можно считать, что

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x), \text{ и тогда } D_n(\dot{-}x) = \overline{D_n(x)}). \quad (12)$$

В дальнейшем ядра Дирихле по системе Виленкина Ψ будем обозначать как $D_n(x \dot{-} t)$ (либо $D_n(x)$ (как функцию одной переменной)), а по обобщенным системам Хаара Γ — как $D_n(x, t)$.

Для систем Виленкина Ψ известны следующие заданные в $G \setminus \{0\}$ мажоранты ядер Дирихле:

1) V-мажоранта (мажоранта Н.Я. Виленкина [1])

$$V(x) = m_{n+1}, \text{ если } x \in G_n \setminus G_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

2) S-мажоранта (вообще говоря, зависит от выбора системы базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty$)

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}}, \quad (14)$$

где x_{n+1} — первое отличное от нулевого слагаемое в формуле (4) (т.е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, $x_{n+1} \neq 0$ или $x = x_{n+1} \cdot e_{n+1} \dot{+} x_{n+2} \cdot e_{n+2} \dot{+} \dots$; если $x \in G \setminus G_1$, то $n = 0$ либо $x = x_1 e_1 \dot{+} x_2 e_2 \dot{+} \dots$ и $x_1 \neq 0$). В [5] $S(x)$ обозначена как $q(x)$.

Заметим, что обе мажоранты обладают свойством групповой четности:

$$V(\dot{-}x) = V(x), \quad S(\dot{-}x) = S(x) \quad (15)$$

(групповую четность для $S(x)$ можно получить из равенств (14) и (6)). Используя также двустороннюю оценку для синуса $\frac{2}{\pi}y \leq \sin y \leq y$ при $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, для $x_{n+1} \leq \frac{p_{n+1}}{2}$ имеем

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \leq \frac{m_n}{\frac{2}{\pi} \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} = \frac{m_n p_{n+1}}{2 x_{n+1}} = \frac{m_{n+1}}{2 x_{n+1}} \leq \frac{m_{n+1}}{2} = \frac{V(x)}{2}, \quad (16)$$

а также при $x_{n+1} = 1$

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \geq \frac{m_n}{\frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} = \frac{m_n p_{n+1}}{\pi x_{n+1}} = \frac{m_{n+1}}{\pi} = \frac{V(x)}{\pi}. \quad (17)$$

В конце раздела 8 будет показано, что неравенство (16) выполнено для всех $x \in G \setminus \{0_G\}$.

4. Вспомогательные и ранее известные результаты.

4.1. *Взаимосвязь между ядрами Дирихле по системам Ψ и Γ .* В [6] были доказаны следующие два утверждения.

Теорема 1. *Ядра Дирихле для систем Виленкина $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ и обобщенных систем Хаара $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^\infty$ с номерами jm_n ($j = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1$) совпадают, т. е.*

$$D_{jm_n}(x, t) = D_{jm_n}(x \dot{-} t). \quad (18)$$

Теорема 2. *Для обобщенных систем Хаара $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^\infty$ либо*

$$D_n(x, t) = D_{a_s m_s + n'}(x, t) = D_{a_s m_s}(x, t),$$

либо

$$D_n(x, t) = D_{a_s m_s + n'}(x, t) = D_{(a_s + 1)m_s}(x, t),$$

а точнее (числа a_s, m_s и n' определяются формулой (1), а $\tilde{x}_s$ и $\tilde{t}_s$ — равенством (8))

$$D_n(x, t) = \begin{cases} D_{a_s m_s}(x, t), & \text{если } x \dot{-} t \in G_s \text{ и } n' \leq \tilde{x}_s m_s = \tilde{t}_s m_s; \\ D_{(a_s + 1)m_s}(x, t) & \text{для } x \dot{-} t \in G_s \text{ и } n' > \tilde{x}_s m_s = \tilde{t}_s m_s; \\ D_{a_s m_s}(x, t) = 0 & \text{в случае } x \dot{-} t \in G \setminus G_s. \end{cases} \quad (19)$$

4.2. *Некоторые сведения о ядрах Дирихле по системам Ψ и Γ .* Известно, что (см. [6] либо [7], с. 438, равенство (15), а также исторические сведения ниже), что (j — целое с $1 \leq j \leq p_{n+1}$) имеет место

Лемма 1.

$$D_{jm_n}(x) = \begin{cases} jm_n, & \text{если } x \in G_{n+1}; \\ m_n \frac{1 - (r_n(x))^j}{1 - r_n(x)}, & \text{если } x \in G_n \setminus G_{n+1}; \\ 0, & \text{если } x \in G \setminus G_n \end{cases} \quad (20)$$

($r_n(x) = \psi_{m_n}(x)$, см. (9)).

Лемма 2. *Для $x \in G_n \setminus G_{n+1}$ (т. е. в формуле (4) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, а $x_{n+1} \neq 0$) и целого j , удовлетворяющего условию $1 \leq j \leq p_{n+1} - 1$, выполнено равенство*

$$D_{jm_n}(x) = m_n \frac{\sin \frac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \exp \frac{\pi i x_{n+1} (j - 1)}{p_{n+1}}. \quad (21)$$

Доказательство. Из (20) и определения систем Виленкина Ψ (см. (9)) имеем

$$D_{jm_n}(x) = m_n \frac{1 - (r_n(x))^j}{1 - r_n(x)} = m_n \frac{1 - \exp \frac{2i\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{1 - \exp \frac{2i\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} = m_n \frac{1 - \cos \frac{2\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}} - i \sin \frac{2\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{1 - \cos \frac{2\pi x_{n+1}}{p_{n+1}} - i \sin \frac{2\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= m_n \frac{2 \sin^2 \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}} - 2i \sin \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}} \cos \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}}}{2 \sin^2 \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}} - 2i \sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}} \cos \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} = m_n \frac{\sin \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}}}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \frac{\sin \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}} - i \cos \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}}}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}} - i \cos \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} = \\
&= m_n \frac{\sin \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}}}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \frac{-i \left(\cos \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}} + i \sin \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}} \right)}{-i \left(\cos \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}} + i \sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}} \right)} = m_n \frac{\sin \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}}}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \frac{\exp \left(i \frac{\pi j x_{n+1}}{p_{n+1}} \right)}{\exp \left(i \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}} \right)} = \\
&= m_n \frac{\sin \frac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \exp \frac{\pi i x_{n+1} (j - 1)}{p_{n+1}}.
\end{aligned}$$

4.3. *Признаки Дини по обобщенным системам Хаара.* Для обобщенных систем Хаара Γ имеют место следующие доказанные в [6] утверждения.

Теорема V (V-признак Дини или признак Дини–Виленкина по обобщенным системам Хаара). *При выполнении одного из условий*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \dot{+} t) - f(x)| V(t) dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \dot{-} t) - f(x)| V(t) dt = 0 \quad (22)$$

справедливо другое, и ряд Фурье по обобщенной системе Хаара Γ от функции $f(t) \in L(G)$ сходится к ней в точке x .

Теорема S (S-признак Дини по обобщенным системам Хаара). *Если в точке x функции $f(t) \in L(G)$ выполнено одно из условий*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \dot{+} \tau) - f(x)| S(\tau) d\tau = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \dot{-} t) - f(x)| S(t) dt = 0, \quad (23)$$

то верно и другое, и ряд Фурье по обобщенной системе Хаара Γ от функции $f(t) \in L(G)$ сходится к ней в точке x .

Отметим, что, используя групповую четность S-мажоранты (а также V-мажоранты), одно из условий в равенстве (23) можно получить из другого подстановкой $\tau = \dot{-}t$.

Теорема V легко следует из теоремы S, если к формулам (23) применим неравенство (16). Поэтому S-признак Дини не слабее V-признака. В случае $\sup_n p_n < \infty$ они эквивалентны,

ибо $S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \geq m_n = \frac{m_{n+1}}{p_{n+1}} = \frac{V(x)}{p_{n+1}}$ при $x \in G_n \setminus G_{n+1}$, а x_n определены равенством (4).

4.4. *Симметричные признаки Дини.*

Теорема D (классический симметричный признак сходимости Дини для обобщенных систем Хаара Γ). *Если верны оба условия (см. также определение (6))*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} \frac{|f(x \dot{+} t) + f(x \dot{-} t) - 2f(x)|}{\langle t \rangle} dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} \frac{|f(x \dot{+} t) - f(x \dot{-} t)|}{\langle t \rangle} dt = 0, \quad (24)$$

то ряд Фурье по обобщенной системе Хаара Γ от функции $f(t) \in L(G)$ сходится к ней в точке x , где $\langle t \rangle$ означает образ точки $t \in G$ при отображении Монна (7).

Теорема VD (симметричный V-признак Дини или симметричный признак Дини-Виленкина для обобщенных систем Хаара Γ). *При выполнении обоих условий*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \dot{+} t) + f(x \dot{-} t) - 2f(x)| V(t) dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \dot{+} t) - f(x \dot{-} t)| V(t) dt = 0 \quad (25)$$

ряд Фурье по обобщенной системе Хаара Γ от функции $f(t) \in L(G)$ сходится к ней в точке $x \in G$.

Теорема SD (симметричный S-признак Дини для обобщенных систем Хаара Γ). *Если справедливы оба условия*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \dot{+} t) + f(x \dot{-} t) - 2f(x)| S(t) dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \dot{+} t) - f(x \dot{-} t)| S(t) dt = 0, \quad (26)$$

то ряд Фурье от функции $f(t) \in L(G)$ по обобщенной системе Хаара Γ сходится к ней в точке $x \in G$.

5. Постановка задачи. Б.И. Голубов [8] установил, что обобщенная система Хаара Γ , порожденная достаточно быстро растущей последовательностью $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, системой сходимости не является (в отличие от ограниченных p_n). В работе [9] показано, что обобщенная система Хаара Γ уже не будет системой сходимости ни при каких $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sup_n p_n = \infty$.

Поэтому для обобщенных систем Хаара Γ , порожденных неограниченной последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, возникает вопрос об аналогах классических признаков сходимости рядов Фурье, аналогичных признакам сходимости Дини, Дини–Липшица, Жордана. Аналог признака Дини–Липшица был получен в работе [7], а признак сходимости рядов Фурье, аналогичный признаку Дини, начал исследоваться в [6]. В зависимости от мажорант ядер Дирихле в этих работах выведено шесть условий, аналогичных признаку сходимости Дини, три из которых симметричные. Однако для симметричных признаков требовалось выполнение обоих условий в (24) (либо в (25), либо в (26)). Возникает вопрос: а не достаточно ли потребовать выполнения хотя бы одного из этих условий (возможно и при некотором улучшении мажоранты ядер Дирихле). В данной работе показано, что оба условия в (24) (а также в (25) либо в (26)) должны работать “в совокупности”, никакое одно из них не может гарантировать сходимости ряда Фурье и от непрерывной на группе G функции $f(t)$ даже по обобщенной системе Хаара Γ (а тем более и по системе Виленкина Ψ ни при какой мажоранте ядер Дирихле (см. теоремы 4, 5)).

Кроме того, рассматривается вопрос об эквивалентности V- и S-признаков Дини для любых образующих последовательностей $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ (этот вопрос решен отрицательно).

6. Формулировки основных теорем.

6.1. *V- и S-признаки Дини по системам Γ и их сравнение.* Отметим, что при неограниченных образующих последовательностях $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ V- и S-признаки сходимости Дини различаются (S-признак сильнее), что вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. *Для любых $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sup_n p_n = \infty$, любого выбора базисных элементов $e_n \in G_{n-1} \setminus G_n$ и для всякой точки $x \in G$ существует функция $f(t) \in L(G)$, зависящая, вообще говоря, от выбора базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что для соответствующего набора*

базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено одно из условий:

$$\int_G |f(x\dot{+}t) - f(x)|S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x\dot{+}t) - f(x)|S(t) dt < \infty$$

$$\text{или} \int_G |f(x\dot{-}\tau) - f(x)|S(\tau) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x\dot{-}\tau) - f(x)|S(\tau) d\tau < \infty \quad (27)$$

(и, следовательно, справедливы оба условия, ибо одно из них следует из другого подстановкой $\tau = \dot{-}t$), однако

$$\sup_n \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x\dot{+}t) - f(x)|V(t) dt = \infty. \quad (28)$$

Отметим, что из (27) следует и (23), ибо оба интеграла в (23) являются общими членами сходящегося ряда (27).

6.2. *Симметричные признаки сходимости Дини и контрпримеры к ним.* Отметим, что оба условия в равенствах (24), (25) и (26) существенны, выполнения одного из них недостаточно для сходимости ряда Фурье, что вытекает из следующих двух утверждений.

Теорема 4. *Для любых $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sup_n p_n = \infty$ существует непрерывная на группе G функция $f(t)$, зависящая, вообще говоря, от системы базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $f(\dot{-}t) = -f(t)$ (и тогда $f(0_G) = -f(0_G) = 0$), однако ее ряд Фурье по обобщенной системе Хаара Γ , а также и по системе Виленкина Ψ , расходится в точке $x = 0_G$.*

Теорема 5. *Если последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена, то найдется непрерывная на группе G функция $f(t)$, зависящая, вообще говоря, от системы базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условию $f(\dot{-}t) = f(t)$, но, тем не менее, ее ряд Фурье по обобщенной системе Хаара Γ , и, следовательно, по системе Виленкина Ψ , в точке $x = 0_G$ расходится.*

Таким образом, никакое из двух условий в равенствах (24), (25) и (26) не может гарантировать сходимости ряда Фурье (даже по обобщенным системам Хаара Γ) в точке $x = 0_G$. Применяя групповой сдвиг, можно получить расходимость и в произвольной точке $x \in G$.

Надо отметить, что из сходимости ряда Фурье по системе Виленкина Ψ вытекает и сходимость ряда Фурье от той же функции $f(t) \in L(G)$ и в той же точке $x \in G$ по обобщенной системе Хаара Γ , порожденной той же последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ (например, [10]). Поэтому расходимость рядов Фурье будем доказывать для обобщенной системы Хаара Γ , тогда расходимость для системы Виленкина Ψ будет следовать автоматически.

6.3. *Некоторое уточнение классического признака Дини.* Из теоремы D и равенств $f(x\dot{+}t) + f(x\dot{-}t) - 2f(x) = (f(x\dot{+}t) - f(x)) + (f(x\dot{-}t) - f(x))$ и $f(x\dot{+}t) - f(x\dot{-}t) = (f(x\dot{+}t) - f(x)) - (f(x\dot{-}t) - f(x))$ получим, что имеет место

Теорема 6. *Если выполнены оба условия*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} \frac{|f(x\dot{+}t) - f(x)|}{\langle t \rangle} dt = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} \frac{|f(x\dot{-}t) - f(x)|}{\langle t \rangle} dt = 0, \quad (29)$$

то ряд Фурье от функции $f(t)$ по обобщенной системе Хаара Γ сходится к ней в точке $x \in G$, где $\langle t \rangle$ означает образ точки $t \in G$ при отображении Монна (7).

В отличие от V- и S- признаков Дини, когда из одного из равенств (22) либо (23) следует другое, в “классическом” случае надо требовать выполнения обоих условий, ибо в [6]

построен пример функции, удовлетворяющей первому из условий (29) (в точке $x = 0_G$), однако ее ряд Фурье по обобщенной системе Хаара Γ расходится в точке $x = 0_G$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТИ V- и S-ПРИЗНАКОВ ДИНИ

Далее систему базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ зафиксируем, а условие на простоту p_n уберем, а точнее заменим на существенно более слабое: числа $p_n \geq 2$ и целые. Смысл этого обобщения будет пояснен ниже.

1. Группа последовательностей $\tilde{G}$ и модифицированный отрезок $[0, 1]^*$. При фиксированных базисных элементах $e_n \in G_{n-1} \setminus G_n$ группа G переходит в множество последовательностей $G_n = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid x_n = 0, 1, \dots, p_n - 1\}$, а базисный элемент e_n — в последовательность $\underbrace{\{0, 0, \dots, 0\}}_{n-1}, 1, 0, 0, \dots\}$ (x_n — координаты точки $x \in G$ (см. раздел 1 сразу после равенства (6)) с операцией покоординатного сложения по модулю p_n (см. формулы (5) и (6)). При этом отображение Монна (7) принимает вид

$$\tilde{G} \ni \{x_n\}_{n=1}^\infty \mapsto \langle x \rangle = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{m_n} \quad (30)$$

и является взаимно-однозначным всюду, за исключением последовательностей

$$\hat{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, 0, 0, \dots, 0, \dots\}, \quad (31)$$

$$\hat{y} = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n - 1, p_{n+1} - 1, p_{n+2} - 1, \dots, p_{n+k} - 1, \dots\}, \quad (32)$$

которые при отображении Монна переходят в одно и то же число

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{m_k} = \frac{l}{m_n} \quad (33)$$

(через $\frac{l}{m_n}$ обозначено число, полученное в левой части (33), а $x \in G \setminus \{G_0\}$ — это точка, представленная в виде конечной суммы в формуле (4), причем $x_n \neq 0$). Если эти точки, т. е. все p_n -рациональные числа интервала $(0, 1)$ считать дважды: как правое

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{m_k} = \frac{l}{m_n}, \quad (34)$$

так и левое

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{m_k} + \frac{x_{n-1}}{m_n} + \sum_{k=1}^\infty \frac{p_{n+1} - 1}{m_{n+1}} = \frac{l}{m_n}, \quad (35)$$

то получим модифицированный отрезок $[0, 1]^*$, который отличается от отрезка $[0, 1]$ тем, что все p_n -рациональные точки интервала $(0, 1)$ “раздвоились”. Тогда отображение Монна (7) взаимно-однозначно переводит группу Виленкина G (или множество последовательностей $\tilde{G}$) на модифицированный отрезок $[0, 1]^*$, который является геометрической интерпретацией группы G . Отметим, что так как в $[0, 1]^*$ $\frac{l}{m_n} \neq \frac{l}{m_n}$, то и функции в этих точках могут принимать различные значения. При заданной геометрической интерпретации перенос меры и интеграла Лебега с группы Виленкина G на модифицированный отрезок $[0, 1]^*$ по отображению Монна (7) в точности будет совпадать с мерой и интегралом Лебега отрезка $[0, 1]$, который отличается от модифицированного отрезка $[0, 1]^*$ лишь на счетное множество точек.

Непрерывность на группе Виленкина G переходит в непрерывность на модифицированном отрезке $[0, 1]^*$, которая эквивалентна

- обычной непрерывности в p_n -иррациональных точках,
- непрерывности справа в точках l/m_n ,
- непрерывности слева в точках $(l/m_n)-$.

Положив $\frac{l}{m_n}- < \frac{l}{m_n}$, с $[0, 1]$ на модифицированный отрезок $[0, 1]^*$ переходит упорядочивание точек ($x < y$, если $\langle x \rangle < \langle y \rangle$). На группе последовательностей $\tilde{G}$ упорядочивание можно определить и эквивалентным образом: $\hat{x} = \{x_n\}_{n=1}^\infty < \hat{y} = \{y_n\}_{n=1}^\infty$, если $x_k < y_k$, где $k = \min\{n | x_n \neq y_n\}$. Тогда через отрезок $[a, b] \subset \tilde{G}$ определяем множество $\{x \in \tilde{G} | a \leq x \leq b\}$, а $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b] \subset \tilde{G}} f(x) dx$ ($a, b \in \tilde{G}$).

Отметим, что подгруппа G_n при отображении Монна (7) переходит в отрезок $[0, \frac{1}{m_n}-]$, множество $G_{n-1} \setminus G_n$ — в отрезок $[\frac{1}{m_n}, \frac{1}{m_{n-1}}-] \subset [0, 1]^*$ ($n = 1, 2, \dots$), а базисный элемент $e_n \in G_{n-1} \setminus G_n$ — в $\frac{1}{m_n}$ — самое маленькое число отрезка $[\frac{1}{m_n}, \frac{1}{m_{n-1}}-]$. Так как (для простых p_n) базисный элемент e_n может быть выбран произвольно в $G_{n-1} \setminus G_n$, то отсюда видно, что перенос упорядочивания точек с отрезка $[0, 1]$ на группу Виленкина G весьма затруднителен, ибо это будет тесно привязано к системе базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Далее Ψ — это система Виленкина, а Γ — обобщенная система Хаара. Так как базисные элементы e_n строго зафиксированы, то группы G и $\tilde{G}$ будем полностью отождествлять.

2. Смежные классы $G_{l,n}$ и множества G_+ и G_- . Пусть $G_{l,n}$ — прообраз в G отрезка $[\frac{l}{m_n}, \frac{l}{m_n}-] \subset [0, 1]^*$, $l = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1$; $n = 0, 1, 2, \dots$ (или $G_{l,n} \subset G_{n-1} \setminus G_n$), т. е. $G_{l,n} = l \cdot e_n + G_n$ и является смежным классом в G . Так как отображение Монна (7) сохраняет меру, то

$$\mu(G_{l,n}) = \frac{1}{m_n}. \quad (36)$$

Из леммы 2 получим, что для $x \in G_{l,n+1} \subset G_n \setminus G_{n+1}$ (т. е. l целое с $1 \leq l \leq p_{n+1} - 1$, а j целое с $1 \leq j \leq p_{n+1} - 1$), справедлива формула

$$D_{jm_n}(x) = m_n \frac{\sin \frac{\pi l j}{p_{n+1}}}{\sin \frac{\pi l}{p_{n+1}}} \exp \frac{\pi i l (j-1)}{p_{n+1}}. \quad (37)$$

Отметим, что заданную равенством (14) функцию можно определить и так:

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi l}{p_{n+1}}}, \text{ если } x \in G_{l,n+1}, \quad l = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1 \text{ и } n = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

Рассмотрим множества

$$G_{n,+} = \bigcup_{l=1}^{[\frac{p_{n+1}}{2}]} G_{l,n+1}, \quad G_+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{n,+}, \quad (39)$$

$$G_{n,-} = \dot{-} G_{n,+}, \quad G_- = \dot{-} G_+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{n,-} \quad (40)$$

($[x]$ означает целую часть действительного числа x).

Отметим, что

$$G_{n,+} \cup G_{n,-} = G_n \setminus G_{n+1}; \quad G_+ \cup G_- = G \setminus \{0_G\}, \quad (41)$$

$$G_{n,+} \cap G_{n,-} = \begin{cases} G_{\frac{p_{n+1}}{2}, n+1}, & \text{если } p_{n+1} \text{ четно;} \\ \emptyset, & \text{если } p_{n+1} \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (42)$$

Заметим, что неравенство (16) (сравнение V- и S-мажорант) выполнено для всех $x \in G_+$. Тогда, ввиду групповой четности $V(x)$ и $S(x)$, (16) справедливо и для любого $x \in G \setminus \{0_G\}$.

3. Сравнение S-мажоранты со стандартной на $[0, 1]^*$. Сравним теперь $S(x)$ со “стандартной” мажорантой $1/x$, которая не является мажорантой ядер Дирихле по системам Γ (и, следовательно, и по системам Ψ) при $\sup_n p_n = \infty$; функция $\frac{1}{x}$ в точке $\frac{l}{m_n}$ — определяется “обычным” образом: $\frac{1}{(l/m_n)-} = \frac{1}{l/m_n} = \frac{m_n}{l}$. Если $x \in \left[\frac{l}{m_{n+1}}, \frac{l+1}{m_{n+1}} - \right]$, $l = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то $\frac{m_{n+1}}{2l} \leq \frac{m_{n+1}}{l+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{m_{n+1}}{l}$.

Поэтому для $x \in \left[\frac{l}{m_{n+1}}, \frac{l+1}{m_{n+1}} - \right]$ при $l \leq \left[\frac{p_{n+1}}{2} \right]$ имеем

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi l}{p_{n+1}}} \leq \frac{m_n}{\frac{2}{\pi} \frac{\pi l}{p_{n+1}}} = \frac{m_n p_{n+1}}{2l} = \frac{m_{n+1}}{2l} \leq \frac{1}{x}, \quad (43)$$

а если $x \in \left[\frac{l}{m_{n+1}}, \frac{l+1}{m_{n+1}} - \right]$, то

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi l}{p_{n+1}}} \geq \frac{m_n}{\frac{\pi l}{p_{n+1}}} = \frac{m_n p_{n+1}}{\pi l} = \frac{m_{n+1}}{\pi l} \geq \frac{1}{\pi x}. \quad (44)$$

А ввиду того, что обе части неравенства (44) не зависят от n , то оно справедливо при всех $x \neq 0$.

4. Сравнение V- и S-признаков Дини (вывод теоремы 3). Последовательность $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ неограничена. Пусть $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^\infty$ — такая ее подпоследовательность, что $p_{n_k+1} \geq k^4$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x = 0$. Положим

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{p_{n_k+1}}}, & \text{если } t \in A \mapsto \left[\frac{\left[\frac{p_{n_k+1}}{6} \right] + 1}{m_{n_k+1}}, \frac{\left[\frac{5p_{n_k+1}}{6} \right]}{m_{n_k+1}} - \right] \subset \left[\frac{1}{m_{n_k+1}}, \frac{1}{m_{n_k}} - \right], \quad A \subset G; \\ 0, & \text{если } t \in B \mapsto \left[\frac{1}{m_{n_k+1}}, \frac{\left[\frac{p_{n_k+1}}{6} \right] + 1}{m_{n_k+1}} - \right] \subset \left[\frac{1}{m_{n_k+1}}, \frac{1}{m_{n_k}} - \right], \quad B \subset G; \\ 0, & \text{если } t \in C \mapsto \left[\frac{\left[\frac{5p_{n_k+1}}{6} \right]}{m_{n_k+1}}, \frac{1}{m_{n_k}} - \right] \subset \left[\frac{1}{m_{n_k+1}}, \frac{1}{m_{n_k}} - \right], \quad C \subset G; \\ 0, & \text{если } t \notin G_{n_k} \setminus G_{n_k+1} \quad (k = 3, 4, \dots). \end{cases}$$

В частности, $f(0) = 0$. Множества $A = \bigcup_{l=\left[\frac{p_{n_k+1}}{6}\right]+1}^{\left[\frac{5p_{n_k+1}}{6}\right]} G_{l,n_k+1}$, B и C — прообразы соответствующих отрезков в G при отображении Монна (7). При $k \geq 3$ будет $p_{n_k+1} \geq 3^4 = 81$ и тогда $\left[\frac{p_{n_k+1}}{6}\right] \geq \frac{p_{n_k+1}}{6} - 1 \geq \frac{p_{n_k+1}}{6} - \frac{p_{n_k+1}}{81} \geq \frac{p_{n_k+1}}{81} \geq 1$, а также $\left[\frac{5p_{n_k+1}}{6}\right] + 1 \leq \frac{5p_{n_k+1}}{6} + 1 \leq \frac{5p_{n_k+1}}{6} + \frac{p_{n_k+1}}{81} \leq p_{n_k+1}$ или $\emptyset \neq B \subset G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}$, $\emptyset \neq C \subset G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}$ и $\emptyset \neq A \subset G_{n_k} \setminus G_{n_k+1} \mapsto \left[\frac{1}{m_{n_k+1}}, \frac{p_{n_k+1}}{m_{n_k+1}} -\right] = \left[\frac{1}{m_{n_k+1}}, \frac{1}{m_{n_k}} -\right]$. Оценим (сверху и снизу) меру множества A . Так как отображение Монна (7) сохраняет меру, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{n_k}} = \mu(G_{n_k}) &\geq \mu(G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}) \geq \mu(A) = \mu\left(\left[\frac{\left[\frac{p_{n_k+1}}{6}\right] + 1}{m_{n_k+1}}, \frac{\left[\frac{5p_{n_k+1}}{6}\right]}{m_{n_k+1}}\right]\right) = \\ &= \frac{\left[\frac{5p_{n_k+1}}{6}\right] + 1 - \left[\frac{p_{n_k+1}}{6}\right]}{m_{n_k+1}} \geq \frac{\frac{5p_{n_k+1}}{6} - \frac{p_{n_k+1}}{6}}{m_{n_k+1}} = \frac{2}{3} \frac{p_{n_k+1}}{m_{n_k+1}} = \frac{2}{3} \frac{1}{m_{n_k}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Используя (45), оцениваем снизу

$$\begin{aligned} \int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) V(t) dt &= m_{n_k+1} \int_A \frac{1}{\sqrt{p_{n_k+1}}} dt = \frac{m_{n_k+1}}{\sqrt{p_{n_k+1}}} \mu(A) > \frac{2}{3} \frac{1}{m_{n_k}} \frac{m_{n_k+1}}{\sqrt{p_{n_k+1}}} = \\ &= \frac{2}{3} \frac{p_{n_k+1}}{\sqrt{p_{n_k+1}}} = \frac{2}{3} \sqrt{p_{n_k+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Пусть теперь $t \in A = \bigcup_{l=\left[\frac{p_{n_k+1}}{6}\right]+1}^{\left[\frac{5p_{n_k+1}}{6}\right]} G_{l,n_k+1}$. Так как на множестве A $\frac{p_{n_k+1}}{6} \leq l \leq \frac{5p_{n_k+1}}{6}$ или $\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi l}{p_{n_k+1}} \leq \frac{5\pi}{6}$, то $\sin \frac{\pi l}{p_{n_k+1}} \geq \frac{1}{2}$, и из равенства (38) получим $S(t) \leq 2m_{n_k}$ при $t \in A$. Тогда, используя (45), оценим

$$\int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) S(t) dt = \frac{2m_{n_k}}{\sqrt{p_{n_k+1}}} \int_A dt \leq \frac{2m_{n_k}}{\sqrt{p_{n_k+1}}} \mu(A) \leq \frac{2m_{n_k}}{k^2} \frac{1}{m_{n_k}} = \frac{2}{k^2}. \quad (46)$$

В таком случае

$$\int_G f(t) S(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) S(t) dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \quad \square$$

3. КОНТРИПРИМЕРЫ НА СИММЕТРИЧНЫЕ ПРИЗНАКИ ДИНИ

5. *Доказательство теоремы 4.* Рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. Последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит бесконечную подпоследовательность, состоящую только из четных чисел.

Пусть $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ — искомая бесконечная подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ возрастает и

$$p_{n_k+1} > 30 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (47)$$

Положим ($i = \sqrt{-1}$)

$$f(t) = \begin{cases} \frac{i}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}}, & \text{если } t \in G_{4l+1, n_k+1} \mapsto [\frac{4l+1}{m_{n_k+1}}, \frac{4l+2}{m_{n_k+1}}] \subset [\frac{1}{m_{n_k+1}}, \frac{1}{m_{n_k}}]; \\ -\frac{i}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}}, & \text{если } t \in \dot{G}_{4l+1, n_k+1} \mapsto [\frac{p_{n_k+1}-(4l+1)}{m_{n_k+1}}, \frac{p_{n_k+1}-4l}{m_{n_k+1}}] \subset [\frac{1}{m_{n_k+1}}, \frac{1}{m_{n_k}}]; \\ 0 & \text{для остальных } t \end{cases}$$

($l = 0, 1, 2, \dots, [\frac{p_{n_k+1}}{24}] \leq \frac{p_{n_k+1}}{24}$, $k = 1, 2, \dots$). Тогда, используя (47), получим

$$4l+1 \leq 4\frac{p_{n_k+1}}{24} + 1 < \frac{p_{n_k+1}}{6} + \frac{p_{n_k+1}}{30} = \frac{p_{n_k+1}}{5} < \frac{p_{n_k+1}}{3} < \frac{p_{n_k+1}}{2} \quad (48)$$

или $G_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k, +}$ (см. (39)) и поэтому $\dot{G}_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k, -}$. Тогда из (42) вытекает

$$f(t) = 0 \text{ для любого } t \in G_{n_k, +} \cap G_{n_k, -}. \quad (49)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} f(\dot{-}t) &= -f(t) \text{ (в частности, } f(0) = 0) \text{ и} \\ f(t) + f(\dot{-}t) - 2f(0) &= 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Пусть $j < p_{n_k+1}$ — натуральное число. Рассмотрим

$$\begin{aligned} S_{jm_{n_k}}(0, f) &= \int_G f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt = \int_{G_{n_k+1}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt + \\ &+ \int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt + \int_{G \setminus G_{n_k}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt. \end{aligned} \quad (51)$$

Третье слагаемое в равенстве (51) обращается в нуль по теореме 2.

Из равенства (12), так как $|\psi_n(x)| \equiv 1$, получим $|D_n(x)| \leq n$. Оценим первое слагаемое в равенстве (51):

$$\begin{aligned} \left| \int_{G_{n_k+1}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt \right| &\leq \int_{G_{n_k+1}} |f(t)| |D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t)| dt \leq \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} j m_{n_k} \frac{1}{m_{n_k+1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \frac{p_{n_k+1} m_{n_k}}{m_{n_k+1}} = \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Из полученных оценок первого и третьего интегралов в правой части формулы (51) показываем, что частичная сумма Фурье в точке $x = 0$ по системе Γ , а также по системе Ψ (см. теорему 1) удовлетворяет условию ($j = j(k)$ целые с $1 \leq j \leq p_{n_k+1} - 1$)

$$S_{jm_{n_k}}(0, f) = \int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt + o(1) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (52)$$

Рассмотрим второе слагаемое в (51):

$$\begin{aligned} \int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt &= \int_{G_{n_k,+}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt + \int_{G_{n_k,-}} f(\tau) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}\tau) d\tau - \\ &\quad - \int_{G_{n_k,+} \cap G_{n_k,-}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt. \end{aligned} \quad (53)$$

Из (49) получим, что вычитаемое в (53) обращается в нуль, т.е. доказано равенство

$$\int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt = \int_{G_{n_k,+}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt + \int_{G_{n_k,-}} f(\tau) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}\tau) d\tau. \quad (54)$$

Сделав далее во втором слагаемом (54) подстановку $\tau = \dot{-}t$ и используя (12) и (50), из (54) имеем $\int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt = \int_{G_{n_k,+}} f(t) \overline{D_{jm_{n_k}}(t)} dt + \int_{G_{n_k,+}} f(\dot{-}t) D_{jm_{n_k}}(t) dt =$
 $= \int_{G_{n_k,+}} f(t) (\overline{D_{jm_{n_k}}(t)} - D_{jm_{n_k}}(t)) dt =$
 $= -2i \int_{G_{n_k,+}} f(t) \Im(D_{jm_{n_k}}(t)) dt$, где $\Im(c)$ означает мнимую часть комплексного числа c .

Тогда из (52) следует равенство

$$S_{jm_{n_k}}(0, f) = -2i \int_{G_{n_k,+}} f(t) \Im(D_{jm_{n_k}}(t)) dt + o(1) \quad (k \rightarrow \infty), \quad (55)$$

где $j = j(k)$ целые с $1 \leq j \leq p_{n_k+1} - 1$.

Теперь положим $j_k = \frac{p_{n_k+1}}{2}$ (числа p_{n_k+1} четные). Для $t \in G_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k,+}$, $l = 0, 1, 2, \dots, [\frac{p_{n_k+1}}{24}]$, используя равенство (37), рассмотрим

$$\begin{aligned} \Im(D_{j_k m_{n_k}}(t)) &= m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)j_k}{p_{n_k+1}}}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \sin \frac{\pi(4l+1)(j_k-1)}{p_{n_k+1}} = \\ &= m_{n_k} \frac{\sin \left(\frac{\pi(4l+1)p_{n_k+1}}{2p_{n_k+1}} \right)}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \sin \frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-2)}{2p_{n_k+1}} = \end{aligned}$$

$$= m_{n_k} \frac{\sin\left(2\pi l + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \sin\left(2\pi l + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}\right) = \frac{m_{n_k}}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}. \quad (56)$$

Ввиду неравенства (48) $\left(4l+1 < \frac{p_{n_k+1}}{3}\right)$, и поэтому $\cos \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}} \geq \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Таким образом, из (56) имеем

$$\Im(D_{j_k m_{n_k}}(t)) \geq \frac{m_{n_k}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \geq \frac{m_{n_k}}{2\pi(4l+1)} = \frac{m_{n_k} p_{n_k+1}}{2\pi(4l+1)} = \frac{m_{n_k+1}}{2\pi(4l+1)} > 0. \quad (57)$$

Тогда из формулы (55) оценим

$$\begin{aligned} |S_{j_k m_{n_k}}(0, f)| &= \left| -2i \int_{G_{n_k,+}} f(t) \Im(D_{j_k m_{n_k}}(t)) dt + o(1) \right| = \\ &= \left| o(1) - 2i \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}}{24}\right]} \int_{G_{4l+1, n_k+1}} \frac{i}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \Im(D_{j_k m_{n_k}}(t)) dt \right| = \\ &= \left| \frac{2}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}}{24}\right]} \int_{G_{4l+1, n_k+1}} \Im(D_{j_k m_{n_k}}(t)) dt + o(1) \right|. \end{aligned}$$

Используя далее неравенство (57), из последней формулы получим

$$|S_{j_k m_{n_k}}(0, f)| \geq \frac{2}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}}{24}\right]} \frac{m_{n_k+1}}{2\pi} \frac{1}{4l+1} \int_{G_{4l+1, n_k+1}} dt - |o(1)|. \quad (58)$$

Используя далее (3), из (58) показываем, что

$$\begin{aligned} |S_{j_k m_{n_k}}(0, f)| &\geq \frac{1}{\pi} \frac{m_{n_k+1}}{\sqrt{p_{n_k+1}}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}}{24}\right]} \frac{1}{4l+1} \frac{1}{m_{n_k+1}} - |o(1)| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}}{24}\right]} \frac{1}{4l+1} - |o(1)| > \\ &> \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{p_{n_k+1}}{24}\right]} \frac{1}{4(l+1)} - |o(1)| = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \sum_{r=1}^{\left[\frac{p_{n_k+1}}{24}\right]+1} \frac{1}{r} - |o(1)| > \frac{\ln\left(\left[\frac{p_{n_k+1}}{24}\right] + 1\right)}{4\pi \sqrt{\ln p_{n_k+1}}} - \\ &- |o(1)| > \frac{1}{4\pi} \frac{\ln \frac{p_{n_k+1}}{24}}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} - |o(1)| = \frac{1}{4\pi} \frac{\ln p_{n_k+1} - \ln 24}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} - |o(1)| = \frac{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}}{4\pi} - \\ &- \frac{1}{4\pi} \frac{\ln 24}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} - |o(1)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty, \end{aligned}$$

т. е. $S_{j_k m_{n_k}}(0, f)$ расходится (даже неограниченно).

Случай 2. Последовательность $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ не ограничена и не удовлетворяет случаю 1. Если последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ не удовлетворяет случаю 1, то всякая ее бесконечная подпоследовательность (а она должна быть, ибо $\sup_n p_n = \infty$) может содержать не более, чем конечное число четных чисел. Убрав их, получим бесконечную подпоследовательность, состоящую только из нечетных чисел. Перейдя в ней, в случае необходимости, к подпоследовательности, получим бесконечную возрастающую подпоследовательность $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию (47) и состоящую только из нечетных чисел. Тогда $G_{n_k,+} \cap G_{n_k,-} = \emptyset$ (см. (42)), и поэтому равенство (54) непосредственно следует из (41) для любой функции $f(t) \in L(G)$. Также число

$$j_k = \frac{p_{n_k+1} - 1}{2} \quad (59)$$

целое.

При $l = 0, 1, 2, \dots, [\frac{p_{n_k+1}}{24}]$ ($k = 1, 2, \dots, t \in G_{4l+1, n_k+1}$) из равенства (37) найдем

$$\begin{aligned} \Im(D_{j_k m_{n_k}}(t)) &= m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)j_k}{p_{n_k+1}}}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \sin \frac{\pi(4l+1)(j_k-1)}{p_{n_k+1}} = \\ &= m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-1)}{2p_{n_k+1}}}{\sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \sin \frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-3)}{2p_{n_k+1}} = \\ &= \frac{m_{n_k} \sin(2\pi l + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}})}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} \sin(2\pi l + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}) = \\ &= m_{n_k} \frac{\cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \cos \frac{3\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}}. \end{aligned}$$

Доказали равенство

$$\Im(D_{j_k m_{n_k}}(t)) = \frac{m_{n_k}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} \cos \frac{3\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}, \text{ если } t \in G_{4l+1, n_k+1}. \quad (60)$$

Из неравенства (48) ($4l+1 < \frac{p_{n_k+1}}{5}$) получим $\frac{3\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} < \frac{3\pi p_{n_k+1}}{10p_{n_k+1}} = 0.3\pi < \frac{\pi}{3}$, т. е. $\cos \frac{3\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \geq \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Тогда из (60) имеем $\Im(D_{j_k m_{n_k}}(t)) \geq \frac{m_{n_k}}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} \geq$

$$\geq \frac{m_{n_k}}{4^{\frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k}+1}}} = \frac{m_{n_k}p_{n_k+1}}{2\pi(4l+1)} = \frac{m_{n_k+1}}{2\pi(4l+1)}, \text{ т. е. выведено неравенство (57).}$$

Пусть $f(t)$ — функция, определенная в случае 1. Рассуждая далее как в случае 1, получаем формулу (55) (как отмечалось выше, равенство (54) выполнено для любых функций из $L(G)$). Проводя далее те же преобразования, что и в случае 1 (между формулой (57) и концом), показываем, что частичные суммы Фурье $S_n(0, f)$ неограниченно расходятся. Теорема 4 доказана.

6. Доказательство теоремы 5. Здесь мы будем рассматривать $\Re(D_{jm_n}(x))$, где $\Re(c)$ означает действительную часть комплексного числа c . Для целого $j = j(n)$ с $1 \leq j \leq p_{n+1} - 1$ из равенства (37) для $x \in G_{4l+1, n_k+1}$, где k целое с $1 \leq k \leq p_{n+1} - 1$ получим

$$\Re(D_{jm_n}(x)) = m_n \frac{\sin \frac{\pi k j}{p_{n+1}}}{\sin \frac{\pi k}{p_{n+1}}} \cos \frac{\pi k(j-1)}{p_{n+1}} = \frac{m_n}{2 \sin \frac{\pi k}{p_{n+1}}} \left(\sin \frac{\pi k(2j-1)}{p_{n+1}} + \sin \frac{\pi k}{p_{n+1}} \right).$$

Доказано соотношение

$$\Re(D_{jm_n}(x)) = m_n \left(\frac{\sin \frac{\pi k(2j-1)}{p_{n+1}}}{2 \sin \frac{\pi k}{p_{n+1}}} + \frac{1}{2} \right) > m_n \frac{\sin \frac{\pi k(2j-1)}{p_{n+1}}}{2 \sin \frac{\pi k}{p_{n+1}}}. \quad (61)$$

В разделе 5 было показано, что если последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена, то она содержит бесконечную возрастающую подпоследовательность $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию (47) и состоящую либо только из четных, либо из нечетных чисел. Положим

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}}, & \text{если } t \in G_{4l+1, n_k+1} \mapsto [\frac{4l+1}{m_{n_k+1}}, \frac{4l+2}{m_{n_k+1}} -] \subset [\frac{1}{m_{n_k+1}}, \frac{1}{m_{n_k}} -]; \\ \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}}, & \text{если } t \in \dot{-}G_{4l+1, n_k+1} \mapsto [\frac{p_{n_k+1}-(4l+1)}{m_{n_k+1}}, \frac{p_{n_k+1}-4l}{m_{n_k+1}} -] \subset [\frac{1}{m_{n_k+1}}, \frac{1}{m_{n_k}} -]; \\ 0 & \text{при остальных } t \end{cases}$$

($l = 0, 1, 2, \dots, [\frac{p_{n_k+1}}{24}]$, $k = 1, 2, \dots$). Поэтому (см. рассуждения между (48) и (49)) $G_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k+1, +}$, а $\dot{-}G_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k+1, -}$. Отметим, что

$$f(t) = f(\dot{-}t) \text{ для всех } t \in G, \quad (62)$$

а также $f(t)$ удовлетворяет равенству (49), и, следовательно, (54). Почти дословно повторяя рассуждения раздела 5 (между равенствами (54) и (55)), поменяв лишь, начиная с третьего равенства вывода, знак “—” на “+” (ибо вместо формулы (50) — равенство (62)), получим

$$\int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{jm_{n_k}}(\dot{-}t) dt = 2 \int_{G_{n_k+}} f(t) \Re(D_{jm_{n_k}}(t)) dt. \quad (63)$$

Аналогично показываем справедливость равенства (52). Далее будем рассматривать два случая.

6.1. Последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит бесконечную подпоследовательность, состоящую только из четных чисел.

6.1.1. *Последовательность $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ содержит бесконечную подпоследовательность, состоящую только из четных чисел, но не кратных четырем.* Тогда числа

$$j_k = \frac{p_{n_k+1} + 2}{4} \quad (64)$$

целые. Для $x \in G_{4l+1, n_k+1}$, $l = 0, 1, 2, \dots, [\frac{p_{n_k+1}}{24}]$ (см. рассуждения между формулами (48) и (49), т. е. $G_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k+1, +} \subset G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}$ и $G_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k+1, -} \subset G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}$, $k = 1, 2, \dots$) и $j = j_k$, удовлетворяющему равенству (64), из формулы (61) найдем

$$\begin{aligned} \Re(D_{j_k m_{n_k}}(x)) &> m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(\frac{p_{n_k+1}+2}{2} - 1)}{p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = m_{n_k} \frac{\sin \frac{(4\pi l + \pi)(p_{n_k+1} + 2 - 2)}{2p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = \\ &= m_{n_k} \frac{\sin(2\pi l + \frac{\pi}{2})}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = \frac{m_{n_k}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \geq \frac{m_{n_k}}{2\pi(4l+1)} = \frac{m_{n_k} p_{n_k+1}}{2\pi(4l+1)} = \frac{m_{n_k+1}}{2\pi(4l+1)}. \end{aligned}$$

Доказали, что

$$\Re(D_{j_k m_{n_k}}(x)) \geq \frac{m_{n_k+1}}{2\pi(4l+1)} > 0. \quad (65)$$

Используя далее формулы (65) и (63) при $j = j_k$, определенных в (64), из равенства (52) для частичных сумм Фурье, заданной в разделе 6 функции $f(t)$ в точке $x = 0$ имеем

$$\begin{aligned} |S_{j_k m_{n_k}}(0, f)| &= \left| \int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(\cdot t) dt + o(1) \right| = \left| 2 \int_{G_{n_k, +}} f(t) \Re(D_{j_k m_{n_k}}(t)) dt + o(1) \right| = \\ &= 2 \sum_{l=0}^{[\frac{p_{n_k+1}}{24}]} \int_{G_{4l+1, n_k+1}} \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \Re(D_{j_k m_{n_k}}(t)) dt - |o(1)| \geq \\ &\geq \frac{2m_{n_k+1}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \sum_{l=0}^{[\frac{p_{n_k+1}}{24}]} \frac{1}{4l+1} \int_{G_{4l+1, n_k+1}} dt - |o(1)|, \end{aligned}$$

т. е. получено неравенство (58). В точности повторяя далее преобразования раздела 5 показываем, что ряд Фурье от функции $f(t)$ по системе Γ (а также по системе Ψ) неограниченно расходится в точке $x = 0$.

6.1.2. *Подслучай неограниченной последовательности $\{p_n\}_{n=1}^\infty$.* Это означает, что любая бесконечная подпоследовательность последовательности $\{p_n\}_{n=1}^\infty$, состоящая только из четных чисел, может содержать не более конечного числа чисел, не кратных четырем. Удалив их, получим бесконечную подпоследовательность, все элементы которой кратны четырем. Перейдя в ней, если нужно, к подпоследовательности, получим бесконечную возрастающую подпоследовательность $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^\infty$ последовательности $\{p_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющую условию (47) и все компоненты которой кратны четырем. Тогда числа

$$j_k = \frac{p_{n_k+1}}{4} \quad (66)$$

целые. Пусть $f(t)$ — функция, определенная в начале раздела 6. Справедливы также формулы (61), (63) и (52). Из (61) для $j = j_k$, определенных в (66) и $x \in G_{4l+1, n_k+1}$, $l = 0, 1, \dots, [\frac{p_{n_k+1}}{24}]$, и $k = 1, 2, \dots$, получим

$$\begin{aligned} \Re(D_{j_k m_{n_k}}(x)) &> m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(2j_k-1)}{p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(\frac{p_{n_k+1}}{2}-1)}{p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = \\ &= m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-2)}{2p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = m_{n_k} \frac{\sin \left(\frac{\pi(4l+1)p_{n_k+1}}{2p_{n_k+1}} - \frac{2\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \right)}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = \\ &= m_{n_k} \frac{\sin \left(2\pi l + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}} \right)}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}}, \end{aligned}$$

т. е. для натуральных k , определенных в (66) $j = j_k$, целых l с $0 \leq l \leq \frac{p_{n_k+1}}{24}$ и $x \in G_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k+1, +} \subset G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}$ доказано, что

$$\Re(D_{j_k m_{n_k}}(x)) > m_{n_k} \frac{\cos \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}}. \quad (67)$$

Из неравенства (48) $\left(4l+1 \leq \frac{p_{n_k+1}}{3}\right)$ для $0 \leq l \leq \frac{p_{n_k+1}}{24}$ будет $\cos \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}} \geq \cos \frac{\pi p_{n_k+1}}{3p_{n_k+1}} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, и из неравенства (67) при $x \in G_{4l+1, n_k+1}$ получим

$$\Re(D_{j_k m_{n_k}}(x)) \geq \frac{m_{n_k}}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} \geq \frac{m_{n_k}}{4\pi(4l+1)} = \frac{m_{n_k} p_{n_k+1}}{4\pi(4l+1)} = \frac{m_{n_k+1}}{4\pi(4l+1)}. \quad (68)$$

Используя далее определение функции $f(t)$, для $j = j_k$ из (66), подставляя неравенство (68) в формулу (63), а (63), в свою очередь, в (52), оценим

$$\begin{aligned} |2S_{j_k m_{n_k}}(0, f)| &= 2 \left| \int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}}(-t) dt + o(1) \right| = 4 \left| \int_{G_{n_k, +}} f(t) \Re(D_{j_k m_{n_k}}(t)) dt + o(1) \right| = \\ &= 4 \left| \sum_{l=0}^{[\frac{p_{n_k+1}}{24}]} \int_{G_{4l+1, n_k+1}} f(t) \Re(D_{j_k m_{n_k}}(t)) dt + o(1) \right| \geq \\ &\geq \frac{4m_{n_k+1}}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \sum_{l=0}^{[\frac{p_{n_k+1}}{24}]} \frac{1}{4l+1} \int_{G_{4l+1, n_k+1}} dt - |o(1)|, \end{aligned}$$

т. е. получено неравенство (58). Рассуждая далее как в разделе 5, показываем, что $2S_{j_k m_{n_k}}(0, f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, т. е. частичные суммы Фурье от функции $f(t)$ по системе Γ (а также по системе Ψ) неограниченно расходятся в точке $x = 0$.

6.2. Последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит бесконечную подпоследовательность, состоящую исключительно из нечетных чисел. В таком случае, как было показано, формула (54) справедлива для любой функции $f(t) \in L(G)$.

6.2.1. *Последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит бесконечную подпоследовательность, все элементы которой при делении на четыре дают в остатке тройку.* Тогда числа

$$j_k = \frac{p_{n_k+1} + 1}{4} \quad (69)$$

целые. Пусть $f(t)$ — функция, определенная в начале раздела. Справедливы также формулы (61), (52) и (63). Из (61) для $j = j_k$, определенных (69), $k = 0, 1, 2, \dots$, целых l с $0 \leq l \leq \frac{p_{n_k+1}}{24}$ и $x \in G_{4l+1, n_k+1}$ имеем

$$\begin{aligned} \Re(D_{j_k m_{n_k}}(x)) &> m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(2j_k-1)}{p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)\left(\frac{p_{n_k+1}+1}{2} - 1\right)}{p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = \\ &= m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}-1)}{2p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = m_{n_k} \frac{\sin \left(\frac{\pi(4l+1)p_{n_k+1}}{2p_{n_k+1}} - \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \right)}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} = \\ &= m_{n_k} \frac{\sin \left(2\pi l + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \right)}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} = m_{n_k} \frac{\cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}}, \end{aligned}$$

т. е. для $l = 0, 1, 2, \dots, [\frac{p_{n_k+1}}{24}]$, $x \in G_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k+1, +} \subset G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, доказано неравенство

$$\Re(D_{j_k m_{n_k}}(x)) > \frac{m_{n_k}}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} \geq \frac{m_{n_k}}{4 \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} = \frac{2m_{n_k} p_{n_k+1}}{4\pi(4l+1)} = \frac{m_{n_k+1}}{2\pi(4l+1)}. \quad (70)$$

Оценим далее частичные суммы Фурье функции $f(t)$ в точке $x = 0$. Из формул (52), (63) и (70) для $j = j_k$, определенных в (69), получим

$$\begin{aligned} |S_{j_k m_{n_k}}(0, f)| &= \left| \int_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} (\cdot t) dt + o(1) \right| = 2 \left| \int_{G_{n_k, +}} f(t) \Re(D_{j_k m_{n_k}}(t)) dt + o(1) \right| = \\ &= \left| 2 \sum_{l=0}^{[\frac{p_{n_k+1}}{24}]} \int_{G_{4l+1, n_k+1}} f(t) \Re(D_{j_k m_{n_k}}(t)) dt + o(1) \right| > \end{aligned}$$

$$> \frac{2m_{n_k+1}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\ln p_{n_k+1}}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{p_{n_k+1}}{24} \rfloor} \frac{1}{4l+1} \int_{G_{4l+1, n_k+1}} f(t) D_{j_k m_{n_k}} dt - |o(1)|,$$

т. е. доказано неравенство (58). В точности повторяя далее преобразования в разделе 5, приходим к выводу, что $S_{j_k m_{n_k}}(0, f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, т. е. ряд Фурье от функции $f(t)$ по системе Γ (а также по системе Ψ) неограниченно расходится в точке $x = 0$.

6.2.2. *Подслучай для неограниченной последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Доказательство теоремы 5 в случае, когда неограниченная последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию п. 6.1, но не удовлетворяет условию п. 6.2.1.* Согласно условию п. 6.2, последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит бесконечную подпоследовательность, состоящую только из нечетных чисел. А ввиду того, что не выполнено условие п. 6.2.1, эта подпоследовательность может содержать лишь конечное число чисел, которые при делении на четыре дают в остатке тройку. Все остальные ее элементы при делении на четыре должны давать в остатке единицу. Удалим из этой подпоследовательности все числа, которые при делении на четыре дают в остатке тройку (их может быть лишь конечное число). Перейдя в ней, в случае необходимости, к подпоследовательности, построим бесконечную возрастающую подпоследовательность $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию (47). Тогда числа

$$j_k = \frac{p_{n_k+1} + 3}{4} \quad (71)$$

целые. Пусть $f(x)$ — функция, определенная в начале раздела. Справедливы также формулы (52), (63) и (61). Тогда для $k = 1, 2, \dots$, $j = j_k$, определенных в (71), целого l с $0 \leq l \leq \frac{p_{n_k+1}}{24}$, $x \in G_{4l+1, n_k+1} \subset G_{n_k, +} \subset G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}$ из (61) имеем

$$\begin{aligned} \Re(D_{j_k m_{n_k}}(x)) &> m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(2j_k-1)}{p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(\frac{p_{n_k+1}+3}{2}-1)}{p_{n_k+1}}}{2 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}}} = \\ &= m_{n_k} \frac{\sin \frac{\pi(4l+1)(p_{n_k+1}+1)}{2p_{n_k+1}}}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} = m_{n_k} \frac{\sin \left(\frac{\pi(4l+1)p_{n_k+1}}{2p_{n_k+1}} + \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \right)}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{p_{n_k+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} = \\ &= m_{n_k} \frac{\sin \left(2\pi l + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \right)}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} = m_{n_k} \frac{\cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}} \cos \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}} = \frac{m_{n_k}}{4 \sin \frac{\pi(4l+1)}{2p_{n_k+1}}}, \end{aligned}$$

т. е. получена формула (70). Рассуждая далее также, как в п. 6.2.1, показываем, что $S_{j_k m_{n_k}}(0, f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, т. е. ряд Фурье по системе Γ (а также по системе Ψ) от функции $f(t)$ расходится (даже неограниченно) в точке $x = 0$. Теорема 5 доказана.

7. Заключение.

Так как условие на простоту целых чисел $p_n \geq 2$ при доказательстве теорем 4 и 5 было “отменено” (исследовались случаи четных p_n , см. п. 5.1, а также п. 6.1), то результаты данной работы справедливы и для систем Прайса [10], который определял аналогичную систему функций $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ на отрезке $[0, 1]$ (нульмерные группы Прайс [10] не рассматривал, а вместо простоты чисел p_n он налагал условие $p_n \geq 2$ и целые).

Вообще простота чисел p_n в данной работе использовалась для произвольности выбора системы базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ и нигде более.

7.1. Исторические сведения. Для $p_n \equiv p$ система Прайса переходит в систему Крестенсона (или Крестенсона–Леви) [11], а для $p_n \equiv 2$ — в систему Уолша [12] в нумерации Пэли [13].

Функции $r_n(x) = \psi_{m_n}(x)$ иногда называют функциями Радемахера, который в [14] изучал их для $p_n \equiv 2$.

Систему Γ , порожденную ограниченной последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ на отрезке $[0, 1]$, по-видимому впервые, встречаем в работе [15], где Н.Я. Виленкин определил функции $\rho_{n'}^{s, a_s}(x) = \gamma_n(x)$ (n с s, a_s и n' связаны по формуле (1)). Он в [15] показал, что множество $\{\rho_{n'}^{s, a_s}(x)\}$ для $\sup_n p_n < \infty$ является системой сходимости. Однако в [15] для множества $\{\rho_{n'}^{s, a_s}(x)\}$ не выделено даже подпункта. Следует отметить, что система типа Хаара $\{\rho_{n'}^{s, a_s}(x)\}$ появилась в [15] при переводе [16] на русский язык, в подлиннике [16] обобщенной системы Хаара $\{\rho_{n'}^{s, a_s}(x)\}$ нет.

В журнальных статьях обобщенная система Хаара Γ (под другим обозначением и также с трехиндексной нумерацией) рассматривалась Б.И. Голубовым и А.И. Рубинштейном (с ограничением $\sup_n p_n < \infty$) [17] и Б.И. Голубовым [8] (без ограничений на последовательность $\{p_n\}_{n=0}^\infty$). Обозначил я эту систему в данной работе в честь Б.И. Голубова. Он в [8] показал, что в случае $\sup_n p_n = \infty$ множество функций Γ , вообще говоря, системой сходимости не является.

Сходимость почти всюду рядов Фурье по обобщенной системе Хаара Γ (также с трехиндексной нумерацией и на отрезке $[0, 1]$) исследовалась в работах Е.А. Власовой [18], [19]. Она показала, что ряд Фурье всякой функции из $L^2(0, 1)$ по обобщенной системе Хаара сходится почти всюду, а также существует функция из $L^1(0, 1)$, ряд Фурье которой по этой системе расходится почти всюду.

Одноиндексная нумерация обобщенной системы Хаара Γ появилась, начиная с работы [9]. Более ранние одноиндексные нумерации системы функций Γ мне неизвестны.

В случае $p_n \equiv 2$ множество функций $\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является системой Хаара H [20]. Поэтому ее чаще всего называют обобщенной системой Хаара (либо системой типа Хаара).

Следует сказать, что, как показано в [8], а также в [6]–[9], ни при какой неограниченной последовательности $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ обобщенная система Хаара Γ уже не является системой сходимости и, следовательно, перестает соответствовать той задаче, которую решал А. Хаар при построении множества функций H [20]. Поэтому называть ее системой Хаара уже будет некорректно.

На группе Виленкина G (нульмерной компактной абелевой группе) обобщенная система Хаара Γ (при трехиндексной нумерации) была рассмотрена (по-видимому, впервые) С.Ф. Лукомским [21]. Н.Е. Комиссаровой [22] для этой системы исследовались функции Лебега. Г.С. Бердников [23] изучает данную систему функций на локально компактных абелевых группах и при $p_n \equiv p$.

Заметим также, что лемма 2 настоящей работы фактически была доказана в ([7], вывод равенства (37), с. 441; [6], равенство (57)). Однако в качестве леммы (либо иного утверждения) равенство, аналогичное (21), в этих работах не формулировалось.

Отображение группы G на отрезок $[0, 1]$, определяемое равенством (7), названное в данной статье отображением Монна [3], [4] было известно еще и Н.Я. Виленкину [1]. На двоичных группах оно рассматривалось Н. Файном [24].

7.2. Некоторые выводы. Применив к функциям из разделов 5, 6 операцию группового сдвига, можно получить, что для любой точки $x \in G$ найдутся непрерывные на группе G функции $f(t)$ и $g(t)$ такие, что $f(x \dot{+} t) + f(x \dot{-} t) - 2f(x) = 0$ (для сдвига функции из контрпримера раздела 5 получится, что $f(x) = 0$) и $g(x \dot{+} t) - g(x \dot{-} t) = 0$, однако их ряды Фурье по обобщенным системам Хаара (а также по системам Прайса или Виленкина) расходятся (даже неограниченно) в точке x . Поэтому оба условия в (25) и (26) должны работать “в совокупности”; никакое одно из них не может гарантировать сходимости ряда Фурье по обобщенной системе Хаара (а также по системе Прайса либо системе Н.Я. Виленкина) ни при какой мажоранте ядер Дирихле. Тем самым исправлена допущенная в [5] ошибка для симметричного признака Дини.

Как было показано в [5], из условия (27) следует сходимость ряда Фурье по системам Прайса от некоторой функции $f(t) \in L(G)$ (в [6] оно названо S-признаком Дини) в точке $x \in G$. Поэтому существует функция $f(t) \in L(G)$, удовлетворяющая (27) (т.е. S-признаку Дини для систем Прайса или Виленкина, и поэтому ее ряд Фурье по системе Прайса или Виленкина сходится в точке x), однако (в случае $\sup_n p_n = \infty$) не удовлетворяющая V-признаку Дини даже для обобщенных систем Хаара (для нее в заданной точке $x \in G$ даже выполнено условие (28)). Поэтому неверно, что V-признак Дини по системам Прайса или Виленкина сильнее, чем даже S-признак Дини по обобщенным системам Хаара.

Благодарю профессора Т.П. Лукашенко за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортонормальных систем*, Изв. АН СССР, Сер. матем. **11** (4), 363–400 (1947).
- [2] Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах* (ЭЛМ, Баку, 1981).
- [3] Монна J.L. *Analysys non-Archimedence* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970).
- [4] Хреников А.Ю., Шелкович В.М. *Современный p-адический анализ и математическая физика. Теория и приложения* (Физматгиз, М., 2012).
- [5] Щербаков В.И. *О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам*, Вестн. МГУ Сер.: Матем., механика, №2, 37–42 (1983).
- [6] Щербаков В.И. *Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини по обобщенным системам Хаара*, Матем. заметки, **101** (3), 446–473 (2017).
- [7] Щербаков В.И. *Признак Дини–Липшица для обобщенных систем Хаара*, Изв. Саратовск. ун-та, Сер.: Матем., механ., информатика **16** (4), 435–448 (2016).

- [8] Голубов Б.И. *Об одном классе полных ортонормальных систем*, Сиб. матем. журн., **9** (2), 297–314 (1968).
- [9] Щербаков В.И. *Расходимость рядов Фурье по обобщённым системам Хаара в точках непрерывности функции*, Изв. вузов. Матем., №1, 49–68 (2016).
- [10] Price J.J. *Certain groups of orthonormal step functions*, Canad. J. Math. **9** (3), 417–425 (1957).
- [11] Chrestenson H.E. *A class of generalized Walsh's functions*, Pacific J. Math. **5** (1), 17–31 (1955).
- [12] Walsh J.L. *A closed set of normal orthogonal functions*, Amer. J. Math., **45** (1), 5–24 (1923).
- [13] Paley R.E.A.C. *A remarkable series of orthonormal functions*, Proc. London Math. Soc. **36**, 241–264 (1932).
- [14] Rademacher H. *Enige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunctionen*, Math. Ann. **87** (1)–(2), 112–130 (1922).
- [15] Качмаж С., Штейнгауз Г. *Теория ортогональных рядов* (Физматгиз, М., 1958). Дополнения Н.Я. Виленкина, §1, п. 6, с. 475–479.
- [16] Kaczmarz S., Steinhaus H. *Theorie des Orthogonalreihen* (Warszawa, Wroclaw, 1936).
- [17] Голубов Б.И., Рубинштейн А.И. *Об одном классе систем сходимости*, Матем. сб. **71** (1), 96–115 (1966).
- [18] Власова Е.А. *Ряды по обобщённым системам Хаара*; автореферат дисс. уч. степени канд. физ.-матем. наук, Москва, 1987.
- [19] Vlasova E.A. *Convergence of series with respect to generalized Haar systems*, Anal. Math. **13** (4), 339–360 (1987).
- [20] Haar A. *Zur Theorie der Orthogonalischen Functionensysteme*, Math. Ann. **69**, 331–371 (1910).
- [21] Лукомский С.Ф. *О рядах Хаара на компактной нульмерной группе*, Изв. Саратовск. ун-та. Сер.: Матем., механ., информатика **9** (1), 24–29 (2009).
- [22] Комиссарова Н.Е. *Функции Лебега по системам Хаара на нульмерных компактных группах*, Изв. Саратовск. ун-та, Сер.: Матем., механ., информатика **12** (3), 30–36 (2012).
- [23] Бердников Г.С. *Графы с контурами в кратномасштабном анализе на группах Виленкина*, Изв. Саратовск. ун-та, Сер.: Матем., механ., информатика **16** (4), 377–388 (2016).
- [24] Fine N.J. *On the Walsh function*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (3), 372–414 (1949).

Виктор Иннокентьевич Щербаков

Московский технический университет связи и информатики,

ул. Народного ополчения, д. 32, г. Москва, 123995, Россия,

e-mail: kafmathan@mail.ru (для В.И. Щербакова)

V.I. Shcherbakov

A comparison of the V- and S-Dini tests. A counterexamples on the symmetrical Dini tests by a type Haar and Walsh systems

Abstract. We show that a both conditions are important for symmetrical Dini's test by Price's and generalized Haar's systems; an execution of one of them's cannot guarantee a convergence of Fourier series for any majorants. An accordingly examples are constructed.

Keywords: abelian group, Vilenkin's group, characters system, Price's systems, generalized Haar's systems, Dirichlet's kernels, Dini's test.

Viktor Innokent'evich Shcherbakov

Moscow Technical University of Communication and Information Science,

32 Narodnogo Opolcheniya str., Moscow, 123995 Russia,

e-mail: kafmathan@mail.ru (for V.I. Shcherbakov)