Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Абашкин, И. П. Егорова, Задача Дирихле в параллелепипеде для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 10, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-10-3-14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:34:15

А.А. АБАШКИН, И.П. ЕГОРОВА

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Исследована задача Дирихле в параллелепипеде для уравнения, являющегося аналогом обобщенного двусесимметрического уравнения Гельмгольца для случая трех независимых переменных. С помощью методов спектрального анализа доказана единственность решения исследуемой задачи. Решение построено в виде двойного ряда с использованием разложения в ряд Фурье–Бесселя. Найдены достаточные условия на исходные данные задачи, при которых соответствующие ряды сходятся равномерно и решение существует.

Ключевые слова: уравнение с сингулярными коэффициентами, задача Дирихле, спектральный метод, функции Бесселя, двойной ряд.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-3-14

ВВЕДЕНИЕ

Для уравнения

$$Lu = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\mu}{x}u_x + \frac{2p}{y}u_y + \frac{2q}{z}u_z - k^2u = 0, \quad \mu < -1/2, \quad p < -3/2, \quad q < 1/2, \quad (1)$$

в параллелепипеде $D = \{(x, y, z) \mid 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$, где μ, p, q, k, a, b — заданные постоянные, рассматривается

Задача Дирихле. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y, z) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \setminus (\{z = c\} \cup \{z = 0\})) \cap C^2(D), \quad Lu \equiv 0, \quad (2)$$

$$u(0, y, z) = 0, \quad u(a, y, z) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c, \quad (3)$$

$$u(x, 0, z) = 0, \quad u(x, b, z) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq c, \quad (4)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = \varphi(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq c, \quad (5)$$

где $\varphi(x, y)$ — заданная непрерывная функция такая, что

$$\varphi(0, y) = \varphi(a, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, b) = 0.$$

Уравнение (1) является аналогом обобщенного двусесимметрического уравнения Гельмгольца для случая трех переменных, краевые задачи для различных частных случаев которого изучались многими авторами (например, [1]–[3]). Уравнения типа (1) имеют интересное свойство: вид краевых условий, при которых краевая задача однозначно разрешима, зависит от значения коэффициентов уравнения [4]. Также к уравнению (1) приводятся вырождающиеся эллиптические уравнения со степенным характером вырождения.

Спектральный метод при изучении краевой задачи для уравнения эллиптического типа с сингулярным коэффициентом был использован в статье [5]. Также отметим работы [6], [7], где спектральный метод применен для изучения краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. В статье [6] был разработан вариант спектрального метода с использованием разложения в ряд Фурье–Бесселя, который используется в данном исследовании.

В настоящей работе применен спектральный метод к изучению первой граничной задачи для уравнения с сингулярными коэффициентами в случае трех независимых переменных. Доказана теорема единственности решения исследуемой задачи и получены достаточные условия существования решения.

1. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ

Произведем разделение переменных $u(x, y, z) = V(x)W(y)N(z)$ и подставим в условия (2)–(4). Получим краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$V'' + \frac{2\mu}{x}V' + \gamma_1^2 V = 0, \quad (6)$$

$$V(x) \in C^1[0, a] \cap C^2(0, a), \quad V(0) = V(a) = 0; \quad (7)$$

$$W'' + \frac{2p}{y}W' + \gamma_2^2 W = 0, \quad (8)$$

$$W(y) \in C^1[0, b] \cap C^2(0, b), \quad W(0) = W(b) = 0; \quad (9)$$

$$N'' + \frac{2q}{z}N' - \sigma^2 N = 0, \quad (10)$$

$$N(z) \in C[0, c] \cap C^1[0, c] \cap C^2(0, c), \quad N(0) = 0, \quad (11)$$

где γ_1, γ_2 — постоянные разделения, т. е. спектральные параметры, которые подлежат определению, $\sigma = \sqrt{k^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2}$.

Общие решения уравнений (6) и (8) можно записать в виде ([8], сс. 134, 136)

$$V(x) = A_1 x^{-\mu_1} J_{-\mu_1}(\gamma_1 x) + A_2 x^{-\mu_1} Y_{\mu_1}(\gamma_1 x),$$

$$W(y) = B_1 y^{-p_1} J_{-p_1}(\gamma_2 y) + B_2 y^{-p_1} Y_{p_1}(\gamma_2 y),$$

где $J_\nu(t)$ — функция Бесселя первого рода, $Y_\nu(t)$ — функция Бесселя второго рода, $A_i, B_i, i = 1, 2$, — произвольные постоянные, $\mu_1 = \mu - 1/2$, $p_1 = p - 1/2$.

Из асимптотик функций Бесселя в окрестности нуля ([8], с.172) и условий (7) и (9) следует $A_2 = B_2 = 0$. Чтобы данные решения обращались в нуль при $x = a$ и $y = b$, необходимо $\gamma_1 = r_n/a$, $\gamma_2 = l_m/b$.

Общим решением уравнения (10) будет функция ([8], с.141)

$$N(z) = C_1 z^{-q_1} I_{-q_1}(\sigma_{nm} z) + C_2 z^{-q_1} K_{q_1}(\sigma_{nm} z),$$

где $I_\nu(t)$ и $K_\nu(t)$ — модифицированные функции Бесселя, $q_1 = q - 1/2$, C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\sigma_{nm} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{r_n}{a}\right)^2 + \left(\frac{l_m}{b}\right)^2}$.

Ввиду асимптотик модифицированных функций Бесселя ([8], с.173) и требования обращения в нуль функции $N(z)$ при $z = 0$ получим $C_2 = 0$.

Таким образом, частные решения уравнения (1) вида

$$u(x, y, z) = V_n(x)W_m(y)N_{nm}(z), \quad (12)$$

удовлетворяющие условиям (2)–(4), определяются формулами

$$V_n(x) = x^{-\mu_1} J_{-\mu_1} \left(\frac{r_n}{a} x \right), \quad (13)$$

$$W_m(y) = y^{-p_1} J_{-p_1} \left(\frac{l_m}{b} y \right), \quad (14)$$

$$N_{nm}(z) = C_{nm} z^{-q_1} I_{-q_1}(\sigma_{nm} z). \quad (15)$$

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Теорема 1. *Если решение задачи (2)–(5) существует, то оно единственно.*

Доказательство. В случае $k \neq 0$ единственность решения задачи (2)–(5) следует из принципа экстремума для эллиптических уравнений. Установим единственность решения задачи методом спектрального анализа, следуя работам [9] и [6].

Пусть $u(x, y, z)$ — решение задачи (2)–(5).

Системы собственных функций $V_n(x)$ и $W_m(y)$ не являются ортогональными, поэтому необходимо найти собственные функции $V_n^*(x)$, $W_m^*(y)$ краевых задач, сопряженных к (6)–(9).

Для этого рассмотрим интеграл

$$\int_0^a V_n^* L_x(v(x)) dx = 0,$$

где $L_x(v(x)) = v''(x) + \frac{2\mu}{x} v'(x)$,

$$v(x) \in C^1[0, a] \cup C^2(0, a), \quad v(0) = v(a) = 0. \quad (16)$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^a V_n^*(x) \left(v''(x) + \frac{2\mu}{x} v'(x) \right) dx = \\ = V_n^*(a) v'(a) - V_n^*(0) v'(0) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\mu}{x} V_n^*(x) v(x) \right) + \int_0^a v(x) L_x^*(V_n^*(x)) dx, \end{aligned} \quad (17)$$

где $L_x^*(V_n^*(x)) = V_n^{*''}(x) - \frac{2\mu}{x} V_n^{*'} + \frac{2\mu}{x^2} V_n^*(x)$.

Чтобы внеинтегральные слагаемые были равны нулю, достаточно потребовать выполнения условий

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2\mu}{x} V_n^*(x) \quad \text{конечен}, \quad V_n^*(a) = 0. \quad (18)$$

Функции $V_n^*(x)$ как собственные функции оператора L_x^* должны являться решениями уравнения

$$V_n^{*''}(x) - \frac{2\mu}{x} V_n^{*'} + \left(\left(\frac{r_n}{a} \right)^2 - \frac{2\mu}{x^2} \right) V_n^*(x) = 0. \quad (19)$$

Функция $V_n^*(x) = x^{\mu_1+1} J_{-\mu_1} \left(\frac{r_n}{a} x \right)$ является решением уравнения (19) ([8], с.136) и удовлетворяет условиям (18) в силу асимптотики функции Бесселя $J_\nu(t) = O(t^\nu)$, $t \rightarrow 0$, и определения чисел r_n .

Аналогичным образом получаем функции $W_m^*(y) = y^{p_1+1} J_{-p_1} \left(\frac{l_m}{b} y \right)$.

Для таким образом определенных функций $V_n^*(x)$ и $W_m^*(y)$ верны равенства

$$\int_0^a V_n^*(x) L_x(v(x)) dx = \int_0^a v(x) L_x^*(V_n^*(x)) dx = -\frac{r_n}{a} \int_0^a V_n^*(x) v(x) dx, \quad (20)$$

$$\int_0^b W_m^*(y) L_y(w(y)) dy = \int_0^b w(y) L_y^*(W_m^*(y)) dy = -\frac{l_m}{b} \int_0^b W_m^*(y) w(y) dy. \quad (21)$$

Используя соотношение (20), приведем равенство

$$0 = \int_0^a V_n^*(x) L u dx = \int_0^a V_n^*(x) \left(L_x u + L_y u + u_{zz} + \frac{2q}{z} u_z - k^2 u \right) dx dy$$

к виду

$$\begin{aligned} \int_0^a u_{yy} V_n^*(x) dx + \int_0^a u_{zz} V_n^*(x) dx + \frac{2p}{y} \int_0^a u_y V_n^*(x) dx + \\ + \frac{2q}{z} \int_0^a u_z V_n^*(x) dx - \left(k^2 + \left(\frac{r_n}{a} \right)^2 \right) \int_0^a u V_n^*(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Для функции

$$u_n(y, z) = \frac{1}{(V_n(x), V_n^*(x))} \int_0^a u V_n^*(x) dx \quad (23)$$

уравнение (22) перепишется в форме

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{2p}{y} \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{2q}{z} \frac{\partial u_n}{\partial z} - \left(k^2 + \left(\frac{r_n}{a} \right)^2 \right) u_n = 0.$$

Поэтому верно равенство

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^b W_m^*(y) \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{2p}{y} \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{2q}{z} \frac{\partial u_n}{\partial z} - \left(k^2 + \left(\frac{r_n}{a} \right)^2 \right) u_n \right) dy = \\ = \int_0^b W_m^*(y) \left(L_y(u_n) + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{2q}{z} \frac{\partial u_n}{\partial z} - \left(k^2 + \left(\frac{r_n}{a} \right)^2 \right) u_n \right) dy. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя формулу (21), равенство (24) приведем к виду

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} W_m^*(y) dy + \frac{2q}{z} \int_0^a \int_0^b u_{zz} V_n^*(x) W_m^*(y) dx dy - \\ - \left(k^2 + \left(\frac{r_n}{a} \right)^2 + \left(\frac{l_m}{b} \right)^2 \right) \int_0^a \int_0^b u V_n^*(x) W_m^*(y) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Для функции

$$\begin{aligned} u_{nm}(z) &= \frac{1}{(V_n, V_n^*) \cdot (W_m, W_m^*)} \int_0^a \int_0^b v V_n^*(x) W_m^*(y) dx dy = \\ &= \frac{4}{a^2 b^2 J_{-\mu_1+1}^2(r_n) J_{-p_1+1}^2(l_m)} \int_0^a \int_0^b v V_n^*(x) W_m^*(y) dx dy \end{aligned} \quad (26)$$

равенство (25) можно записать в виде уравнения

$$u_{nm}'' + \frac{2q}{z} u_{nm}' - \sigma_{nm}^2 u_{nm} = 0. \quad (27)$$

Из формул (3) и (4) получаем условия

$$u_{nm}(0) = 0, \quad (28)$$

$$u_{nm}(c) = \varphi_{nm}, \quad (29)$$

где

$$\varphi_{nm} = \frac{4}{a^2 b^2 J_{-\mu_1+1}^2(r_n) J_{-p_1+1}^2(l_m)} \int_0^a x^{\mu_1+1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) dx \int_0^b \varphi(x, y) y^{p_1+1} J_{-p_1}\left(\frac{l_m}{b}y\right) dy. \quad (30)$$

Уравнение (27) и условие (28) совпадают с уравнением (10) и условием (11), а потому функцию $u_{nm}(z)$ можно представить в виде

$$u_{nm}(z) = C_{nm} z^{-q_1} I_{-q_1}(\sigma_{nm} z). \quad (31)$$

Подставив функцию (31) в равенство (30), с учетом (29) получим

$$C_{nm} = \frac{\varphi_{nm} c^{q_1}}{I_{-q_1}(\sigma_{nm} c)}. \quad (32)$$

Пусть $\varphi(x, y) \equiv 0$. Тогда из формул (30)–(32) следует $u_{nm}(z) \equiv 0$. Из последнего тождества по определению функции $u_{nm}(z)$ (26) получаем

$$\int_0^b u_n(y, z) y^{p_1+1} J_{-p_1}\left(\frac{l_m}{b}y\right) dy = 0.$$

Отсюда в силу полноты системы функций Бесселя в $L_2[0, b]$ ([10], с.315) следует $u_n(y, z) = 0$ почти всюду на $[0, b]$ при любом $z \in [0, c]$. Вследствие непрерывности $u_n(y, z)$ получаем $u_n(y, z) \equiv 0$. Тогда из равенства (23) и определения функции $V_n^*(x)$ имеем

$$\int_0^a u(x, y, z) x^{\mu_1+1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) dx = 0.$$

Отсюда, из полноты системы функций Бесселя и непрерывности функции $u(x, y, z)$ следует $u(x, y, z) \equiv 0$. $\square$

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть функция $x^{\mu_1} y^{\mu_2} \varphi(x, y) \in C^1([0, a] \times [0, b])$, тогда ее можно представить в виде ряда ([8], с.165)

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(y) V_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{nm} W_m(y), \quad (33)$$

где

$$\varphi_n(y) = \frac{2}{a^2 J_{-\mu_1+1}^2(r_n)} \int_0^a \varphi(x, y) x^{\mu_1+1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a} x\right) dx,$$

а коэффициенты φ_{nm} определяются формулой (30).

Покажем, что сумма повторного ряда (33) равна сумме двойного ряда

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{nm} V_n(x) W_m(y). \quad (34)$$

Под сходимостью двойных рядов будем понимать сходимость по прямоугольникам.

Лемма 1. Пусть функция $f(t, s)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $f(t, s)$ имеет ограниченное изменение по переменной t на отрезке $[0, a]$ для любого фиксированного значения s из $[0, b]$;

2) функции $f(0, s)$ и $f(a, s)$ имеют ограниченное изменение на отрезке $[0, b]$;

3) изменение функции $f(t, s)$ по переменной t на отрезке $[0, a]$ для фиксированного значения s $\left(\int_0^a f(t, s) dt \right)$ как функция от s имеет ограниченное изменение на $[0, b]$.

Тогда справедлива асимптотика

$$\int_0^b s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_0^a t^{1/2} f(s, t) J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt = O\left(\lambda_1^{-3/2} \cdot \lambda_2^{-1/2}\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow +\infty, \quad (35)$$

где $\nu_1, \nu_2 \leq -1/2$.

Доказательство. Положим $f(x, y) = \psi_1(t, s) - \psi_2(t, s)$, где $\psi_1(t, s) = \int_0^t f(t, s) dt$, $\psi_2(t, s) =$

$\psi_1(t, s) - f(x, y)$. Функции $\psi_1(t, s)$, $\psi_2(t, s)$ возрастают по t на отрезке $[0, a]$ при любом фиксированном значении s из отрезка $[0, b]$, тогда по второй теореме о среднем существует такая функция $0 < \xi_1(s) < a$, что верно равенство

$$\int_0^a \psi_1(t, s) dt = \psi_1(0, s) \int_0^{\xi_1(s)} t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt + \psi_1(a, s) \int_{\xi_1(s)}^a t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt.$$

Функция $\psi_1(0, s)$ тождественно равна нулю по построению, функция $\psi_1(a, s)$ имеет ограниченную вариацию по предположению леммы, поэтому ее можно представить в виде разности двух монотонных функций $\psi_1(a, s) = \psi_{11}(s) - \psi_{12}(s)$, для каждой из которых применима вторая теорема о среднем. Поэтому интеграл

$$I_1(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^b s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_0^a t^{1/2} \psi_1(s, t) J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt =$$

$$= \int_0^b \psi_1(0, s) s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_0^{\xi(s)} t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt + \int_0^b \psi_1(a, s) s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_{\xi(s)}^a t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt \quad (36)$$

преобразуем к виду

$$\begin{aligned} I_1(\lambda_1, \lambda_2) &= \int_0^b [\psi_{11}(s) - \psi_{12}(s)] s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_{\xi_1(s)}^a t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt = \\ &= \psi_{11}(0) \int_0^{\xi_2} s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_{\xi_1(s)}^a t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt + \psi_{11}(b) \int_{\xi_2}^b s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_{\xi_1(s)}^a t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt - \\ &\quad - \psi_{12}(0) \int_0^{\xi_3} s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_{\xi_1(s)}^a t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt - \psi_{12}(b) \int_{\xi_3}^b s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_{\xi_1(s)}^a t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Рассмотрим первое слагаемое из правой части равенства (37) и проведем в нем замену переменной $\eta = \lambda_1 t$, $\tau = \lambda_2 s$. Получим

$$\psi_{11}(0) \int_0^{\xi_2} s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_{\xi_1(s)}^a t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt = \psi_{11}(0) \lambda_1^{-3/2} \lambda_2^{-3/2} \int_0^{\lambda_2 \xi_2} \tau^{1/2} J_{\nu_2}(\tau) d\tau \int_{\lambda_1 \xi_1(\tau/\lambda_2)}^{\lambda_1 a} \eta^{1/2} J_{\nu_1}(\eta) d\eta. \quad (38)$$

Для оценки асимптотического поведения интеграла в правой части равенства (38) при больших значениях λ_1 и λ_2 рассмотрим интеграл, где функции Бесселя заменены первыми членами их асимптотических разложений для больших значений переменной ([8], с.157). Ввиду ограниченности функций $\tau^{1/2} J_{\nu_2}(\tau)$ и $\eta^{1/2} J_{\nu_1}(\eta)$ будем иметь ту же асимптотику, что и исходный интеграл,

$$\begin{aligned} &\int_0^{\lambda_2 \xi_2} \tau^{1/2} \left(\frac{2}{\pi \tau} \right)^{1/2} \cos \left(\tau - \frac{\pi \nu_2}{2} - \frac{\pi}{4} \right) d\tau \int_{\lambda_1 \xi_1(\tau/\lambda_2)}^{\lambda_1 a} \eta^{1/2} \left(\frac{2}{\pi \eta} \right)^{1/2} \cos \left(\eta - \frac{\pi \nu_1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) d\eta = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\lambda_2 \xi_2} \cos \left(\tau - \frac{\pi \nu_2}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \times \\ &\quad \times [\sin(\lambda_1 a - \pi \nu_1/2 - \pi/4) - \sin(\lambda_1 \xi_1(\tau/\lambda_2) - \pi \nu_1/2 - \pi/4)] d\tau = O(\lambda_2). \end{aligned} \quad (39)$$

В силу равенства (38) и асимптотики (39)

$$\psi_{11}(0) \int_0^{\xi_2} s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_{\xi_1(s)}^a t^{1/2} J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt = O\left(\lambda_1^{-3/2} \cdot \lambda_2^{-1/2}\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow +\infty.$$

Остальные три интеграла из правой части равенства (37) оцениваются аналогично, поэтому верна асимптотика

$$I_1(\lambda_1, \lambda_2) = O\left(\lambda_1^{-3/2} \cdot \lambda_2^{-1/2}\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow +\infty. \quad (40)$$

Учитывая, что функции $\psi_2(0, s) = f(0, s)$ и $\psi_2(a, s) = \psi_1(a, s) - f(a, s)$ имеют ограниченное изменение, подобную оценку можно провести и для интеграла

$$I_2(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^b s^{1/2} J_{\nu_2}(\lambda_2 s) ds \int_0^a t^{1/2} \psi_2(s, t) J_{\nu_1}(\lambda_1 t) dt = O\left(\lambda_1^{-3/2} \cdot \lambda_2^{-1/2}\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 \rightarrow +\infty. \quad (41)$$

Из равенств (40) и (41) следует утверждение леммы. $\square$

Следствие 1. Для справедливости асимптотики (35) достаточно существования непрерывных производных $f_s(t, s)$ $f_{ts}(t, s)$ на множестве $[0, a] \times [0, b]$.

Доказательство. Покажем, что в этом случае функция $f(s, t)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Из существования производной по t следует, что для $f(t, s)$ выполнено первое условие леммы. Из существования производной по s — второе условие.

Полное изменение $\int_0^a f(t, s) ds$ в данном случае можно представить в виде $\int_0^a |f_t(s, t)| dt$,

изменение данного выражения как функции от s не больше числа $abM_{f_{ts}}$, где $M_{f_{ts}}$ — наибольшее по модулю значение $f_{ts}(t, s)$ на множестве $[0, a] \times [0, b]$. Поэтому третье условие леммы также выполнено. $\square$

Лемма 2. Пусть функция $\varphi(x, y) \in C^1([0, a] \times [0, b])$ удовлетворяет следующим условиям:
1) на множестве $[0, a] \times [0, b]$ существует смешанная производная φ_{xy} такая, что функция $x^\mu y^{p-1}(y\varphi_{xy}(x, y) - \varphi_{xy}(x, y))$ удовлетворяет условиям леммы 1;
2) $\varphi_x(x, 0) \equiv \varphi_x(x, b) \equiv \varphi_{xy}(x, 0) \equiv 0$.

Тогда существует такая постоянная P_1 , что верна оценка

$$|\varphi_{nm}| \leq P_1 n^{-3/2} m^{-3/2}.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл в определении коэффициентов φ_{nm} (30) и проинтегрируем по частям один раз по x и два раза по y . Используя формулу дифференцирования функции Бесселя

$$(t^\nu J_\nu(t))' = -t^\nu J_{\nu-1}(t), \quad (42)$$

получим

$$\begin{aligned} & \int_0^a x^{\mu_1+1} J_{-\mu_1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) dx \int_0^b \varphi(x, y) y^{p_1+1} J_{-p_1}\left(\frac{l_m}{b}y\right) dy = \\ &= -\frac{a}{r_n} \int_0^a x^{\mu_1+1} J_{-\mu_1-1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) dx \int_0^b \varphi_x(x, y) y^{p_1+1} J_{-p_1}\left(\frac{l_m}{b}y\right) dy = \\ &= \frac{ab}{r_n l_m} \int_0^a x^{\mu_1+1} J_{-\mu_1-1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) dx \int_0^b \varphi_{xy}(x, y) y^{p_1+1} J_{-p_1-1}\left(\frac{l_m}{b}y\right) dy = \\ &= \frac{ab^{p_1+3}}{r_n l_m^2} J_{-p_1-2}(l_m) \int_0^a \varphi_{xy}(x, b) x^{\mu_1+1} J_{-\mu_1-1}\left(\frac{r_n}{a}x\right) dx - \end{aligned}$$

$$-\frac{ab}{r_n l_m^2} \int_0^a x^{\mu_1+1} J_{-\mu_1-1} \left(\frac{r_n}{a} x \right) dx \int_0^b (y \varphi_{xy}(x, y) - \varphi_{xy}(x, y)) y^{p_1} J_{-p_1-2} \left(\frac{l_m}{b} y \right) dy.$$

Первый из интегралов правой части полученного равенства имеет порядок $O(r_n^{-3/2})$ ([11], с.653), второй интеграл имеет асимптотику $O(r_n^{-3/2} l_m^{-1/2})$ по лемме 1. Также верны соотношения $J_{-p_1-2}(l_m) = O(l_m^{-1/2})$, $J_{-p_1+1}(l_m) = O(l_m^{-1/2})$, $J_{-\mu_1+1}(l_m) = O(l_m^{-1/2})$. Корни функции Бесселя имеют следующее поведение на бесконечности ([11], с.558):

$$r_n \approx \pi(n - \mu_1/2 - 1/4), \quad l_m \approx \pi(m - p_1/2 - 1/4), \quad (43)$$

откуда получим утверждение леммы. $\square$

Лемма 3. Пусть $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$, тогда существуют такие постоянные P_2, P_3, P_4, P_5 , что для достаточно больших значений n и m верны оценки

$$|V_n(x)| \leq P_2, \quad |V'_n(x)| \leq P_3 n, \quad |W_m(y)| \leq P_4, \quad |W'_m(y)| \leq P_5 m. \quad (44)$$

Доказательство. По формуле дифференцирования функции Бесселя (42) имеем

$$V'_n(x) = \frac{r_n}{a} x^{-\mu_1} J_{-\mu_1-1} \left(\frac{r_n}{a} x \right).$$

Согласно асимптотикам функции Бесселя $J_\nu(t) = O(t^{-1/2})$ при $t \rightarrow +\infty$ и $J_\nu(t) = O(t^\nu)$ при $t \rightarrow 0$. Поэтому при $\nu \geq 0$ функция Бесселя ограничена на множестве $[0, +\infty)$. Так как $-\mu_1 \geq 1$, то функции $J_{-\mu_1}(t)$ и $J_{-\mu_1-1}(t)$ ограничены.

Учитывая асимптотику корней функции Бесселя (43) и ограниченность функции Бесселя, получаем требуемые оценки для $V_n(x)$, $V'_n(x)$.

Утверждения леммы относительно функций $W_m(y)$ и $W'_m(y)$ доказываются аналогично. $\square$

Пусть функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Произведем оценку общего члена ряда (34) с использованием результатов лемм 2 и 3

$$|\varphi_{nm} V_n(x) W_m(y)| \leq P_1 P_2 P_4 n^{-3/2} m^{-3/2}.$$

Отсюда следует

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{nm} V_n(x) W_m(y)| \leq P_1 P_2 P_4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2}. \quad (45)$$

Так как оба ряда справа в неравенстве (45) сходятся, то ряд (34) сходится равномерно, а значит, равен повторному ряду (33).

Формальное решение задачи Дирихле, удовлетворяющее условиям (2)–(4), дано формулами (12)–(15). Поэтому, учитывая разложение (33), формальное решение задачи (2)–(5) представимо в виде (12)–(15) с коэффициентами C_{nm} , выражаемыми формулой (32). Таким образом, формальное решение задачи (2)–(5) определяется формулой

$$u(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{nm} N_{nm}(z) V_n(x) W_m(y), \quad (46)$$

где $V_n(x)$ определяется формулой (13), $W_m(y)$ — (14),

$$N_{nm}(z) = \frac{z^{-q_1} I_{-q_1}(\sigma_{nm} z)}{c^{-q_1} I_{-q_1}(\sigma_{nm} c)}.$$

Произведем необходимые оценки величин $N_{nm}(z)$, $N'_{nm}(z)$, $N''_{nm}(z)$, $V_n''(x)$, $W_m''(y)$.

Лемма 4. Пусть $x \in [\varepsilon, a]$, $y \in [\varepsilon, b]$, где $0 < \varepsilon < \min\{a, b, c\}$, тогда существуют постоянные P_6 и P_7 такие, что для достаточно больших номеров n и m верны оценки

$$|V_n''(x)| \leq P_6 n^2, \quad |W_m''(y)| \leq P_7 m^2.$$

Доказательство. Пользуясь формулой (42), вычислим

$$V_n''(x) = \frac{r_n}{a} x^{-\mu_1-1} J_{-\mu_1-1} \left(\frac{r_n}{a} x \right) + \frac{r_n^2}{a^2} x^{-\mu_1} J_{-\mu_1-2} \left(\frac{r_n}{a} x \right).$$

Множеством значений $t = \frac{r_n}{a} x$ при $x \geq \varepsilon$ будет луч $[\frac{r_n}{a} \varepsilon, +\infty)$. Как было показано ранее, на этом множестве функция $J_{-\mu_1-2}(t)$ ограничена. Отсюда с учетом асимптотики (43) следует утверждение леммы.

Для $W_m''(y)$ доказательство аналогично. $\square$

Лемма 5. Пусть $y \in [\varepsilon, c - \varepsilon]$. Тогда существуют постоянные P_8 , P_9 и P_{10} такие, что для достаточно больших номеров n и m верны оценки

$$|N_{nm}(z)| \leq P_8 e^{-\frac{\varepsilon \pi n}{2a}} e^{-\frac{\varepsilon \pi m}{2b}}, \quad |N'_{nm}(z)| \leq P_9 n m e^{-\frac{\varepsilon \pi n}{2a}} e^{-\frac{\varepsilon \pi m}{2b}},$$

$$|N''_{nm}(z)| \leq P_{10} n^2 m^2 e^{-\frac{\varepsilon \pi n}{2a}} e^{-\frac{\varepsilon \pi m}{2b}}.$$

Доказательство. Пользуясь формулой дифференцирования ([8], с. 141)

$$(t^{-\nu} I_{\nu}(t))' = t^{-\nu} I_{\nu+1}(t),$$

вычислим

$$N'_{nm}(z) = \frac{\sigma_{nm} z^{-q_1} I_{-q_1-1}(\sigma_{nm} z)}{c^{-q_1} I_{-q_1}(\sigma_{nm} c)}, \quad (47)$$

$$N''_{nm}(z) = \frac{\sigma_{nm} z^{-q_1-1} I_{-q_1-1}(\sigma_{nm} z) + \sigma_{nm}^2 z^{-q_1} I_{-q_1-2}(\sigma_{nm} z)}{c^{-q_1} I_{-q_1}(\sigma_{nm} c)}.$$

Модифицированные функции Бесселя могут иметь лишь конечное число действительных нулей, что следует из формулы $I_{\nu}(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_{\nu}(ze^{i\pi/2})$ и того, что функция $J_{\nu}(z)$ имеет лишь конечное число комплексных нулей ([8], с. 162). Пусть g_{ν} — наибольший нуль функции $I_{\nu}(z)$, тогда для n и m , подчиняющихся неравенству $\sigma_{nm} > \max\{g_{-q_1-1}/\varepsilon, g_{-q_1-2}/\varepsilon, g_{-q_1-3}/\varepsilon\}$, функции $z^{-q_1} I_{-q_1}(\sigma_{nm} z)$, $z^{-q_1} I_{-q_1-1}(\sigma_{nm} z)$, $z^{-q_1-1} I_{-q_1-1}(\sigma_{nm} z)$, $z^{-q_1-1} I_{-q_1-2}(\sigma_{nm} z)$ монотонны на отрезке $[\varepsilon, c - \varepsilon]$, так как их производные нигде не обращаются в нуль. Из асимптотики модифицированной функции Бесселя

$$I_{\nu}(t) \approx e^t / (2\pi t)^{1/2}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (48)$$

следует, что данные функции положительны и возрастают, поэтому для таких значений n и m верны неравенства

$$|N_{nm}(z)| \leq I_{-q_1}(\sigma_{nm}(c - \varepsilon)) / I_{-q_1}(\sigma_{nm} c),$$

$$|N'_{nm}(z)| \leq \sigma_{nm} I_{-q_1-1}(\sigma_{nm}(c - \varepsilon)) / I_{-q_1}(\sigma_{nm} c),$$

$$|N''_{nm}(z)| \leq \frac{\sigma_{nm}(c - \varepsilon)^{-q_1-1} I_{-q_1-1}(\sigma_{nm}(c - \varepsilon)) + \sigma_{nm}^2 c^{-q_1} I_{-q_1-2}(\sigma_{nm}(c - \varepsilon))}{c^{-q_1} I_{-q_1}(\sigma_{nm} c)}.$$

В силу (43) и (48) существуют такие постоянные P_8 , P'_9 , P_9 , P'_{10} и P_{10} , что

$$|N_{nm}(z)| \leq P_8 e^{-\varepsilon \sqrt{(\pi n/a)^2 + (\pi m/b)^2}} \leq P_8 e^{-\frac{\varepsilon \pi n}{2a}} e^{-\frac{\varepsilon \pi m}{2b}},$$

$$|N'_{nm}(z)| \leq P'_9 \sqrt{(\pi n/a)^2 + (\pi m/b)^2} e^{-\varepsilon \sqrt{(\pi n/a)^2 + (\pi m/b)^2}} \leq P_9 n m e^{-\frac{\varepsilon \pi n}{2a}} e^{-\frac{\varepsilon \pi m}{2b}},$$

$$|N''_{nm}(z)| \leq P'_{10} \left((\pi n/a)^2 + (\pi m/b)^2 \right) e^{-\varepsilon \sqrt{(\pi n/a)^2 + (\pi m/b)^2}} \leq P_{10} n^2 m^2 e^{-\frac{\varepsilon \pi n}{2a}} e^{-\frac{\varepsilon \pi m}{2b}}. \quad \square$$

Лемма 6. При $z \in [0, c]$ верна оценка $|N_{nm}(z)| < 1$.

Доказательство. Производная функции $N_{nm}(z)$, определяемая формулой (47), не имеет действительных нулей, так как их не имеет функция $I_\nu(t)$ при $\nu > -1$ ([8], с.163). Из асимптотики (48) получаем, что производная положительна, а значит, функция $I_\nu(z)$ монотонно возрастает, не имеет действительных нулей и положительна, поэтому

$$|N_{nm}(z)| \leq N_{nm}(c) = 1. \quad \square$$

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условиям леммы 2, тогда решение задачи (2)–(5) существует.

Доказательство. Достаточно доказать следующие утверждения: 1) ряд (46) сходится равномерно на $\bar{D}$, 2) ряды, полученные из (46) однократным почленным дифференцированием, равномерно сходятся на множествах $D_{\varepsilon 1} = \bar{D} \cap \{\varepsilon \leq z \leq c - \varepsilon\}$, а двукратным почленным дифференцированием — на множествах $D_{\varepsilon 2} = \{(x, y, z) \mid \varepsilon < x < a, \varepsilon < y < b, \varepsilon < z < c - \varepsilon\}$.

1) Ряд (46) согласно леммам 2, 3, 6 оценим на множестве $\bar{D}$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |\varphi_{nm} N_{nm}(z) V_n(x) W_m(y)| \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} P_1 P_2 P_4 n^{-3/2} m^{-3/2} = P_1 P_2 P_4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2}.$$

Так как оба множителя в правой части неравенства сходятся, то ряд (46) сходится равномерно.

2) Согласно леммам 3 и 5 существует такое число P_{11} , что на множестве $D_{\varepsilon 1}$ ряды, полученные из (46) однократным почленным дифференцированием, можно мажорировать сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} P_{11} n^2 m^2 e^{-\frac{\varepsilon \pi n}{2a}} e^{-\frac{\varepsilon \pi m}{2b}} = P_{11} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{\varepsilon \pi n}{2a}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-\frac{\varepsilon \pi m}{2b}}. \quad (49)$$

В силу лемм 4 и 5 подберем такую постоянную P_{12} , что полученные из (46) двукратным почленным дифференцированием на множествах $D_{\varepsilon 2}$ ряды мажорирует ряд

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} P_{12} n^4 m^4 e^{-\frac{\varepsilon \pi n}{2a}} e^{-\frac{\varepsilon \pi m}{2b}} = P_{12} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-\frac{\varepsilon \pi n}{2a}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m^4 e^{-\frac{\varepsilon \pi m}{2b}}. \quad (50)$$

Из сходимости множителей в правых частях равенств (49) и (50) следует утверждение теоремы. $\square$

Из следствия леммы 1 получаем

Следствие 2. Для существования решения задачи Дирихле (2)–(5) достаточно, чтобы на множестве $[0, a] \times [0, b]$ существовали непрерывные функции $x^\mu y^p \varphi_{xyxy}$, $x^\mu y^p \varphi_{xyuy}$, $x^\mu y^{p-1} \varphi_{xyxy}$, $x^\mu y^{p-1} \varphi_{xyuy}$ и выполнялись условия $\varphi_x(x, 0) \equiv \varphi_x(x, b) \equiv \varphi_{xy}(x, 0) \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Маричев О.И. *Сингулярные краевые задачи для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца*, ДАН СССР **230** (3), 523–526 (1976).
- [2] Лернер М.Е., Репин О.А. *О задаче Дирихле для обобщенного двuosесимметрического уравнения Гельмгольца*, Вестн. Самарск. Техн. Ун-та. Сер. «Физ.-матем. науки» **6**, 5–8 (1998).
- [3] Салахитдинов М.С., Хасанов А. *Краевая задача ND_1 для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца*, Докл. Адыгейск. (Черкеск.) Междунар. АН **13** (1), 109–116 (2011).
- [4] Абашкин А.А. *Об одной весовой краевой задаче в бесконечной полуполосе для двuosесимметрического уравнения Гельмгольца*, Изв. вузов. Матем. **6**, 3–12 (2013).
- [5] Моисеев Е.И. *О разрешимости одной нелокальной краевой задачи*, Дифференц. уравнения **11**, 1565–1567 (2001).
- [6] Сабитов К.Б., Вагапова Э.В. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольнике*, Дифференц. уравнения **49** (1), 68–78 (2013).
- [7] Сабитов К.Б., Сафина Р.М. *Первая граничная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом*, Изв. РАН. Сер. матем. **82** (2), 79–112 (2018).
- [8] Лебедев Н.Н. *Специальные функции* (Лань, С.-Петербург, 2010).
- [9] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области*, Докл. РАН **413** (1), 23–26 (2007).
- [10] Сабитов К.Б. *Уравнения математической физики* (Физматлит, М., 2013).
- [11] Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функций* (Ин. лит., М., 1949).

Антон Александрович Абашкин

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, д. 244, г. Самара, 443100, Россия,

e-mail: samcocaa@rambler.ru

Ирина Петровна Егорова

Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, д. 244, г. Самара, 443100, Россия,

e-mail: ira.egorova81@yandex.ru

A.A. Abashkin and I.P. Egorova

Dirichlet problem in parallelepiped for elliptic equation with three singular coefficients

Abstract. For analog Helmholtz biaxisymmetric equation for the case of three variable, we consider Dirichlet problem in parallelepiped. We prove uniqueness of Dirichlet problem solution using spectral analysis methods. We construct the Dirichlet problem solution as double series. In constructing the solutions we use Fourier-Bessel series. We find boundary function the conditions, then the corresponding series converges uniformly.

Keywords: equation with singular coefficients, Dirichlet problem, spectral method, Bessel functions, double row.

Anton Aleksandrovich Abashkin

Samara State Technical University
244 Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100, Russia,

e-mail: samcocaa@rambler.ru

Irina Petrovna Egorova

Samara State Technical University
244 Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100, Russia,

e-mail: ira.egorova81@yandex.ru