Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Калиниченко, М. А. Плиев, Равенство треугольника в гильбертовых A -модулях, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 10, 38–45

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-10-38-45>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:34:27

А.В. КАЛИНИЧЕНКО, М.А. ПЛИЕВ

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА В ГИЛЬБЕРТОВЫХ A -МОДУЛЯХ

Аннотация. Установлено, что для произвольных элементов x и y гильбертова A -модуля M над локальной C^* -алгеброй A обобщенное равенство треугольника $|x + y| = |x| + |y|$ выполняется тогда и только тогда, когда $\langle x, y \rangle = |x||y|$.

Ключевые слова: локальная C^* -алгебра, гильбертов A -модуль, локальное гильбертово пространство, модульно компактный оператор, *-гомоморфизм, равенство треугольника.

УДК: 517.98: 519.46

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-38-45

ВВЕДЕНИЕ

Многие классические неравенства анализа, справедливые для чисел и функций, допускают обобщение для некоммутативных матриц и операторов. В последние годы операторные аналоги различных классических формул были установлены в ряде работ [1]–[3]. Стоит отметить, что прямой перенос известных формул для некоммутативных переменных часто бывает невозможен. Так обстоит дело с хорошо известным неравенством треугольника для модуля $|x + y| \leq |x| + |y|$, справедливым как в числовых полях $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, так и в классических функциональных пространствах непрерывных и измеримых функций $C[0, 1]$ и $L_p[0, 1]$ ($0 \leq p \leq \infty$). Данное неравенство в общем случае нарушается уже в простейшей некоммутативной алгебре $M_2(\mathbb{C})$ квадратных 2×2 комплексных матриц. В качестве матриц x и y , для которых неравенство не выполняется, следует взять

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подробности можно найти в [4]. Напомним, что $|x| = (x^*x)^{1/2}$ для любой матрицы $x \in M_n(\mathbb{C})$. Тем не менее неравенство треугольника для любой пары $x, y \in M_n(\mathbb{C})$ справедливо в следующей форме:

$$|x + y| \leq u|x|u^* + v|y|v^*,$$

где u, v — некоторые унитарные матрицы, зависящие от x и y ([5]). Равенство треугольника в виде $|x + y| = |x| + |y|$ для элементов операторных алгебр и модулей изучалось в работах [6], [7].

Поступила в редакцию 29.08.2018, после доработки 29.08.2018. Принята к публикации 19.12.2018.

Благодарности. М.А. Плиев поддержан грантом Российского фонда фундаментальных исследований 17-51-12064.

В настоящей статье продолжим данную линию исследований и найдем критерий выполнения равенства треугольника для произвольных элементов x, y гильбертова A -модуля $\mathcal{M}$ над локальной C^* -алгеброй A .

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Цель этого раздела — зафиксировать терминологию и используемые в тексте обозначения. Стандартный источник по теории C^* -алгебр — монография [8]. Все необходимые сведения о локальных C^* -алгебрах и гильбертовых A -модулях над ними можно найти в [9], [10]. Все алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел.

Всюду ниже будем полагать, что внутренние произведения сопряженно линейны по первой переменной и линейны по второй переменной. Пространство линейных, непрерывных операторов, действующих из гильбертова пространства H в гильбертово пространство K , обозначается через $L(H, K)$ и $L(H) := L(H, H)$.

Пусть A — инволютивная алгебра и $p : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ — полунорма на A , удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $p(xy) \leq p(x)p(y)$ для любых $x, y \in A$,
- 2) $p(x) = p(x^*)$ для любого $x \in A$.

Если, кроме того, для любого $x \in A$ справедливо равенство $p(x^*x) = p(x)^2$, то p называется C^* -полунормой. Инволютивная топологическая алгебра, полная относительно отделимой топологии, задаваемой разделяющим, направленным семейством C^* -полунорм $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, называется *локальной C^* -алгеброй*. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Каждая C^* -алгебра является локальной C^* -алгеброй.

Пример 2. Каждая замкнутая $*$ -подалгебра локальной C^* -алгебры также является локальной C^* -алгеброй.

Пример 3. Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство и пусть $C(Q)$ — алгебра непрерывных комплекснозначных функций, заданных на Q . Для каждого компактного множества $K \subset Q$ введем полунорму

$$p_K(f) := \sup_{x \in K} |f(x)|, \quad f \in C(Q).$$

Тогда p_K будет C^* -полунормой и топологическая алгебра $C(Q)$ с топологией, задаваемой разделяющим, направленным семейством полунорм, является локальной C^* -алгеброй.

Пример 4. Пусть Λ — частично упорядоченное, направленное вверх индексное множество, $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство гильбертовых пространств таких, что $H_\lambda \subset H_\mu$ и

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda = \langle \cdot, \cdot \rangle_\mu|_{H_\lambda}, \quad \lambda \leq \mu,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ — скалярное произведение в пространстве H_λ , $\lambda \in \Lambda$. Рассмотрим локально выпуклое пространство

$$\mathcal{H} := \lim_{\rightarrow} H_\lambda = \bigcup_{\lambda} H_\lambda.$$

Это пространство с топологией индуктивного предела называется *локальным гильбертовым пространством*. Линейный оператор $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется *непрерывным*, если имеет место представление

$$T = \lim_{\rightarrow} T_\lambda, \quad T_\lambda \in L(H_\lambda),$$

где $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство операторов $T_\lambda \in L(H_\lambda)$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Векторное пространство всех линейных непрерывных операторов на $\mathcal{H}$ обозначается через $L(\mathcal{H})$. Отметим, что

$L(\mathcal{H})$ является также и алгеброй, и с каждым семейством $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ можно связать семейство $(T_\lambda^*)_{\lambda \in \Lambda}$, где $T_\lambda^* \in L(H_\lambda)$. Тогда отображение

$$* : L(\mathcal{H}) \rightarrow L(\mathcal{H}), \quad T \mapsto T^* = \varinjlim T_\lambda^*$$

будет инволюцией, заданной на $L(\mathcal{H})$. Если $\|\cdot\|_\lambda$ — операторная норма, заданная на $L(H_\lambda)$, то функция

$$p_\lambda(T) := \|T_\lambda\|_\lambda, \quad T \in L(\mathcal{H}),$$

будет C^* -полунормой на $L(\mathcal{H})$ для каждого $\lambda \in \Lambda$ и $L(\mathcal{H})$ — это локальная C^* -алгебра относительно топологии, задаваемой разделяющим семейством полунорм $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Пусть A — локальная C^* -алгебра относительно топологии, задаваемой разделяющим семейством полунорм $\{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. *Предгильбертовым A -модулем* называется комплексное векторное пространство $\mathcal{M}$, являющееся также правым A -модулем, снабженное A -значным внутренним произведением, т. е. отображением $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow A$ со свойствами

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \langle x, y \rangle \alpha + \langle x, z \rangle \beta \quad \text{для любых } x, y, z \in \mathcal{M}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C};$$

$$\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a \quad \text{для любых } x, y \in \mathcal{M}; \quad a \in A;$$

$$\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle \quad \text{для любых } x, y \in \mathcal{M};$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{для любого } x \in \mathcal{M};$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{для любого } x \in \mathcal{M}.$$

Будем говорить, что $\mathcal{M}$ — *гильбертов A -модуль*, если $\mathcal{M}$ является полным топологическим векторным пространством относительно топологии, задаваемой разделяющим, направленным семейством полунорм

$$\bar{p}_\lambda(x) := \sqrt{p_\lambda(\langle x, x \rangle)}, \quad x \in \mathcal{M}, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Заметим, что локальная C^* -алгебра A является частным случаем гильбертова A -модуля. Здесь $\mathcal{M} = A$, а внутреннее произведение имеет вид

$$\langle x, y \rangle := x^* y, \quad x, y \in A.$$

Пусть A — локальная C^* -алгебра и $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — гильбертовы A -модули над A . Для элемента $x \in \mathcal{M}$ положим $|x| := \langle x, x \rangle^{1/2}$. В случае, когда A совпадает с $\mathcal{M}$, получаем традиционное определение модуля $|x| = (x^* x)^{1/2}$. Линейный оператор $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ называется *A -линейным*, если для любых $x \in \mathcal{M}$, $a \in A$ справедливо равенство $T(xa) = T(x)a$. Множество всех непрерывных A -линейных операторов из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ обозначается $L_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ или просто $L(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, если ясно, о какой алгебре A идет речь. Говорят, что линейный оператор $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ *допускает сопряженный*, если существует линейный оператор $S : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ такой, что $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ для любых элементов $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{N}$. При этом S называется *сопряженным* оператором к T и обозначается T^* . Векторное пространство всех линейных операторов $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, допускающих сопряженный, обозначается через $\mathcal{L}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Известно ([10], теорема 2.2.6), что каждый линейный оператор, допускающий сопряжение, является A -линейным и $\mathcal{L}_A(\mathcal{M}) := \mathcal{L}_A(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ является локальной C^* -алгеброй. Для $x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{M}$ положим

$$\theta_{x,y}(z) := x \langle y, z \rangle, \quad z \in \mathcal{M}.$$

Ясно, что для любых $x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{M}$ отображение $\theta_{x,y}$ является A -линейным оператором из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Известно ([10], с. 38), что $\theta_{x,y}^* = \theta_{y,x}$ и для любых $x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{M}$ справедливо включение $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Линейное подпространство в $\mathcal{L}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, порожденное элементами $\theta_{x,y}$, $x \in \mathcal{N}$, $y \in \mathcal{M}$, обозначается $\Theta_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ или просто $\Theta(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Замыкание $\Theta_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ в

$\mathcal{L}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ обозначается через $\mathcal{K}_A(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ или просто через $\mathcal{K}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Элементы $\mathcal{K}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ называются *модульно компактными* операторами из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$. Известно ([10], замечание 2.3.3), что $\mathcal{K}(\mathcal{M}) := \mathcal{K}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ является локальной C^* -алгеброй и двусторонним $*$ -идеалом в $\mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Теория гильбертовых A -модулей тесно связана с многими разделами современной математики ([10]). Операторы, действующие в A -модулях, изучались в работах [11]–[14].

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Установим основной результат статьи — критерий равенства $|x + y| = |x| + |y|$, где x и y — элементы гильбертова A -модуля над локальной C^* -алгеброй.

Предварительно потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Пусть H и K — гильбертовы пространства. Напомним, что линейный непрерывный оператор $T : H \rightarrow K$ называется *частичной изометрией*, если он изометричен на замкнутом подпространстве $\ker(T)^\perp$, где $\ker(T) := \{v \in H : Tv = 0\}$ и $\ker(T)^\perp$ — ортогональное дополнение подпространства $\ker(T)$. Отметим также, что операторы T^*T и TT^* являются ортогональными проекторами на пространства $\ker(T)^\perp$ и $\text{Im}(T) := \{Tv : v \in H\}$ соответственно.

Лемма 2.1 ([6], теорема 2.3). *Пусть H — гильбертово пространство, $T, S \in L(H)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- а) $|T + S| = |T| + |S|$;
- б) *существует частичная изометрия $U \in L(H)$ такая, что $T = U|T|$ и $S = U|S|$.*

Отметим также, что вышеприведенные представления: $T = U|T|$ и $S = U|S|$ для операторов T и S соответственно, называются *полярными* разложениями операторов T и S . При этом имеют место равенства ([8], теорема 2.3.4)

$$U^*U|T| = |T|; U^*U|S| = |S|.$$

Пусть Λ — направленное вверх множество, $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство гильбертовых пространств и $\mathcal{H} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ — локальное гильбертово пространство. Оператор $T \in L(\mathcal{H})$ называется *частичной изометрией*, если для любого $\lambda \in \Lambda$ частичными изометриями являются операторы $T_\lambda : H_\lambda \rightarrow H_\lambda$. Ниже покажем, что результаты леммы 2.1 остаются справедливыми и для непрерывных операторов в локальных гильбертовых пространствах.

Лемма 2.2. *Пусть Λ — направленное вверх множество, $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — семейство гильбертовых пространств и $\mathcal{H} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ — локальное гильбертово пространство, $T, S \in L(\mathcal{H})$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- а) $|T + S| = |T| + |S|$;
- б) *существует частичная изометрия $U \in L(\mathcal{H})$ такая, что $T = U|T|$ и $S = U|S|$.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Возьмем произвольный оператор $R \in L(\mathcal{H})$. По определению

$$|R| = (R^*R)^{1/2}; \quad |R|_\lambda = (R_\lambda^*R_\lambda)^{1/2} = |R_\lambda| \in L(H_\lambda), \quad \lambda \in \Lambda.$$

Пусть для операторов $T, S \in L(\mathcal{H})$ выполняется равенство треугольника. Тогда

$$|(T + S)_\lambda| = |T + S|_\lambda = |T|_\lambda + |S|_\lambda = |T_\lambda| + |S_\lambda|.$$

Согласно лемме 2.1 для каждого $\lambda \in \Lambda$ найдется частичная изометрия $U_\lambda \in L(H_\lambda)$ такая, что $T_\lambda = U_\lambda|T_\lambda|$ и $S_\lambda = U_\lambda|S_\lambda|$. Положим

$$U := \lim_{\rightarrow} U_\lambda, \quad U_\lambda \in L(H_\lambda).$$

Получаем, что оператор $U \in L(\mathcal{H})$ является искомой частичной изометрией.

б) $\Rightarrow$ а). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$T_\lambda = U_\lambda |T|_\lambda = U_\lambda |T_\lambda|, \quad S_\lambda = U_\lambda |S|_\lambda = U_\lambda |S_\lambda|.$$

Снова применяя лемму 2.1, имеем

$$|T + S|_\lambda = |T_\lambda + S_\lambda| = |T_\lambda| + |S_\lambda| = |T|_\lambda + |S|_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Таким образом, получили $|T + S| = |T| + |S|$. $\square$

Заметим также, что в условиях леммы 2.2 для частичной изометрии $U : L(\mathcal{H}) \rightarrow L(\mathcal{H})$ имеет место полезный факт

$$U_\lambda^* U_\lambda |T|_\lambda = |T|_\lambda, \quad U_\lambda^* U_\lambda |S|_\lambda = |S|_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda \Rightarrow U^* U |T| = |T|, \quad U^* U |S| = |S|.$$

Для локальных C^* -алгебр справедлив аналог хорошо известной для C^* -алгебр ГНС-конструкции. Напомним, что линейное отображение $\varphi : A \rightarrow B$ локальных C^* -алгебр A и B называется **-гомоморфизмом*, если для любых $a, b \in A$ выполняются равенства

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \varphi(a^*) = \varphi(a)^*.$$

Представлением локальной C^* -алгебры A называется пара $(\mathcal{H}, \varphi)$, где $\mathcal{H}$ — локальное гильбертово пространство и $\varphi : A \rightarrow L(\mathcal{H})$ — непрерывный *-гомоморфизм. Представление называется *точным*, если φ инъективен. Полезно также отметить следующее свойство произвольного *-гомоморфизма $\varphi : A \rightarrow B$

$$|\varphi(a)| = \varphi(|a|), \quad a \in A.$$

Действительно, имеет место цепочка равенств

$$|\varphi(a)|^2 = \varphi(a)^* \varphi(a) = \varphi(a^* a) = \varphi(|a|^2) = (\varphi(|a|))^2.$$

Отсюда, используя единственность квадратного корня положительного элемента локальной C^* -алгебры ([9], предложение 10.13), выводим требуемое.

Лемма 2.3 ([15], теорема 5.1). *Каждая локальная C^* -алгебра допускает точное представление.*

Сейчас готовы доказать необходимые и достаточные условия равенства треугольника для элементов локальной C^* -алгебры.

Лемма 2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ — локальная C^* -алгебра и $a, b \in \mathcal{A}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (1) $|a + b| = |a| + |b|$,
- (2) $a^* b = |a||b|$.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $|a + b| = |a| + |b|$. Согласно лемме 2.3 найдется локальное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и инъективный непрерывный *-гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow L(\mathcal{H})$. Тогда $\varphi(a), \varphi(b) \in L(\mathcal{H})$ и имеют место равенства

$$|\varphi(a) + \varphi(b)| = |\varphi(a + b)| = \varphi(|a + b|) = \varphi(|a| + |b|) = \varphi(|a|) + \varphi(|b|).$$

Применяя лемму 2.2, найдем частичную изометрию $U \in L(\mathcal{H})$ такую, что

$$\varphi(a) = U|\varphi(a)|, \quad \varphi(b) = U|\varphi(b)|, \quad U^* U |\varphi(a)| = |\varphi(a)|, \quad U^* U |\varphi(b)| = |\varphi(b)|.$$

Далее имеем

$$\varphi(a^* b) = \varphi(a)^* \varphi(b) = (U|\varphi(a)|)^* U|\varphi(b)| = |\varphi(a)| U^* U |\varphi(b)| = |\varphi(a)| |\varphi(b)| = \varphi(|a|) \varphi(|b|) = \varphi(|a||b|).$$

В силу инъективности непрерывного *-гомоморфизма выводим, что $a^* b = |a||b|$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что $a^*b = |a||b|$. Тогда $b^*a = (a^*b)^* = |b||a|$ и справедливы следующие равенства:

$$|a + b|^2 = (a + b)^*(a + b) = a^*a + a^*b + b^*a + b^*b = |a|^2 + |a||b| + |b||a| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2.$$

Отсюда в силу единственности квадратного корня положительного элемента локальной C^* -алгебры ([15], предложение 2.1) выводим $|a + b| = |a| + |b|$. $\square$

Ключевым инструментом для доказательства основного результата является следующая конструкция. Пусть A — локальная C^* -алгебра и $\mathcal{M}$ — гильбертов A -модуль. Прямая сумма $A \oplus \mathcal{M}$ также является гильбертовым A -модулем, где действие A на $A \oplus \mathcal{M}$ и A -значное внутреннее произведение на $A \oplus \mathcal{M}$ задаются формулами

$$(a, x)b = (ab, xb), \quad \langle (a, x), (b, y) \rangle = a^*b + \langle x, y \rangle \in A, \quad a, b \in A, \quad x, y \in \mathcal{M}.$$

Пусть $a \in A$, $x, y \in \mathcal{M}$ и $T \in \mathcal{K}_A(\mathcal{M})$. Рассмотрим отображение $L_{a,x,y,T} : A \oplus \mathcal{M} \rightarrow A \oplus \mathcal{M}$, заданное правилом

$$L_{a,x,y,T}(b, z) = (ab + \langle x, z \rangle, yb + Tz).$$

Данные отображения допускают следующее описание.

Лемма 2.5 ([16]). Пусть $a \in A$, $x, y \in \mathcal{M}$ и $T \in \mathcal{K}_A(\mathcal{M})$. Тогда $L_{a,x,y,T} \in \mathcal{L}(A \oplus \mathcal{M})$ и $L_{a,x,y,T}^* = L_{a^*,y,x,T^*}$. Более того, локальная C^* -алгебра, порожденная элементами

$$\{L_{a,x,y,T} : a \in A, \quad x, y \in \mathcal{M}, \quad T \in \mathcal{K}_A(\mathcal{M})\},$$

совпадает с $\mathcal{K}_A(A \oplus \mathcal{M})$.

Операторы $L_{a,x,y,T}$ удобно представлять в матричном виде

$$L_{a,x,y,T} = \begin{pmatrix} a & x \\ y & T \end{pmatrix}, \quad L_{a,x,y,T}^* = \begin{pmatrix} a^* & y \\ x & T^* \end{pmatrix}.$$

Основным результатом статьи является

Теорема 2.1. Пусть $\mathcal{A}$ — локальная C^* -алгебра, $\mathcal{M}$ — гильбертов A -модуль, $x, y \in \mathcal{M}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $|x + y| = |x| + |y|$,
- (2) $\langle x, y \rangle = |x||y|$.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Имеют место равенства

$$\langle x, y \rangle = |x||y| \Rightarrow \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^* = (|x||y|)^* = |y||x|,$$

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = |x|^2 + |x||y| + |y||x| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

(1) $\Rightarrow$ (2). Отображение $a \mapsto G_a$, где

$$G_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

является инъективным $*$ -гомоморфизмом локальных C^* -алгебр A и $\mathcal{K}_A(A \oplus \mathcal{M})$. В силу равенства $|x + y| = |x| + |y|$ выводим $G_{|x+y|} = G_{|x|} + G_{|y|}$. Далее можем написать

$$\begin{pmatrix} |x + y| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |y| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Отметим, что $G_{|x|}$ является положительным элементом алгебры $\mathcal{K}_A(A \oplus \mathcal{M})$ для любого $x \in \mathcal{M}$. Кроме того, для любых $a \in A$, $x \in \mathcal{M}$ имеем

$$G_{|x|}^2(a) = |x|(|x|a) = \langle x, x \rangle a = \langle x, xa \rangle = l_x(r_x(a)) = r_x^*r_x(a),$$

где через $r(x)$ и $l(x)$ обозначаются матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Операторы $r(x)$ и $l(x)$ действуют на элементы модуля $A \oplus \mathcal{M}$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ xb \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, z \rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b \in A, x, z \in \mathcal{M}.$$

Ясно, что $l_x^* = r(x)$ для любого $x \in \mathcal{M}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} |x| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

Заметим, что условие (1) можно переписать в форме

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x+y & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

Так как матрицы $r(|x+y|)$, $r(|x|)$ и $r(|y|)$ являются элементами локальной C^* -алгебры $\mathcal{K}_A(A \oplus \mathcal{M})$, то к ним применима лемма 2.4. Отсюда выводим

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |y| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство эквивалентно тождеству матричных операторов

$$\begin{pmatrix} \langle x, y \rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x||y| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $G_{\langle x, y \rangle} = G_{|x||y|}$. Принимая во внимание инъективность отображения $a \mapsto G_a$, окончательно получаем $\langle x, y \rangle = |x||y|$. $\square$

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за внимательное чтение текста и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bakherad M., Moslehian M.S. *Reversees and variations of Heinz inequality*, Linear and Multilinear Algebra **63** (10), 1972–1980 (2015).
- [2] Dadkhah A., Moslehian M.S. *Gruss type inequalities for positive linear maps in C^* -algebras*, Linear and Multilinear Algebra **65** (7), 1386–1401 (2017).
- [3] Li X., Wu W. *Operator's Jensen inequality on C^* -algebras*, Acta Math. Sinica **30** (1), 35–50 (2014).
- [4] Hart R. *The triangle inequality in C^* -algebras*, Filomat **20**, 51–53 (2006).
- [5] Thompson R.C. *Convex and concave functions of singular values of matrix sums*, Pacific J. Math. **82**, 279–280 (1979).
- [6] Ando T., Hayashi A. *A characterization of the operator-valued triangle equality*, J. Operator Theory **58** (2), 463–468 (2007).
- [7] Arambasic L., Rajic R. *On the C^* -valued triangle equality and inequality in Hilbert C^* -modules*, Acta Math. Hungar **119** (4), 373–380 (2008).
- [8] Мерфи Д. *C^* -алгебры и теория операторов* (Факториал, М., 1997).
- [9] Fragoulopoulou M. *Topological algebras with involution* (Elsevier, 2005).
- [10] Joița M. *Hilbert modules over locally C^* -algebras* (Univ. Bucharest Press, 2006).

- [11] Малиев И.Н., Плиев М.А. *О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными C^* -алгебрами*, Изв. вузов. Матем., № 12, 51–58 (2012).
- [12] Плиев М.А., Цопанов И.Д. *О представлении типа Стайнспринга для n -наборов вполне положительных отображений в гильбертовых C^* -модулях*, Изв. вузов. Матем., № 11, 42–49 (2014).
- [13] Masaev H. M., Pliev M. A., Elsaev Y. V. *Radon–Nikodym type theorem for a covariant completely positive maps on Hilbert C^* -modules*, Int. J. Math. Anal. **9** (5), 1723–1731 (2015).
- [14] Moslehian M. S., Kusraev A., Pliev M. *Matrix KSGNS construction and a Radon–Nikodym type theorem*, Indag. Math. **28** (5), 938–952 (2017).
- [15] Inoue A. *Locally C^* -algebras*, Mem. Faculty Sci. Kyushu Univ. Ser. A **25**, 197–235 (1971).
- [16] Joița M. *On the linking algebra of Hilbert modules and Morita equivalence of locally C^* -algebras*, Survey Math. and Appl. **1**, 23–32 (2006).

Алла Викторовна Калиниченко

Северо-Кавказский горно-металлургический институт (государственный технологический университет),
ул. Николаева, д. 44, г. Владикавказ, 362021, Россия,

e-mail: kalinichenkoalla@mail.ru

Марат Амурханович Плиев

Южный Математический институт ВНИЦ РАН,
ул. Маркуса, д. 22, г. Владикавказ, 362027, Россия,

e-mail: plimarat@yandex.ru

A. V. Kalinichenko and M. A. Pliev

The triangle equality in Hilbert A -modules

Abstract. We show that for any two elements x, y of Hilbert A -module M over local C^* -algebra A the generalized triangle equality $|x + y| = |x| + |y|$ holds if and only if $\langle x, y \rangle = |x||y|$.

Keywords: local C^* -algebra, Hilbert A -module, local Hilbert space, module compact operator, $*$ -homomorphism, triangle equality.

Alla Viktorovna Kalinichenko

North-Caucasian Institute of Mining and Metallurgy (State Technological University),
44 Nikolaeva str., Vladikavkaz, 362021 Russia,

e-mail: kalinichenkoalla@mail.ru

Marat Amurhanovich Pliev

Southern Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences,
22 Markusa str., Vladikavkaz, 362027 Russia,

e-mail: plimarat@yandex.ru