Общероссийский математический портал

К. С. Лапин, Тотальная ограниченность по Пуассону решений $\mathcal{P}$ -возмущенных сложных систем дифференциальных уравнений, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 10, 62–74

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-10-62-74>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:15:23

К.С. ЛАПИН

ТОТАЛЬНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПО ПУАССОНУ РЕШЕНИЙ $\mathcal{P}$ -ВОЗМУЩЕННЫХ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Введены понятия $\mathcal{P}$ -возмущенной системы и, в частности, $\mathcal{P}$ -возмущенной сложной системы. На основе метода функций Ляпунова получен достаточный признак тотальной ограниченности по Пуассону решений $\mathcal{P}$ -возмущенной системы по отношению к любой линейной системе с постоянными коэффициентами. На основе метода вектор-функций Ляпунова и указанного выше признака получены достаточные признаки тотальной ограниченности по Пуассону решений $\mathcal{P}$ -возмущенной сложной системы и решений $\mathcal{P}$ -возмущенной сложной системы с петлей обратной связи.

Ключевые слова: $\mathcal{P}$ -возмущенная система, сложная система, функция Ляпунова, тотальная ограниченность решений по Пуассону.

УДК: 517.925

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-62-74

В [1] метод функций Ляпунова был применен к исследованию различных видов ограниченности решений нелинейных систем. В [2] изучение основных видов устойчивости, а также ограниченности, решений было проведено на основе метода вектор-функций Ляпунова. Этот метод по сравнению с обычным методом функций Ляпунова имеет значительно большие возможности. Например, в [3] было показано, что основным инструментом исследования устойчивости сложных систем, т.е. систем, составленных из взаимосвязанных подсистем, является метод вектор-функций Ляпунова. С другой стороны, в [4]–[8] методы функций Ляпунова и вектор-функций Ляпунова были применены к исследованию различных видов ограниченности по Пуассону решений нелинейных систем. Понятие ограниченности решений по Пуассону характеризуется тем, что решение может не содержаться полностью в некотором шаре фазового пространства, но обладает свойством счетного числа раз возвращаемости в этот шар.

Настоящая работа посвящена применению метода вектор-функций Ляпунова к исследованию тотальной, т.е. при постоянно действующих возмущениях, ограниченности по Пуассону решений $\mathcal{P}$ -возмущенных систем и $\mathcal{P}$ -возмущенных сложных систем. Под $\mathcal{P}$ -возмущенной системой по отношению к заданной системе понимается система, правая часть которой равна правой части заданной системы, умноженной на функцию $1/(g(t) + \alpha(t))$, где $g(t)$ — любая заданная на $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ непрерывно дифференцируемая периодическая функция с периодом T , для которой $\min_{[0;T]} g(t) = 0$ и $\max_{[0;T]} g(t) > 0$, и $\alpha(t)$ — любая заданная

Поступила в редакцию 08.10.2018, после доработки 13.12.2018. Принята к публикации 19.12.2018.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-139.2017.1.

на $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ убывающая дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\alpha(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Потребность в исследовании $\mathcal{P}$ -возмущенных систем по отношению к заданным системам возникает в тех случаях, когда под воздействием внешних сил модуль вектора фазовой скорости заданной системы начинает совершать вынужденные колебания, амплитуда которых с течением времени неограничено возрастает.

Работа начинается с рассмотрения необходимых понятий и утверждений, связанных с вектор-функциями Ляпунова и тотальной, т.е. при постоянно действующих возмущениях, ограниченностью по Пуассону решений. Далее вводится понятие $\mathcal{P}$ -возмущенной системы по отношению к заданной системе. Получен достаточный признак тотальной ограниченности по Пуассону решений $\mathcal{P}$ -возмущенной системы по отношению к любой линейной системе с постоянными коэффициентами (теорема 2). Затем напомним понятие сложной системы и рассматриваются $\mathcal{P}$ -возмущенные системы по отношению к сложным системам. Получен достаточный признак тотальной ограниченности по Пуассону решений $\mathcal{P}$ -возмущенной сложной системы (теорема 3). Далее напомним понятие сложной системы с петлей обратной связи и рассматриваются $\mathcal{P}$ -возмущенные системы по отношению к сложным системам с петлями обратных связей. Получен достаточный признак тотальной ограниченности по Пуассону решений $\mathcal{P}$ -возмущенной сложной системы с петлей обратной связи (теорема 4). Приведен пример применения полученных в работе результатов к конкретной сложной нелинейной системе регулирования. Перейдем теперь к точным определениям и формулировкам.

Пусть заданы произвольные системы дифференциальных уравнений от $n \geq 1$ переменных

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad F(t, x) = (F_1(t, x), \dots, F_n(t, x))^T, \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + H(t, x), \quad H(t, x) = (H_1(t, x), \dots, H_n(t, x))^T, \quad (2)$$

где вектор-функция $F(t, x)$ и вектор-функция $H(t, x)$, называемая возмущением системы (1), определены и непрерывны в $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Здесь через $\mathbb{R}^+$ обозначено множество $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$. Предполагается, что все решения систем (1) и (2) продолжимы на всю полуось $\mathbb{R}^+$. Единственности решения задачи Коши для систем (1) и (2) не требуется.

Напомним сначала [2] определения вектор-функции Ляпунова и системы сравнения для системы (1). Пусть на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V(t, x) = (V_1(t, x), \dots, V_l(t, x))^T$, $l \geq 1$, и на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l$ задана непрерывная вектор-функция $f(t, \xi) = (f_1(t, \xi), \dots, f_l(t, \xi))^T$, удовлетворяющая условию Важевского (например, [2]). Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V(t, x)$ и система

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi) \quad (3)$$

называются соответственно вектор-функцией Ляпунова и системой сравнения для системы (1), если выполнено условие $\dot{V}(t, x) \leq f(t, V(t, x))$.

Под $\|\cdot\|$ будем понимать обычную евклидову норму для векторов и матриц. Решение $x = x(t)$ системы (1), проходящее через точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, будем записывать как $x = x(t, t_0, x_0)$. Для любого $t_0 \in \mathbb{R}^+$ будем через $\mathbb{R}^+(t_0)$ обозначать множество $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq t_0\}$. Любую неотрицательную возрастающую числовую последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$, будем называть $\mathcal{P}$ -последовательностью. Для каждой $\mathcal{P}$ -последовательности

$\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ будем через $M(\tau)$ обозначать множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$.

Напомним [7], что о решениях системы (1) говорят, что они тотально ограничены по Пуассону, если для системы (1) найдется $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ и для каждого числа $\alpha \geq 0$ существуют такие числа $\beta > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$, $t_0 \in M(\tau)$, $\|x_0\| \leq \alpha$, системы (2), удовлетворяющей при $t \geq 0$ и $\alpha \leq \|x\| \leq \beta$ неравенству $\|H(t, x)\| \leq \gamma$, выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$. В случае, когда требуется точно указать соответствующую $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, будем говорить, что решения системы (1) тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$.

Отметим, что если в определении тотальной ограниченности по Пуассону решений системы (1) забыть $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ и заменить $\mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ на $\mathbb{R}^+(t_0)$, то получим определение тотальной ограниченности решений системы (1), введенное в [1]. Легко видеть, что если решения системы (1) тотально ограничены, то они тотально ограничены и по Пуассону.

Далее будем обозначать через $a(r)$ и $b(r)$ произвольные функции, где $r \geq 0$ и $t \geq 0$, которые обладают следующими свойствами:

- 1) $a(r) > 0$ — возрастающая функция,
- 2) $b(r) \geq 0$ — неубывающая функция и $b(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

В работе [7] на основе метода вектор-функций Ляпунова были получены следующие достаточные признаки тотальной ограниченности по Пуассону решений системы (1).

Теорема 1. Пусть для системы (1) существуют такие $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, вектор-функция Ляпунова $V(t, x)$ и указанные выше функции $a(r)$ и $b(r)$, что выполнены следующие условия:

- 1) $V_1(t, x) \geq 0, \dots, V_l(t, x) \geq 0$,
 - 2) $b(\|x\|) \leq \sum_{i=1}^l V_i(t, x) \leq a(\|x\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$,
 - 3) $\|(\partial V_i / \partial x)(t, x)\| \leq L_i$, $1 \leq i \leq l$, для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times K$, где K — любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $L = (L_1, \dots, L_l)^T > 0$ — постоянный вектор, зависящий от K .
- Кроме того, пусть решения системы сравнения (3) для системы (1) тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) тотально ограничены по Пуассону.

Следствие. Пусть для системы (1) существуют такие $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$, непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x) \geq 0$, определенная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, непрерывная функция $f(t, \xi)$, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, и указанные выше функции $a(r)$ и $b(r)$, что выполнены следующие условия:

- 1) $b(\|x\|) \leq V(t, x) \leq a(\|x\|)$ для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$,
- 2) $\dot{V}(t, x) \leq f(t, V(t, x))$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$,
- 3) $\|(\partial V / \partial x)(t, x)\| \leq L$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times K$, где K — любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ и число $L > 0$ зависит от K .

Кроме того, пусть решения уравнения сравнения $\dot{\xi} = f(t, \xi)$ для системы (1) тотально ограничены по Пуассону относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Тогда решения системы (1) тотально ограничены по Пуассону.

Введем теперь понятие $\mathcal{P}$ -возмущенной системы по отношению к системе (1). Пусть $g(t)$ — любая заданная на $\mathbb{R}^+$ непрерывно дифференцируемая периодическая функция, удовлетворяющая условиям $\min_{\mathbb{R}^+} g(t) = 0$ и $\max_{\mathbb{R}^+} g(t) > 0$. Ясно, что $\min_{\mathbb{R}^+} g(t)$ и $\max_{\mathbb{R}^+} g(t)$ существуют, поскольку из периодичности функции $g(t)$ следуют равенства $\min_{\mathbb{R}^+} g(t) = \min_{[0; T]} g(t)$ и $\max_{\mathbb{R}^+} g(t) = \max_{[0; T]} g(t)$, где T — период функции $g(t)$. Легко видеть, что $g'(t)$ является

непрерывной периодической функцией, для которой выполнены условия $\max_{\mathbb{R}^+} g'(t) > 0$ и $\min_{\mathbb{R}^+} g'(t) < 0$. Для того, чтобы не перегружать обозначения, вместо $\min$ и $\max$ будем везде соответственно писать просто $\min$ и $\max$. Кроме того, пусть $\alpha(t) > 0$ — любая дифференцируемая убывающая функция, заданная на $\mathbb{R}^+$, для которой выполнено условие $\alpha(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Простыми примерами таких функций являются $g(t) = 1 + \sin t$ и $\alpha(t) = e^{-t}$.

Далее для системы (1) и указанных выше функций $g(t)$ и $\alpha(t)$ любую систему, имеющую вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{g(t) + \alpha(t)} F(t, x),$$

будем называть $\mathcal{P}$ -возмущенной системой по отношению к системе (1), или, если исключены недоразумения, $\mathcal{P}$ -возмущенной системой.

Рассмотрим $\mathcal{P}$ -возмущенную систему по отношению к произвольной линейной системе $\dot{x} = Ax$, т. е. рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{g(t) + \alpha(t)} Ax, \quad (4)$$

где A — любая постоянная действительная $n \times n$ -матрица.

Сформулируем и докажем достаточный признак тотальной ограниченности по Пуассону решений $\mathcal{P}$ -возмущенной системы (4).

Теорема 2. *Если собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A в правой части $\mathcal{P}$ -возмущенной системы (4) удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_i < -\max g'(t)$ для всех $1 \leq i \leq n$, то решения этой $\mathcal{P}$ -возмущенной системы тотально ограничены по Пуассону.*

Доказательство. Определим сначала функцию Ляпунова $V(t, x)$. Для этого сделаем замену переменных $x = Sy$, где $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{C}^n$ и S — комплексная $n \times n$ -матрица, для которой $S^{-1}AS = B$ — верхняя треугольная комплексная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A . Отметим, что указанная выше замена переменных $x = Sy$ эквивалентна замене переменных $x = \bar{S}\bar{y}$, где $\bar{y}$ — комплексное число, сопряженное к y , и $\bar{S} = (\bar{s}_{ij})$ — матрица, сопряженная к матрице $S = (s_{ij})$. Ясно, что для указанной выше замены переменных $x = \bar{S}\bar{y}$ справедливо равенство $(\bar{S})^{-1}A\bar{S} = \bar{B}$, где $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})$ — верхняя треугольная матрица, сопряженная к матрице $B = (b_{ij})$. Хорошо известно (например, [9]), что замену переменных $x = Sy$ всегда можно сделать так, чтобы для любого действительного числа $b > 0$ было справедливо неравенство $|b_{ij}| < b$ при всех $1 \leq i < j \leq n$, где $|b_{ij}|$ — модуль комплексного числа b_{ij} . Определим функцию $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$\begin{aligned} V(t, x) &= (g(t) + \alpha(t)) \cdot (S^{-1}x, (\bar{S})^{-1}x) = (g(t) + \alpha(t)) \cdot (y, \bar{y}) = \\ &= (g(t) + \alpha(t)) \sum_{i=1}^n y_i \bar{y}_i = (g(t) + \alpha(t)) \|y\|^2 = (g(t) + \alpha(t)) \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное умножение в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим для любого фиксированного $0 < \gamma < \max g(t)$ возрастающую последовательность $\vartheta_1 < \vartheta_2 < \dots < \vartheta_i < \dots$ всех корней уравнения $g(t) + \alpha(t) = \gamma$. Пусть ϑ_k — первый из корней, для которого на отрезке $[\vartheta_k; \vartheta_{k+1}]$ выполнено условие $g(t) + \alpha(t) \geq \gamma$. Определим возрастающую последовательность $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \dots$, полагая $\tau_i = \vartheta_{i+k-1}$, $i \geq 1$. Ясно, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$, следовательно, $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ является

$\mathcal{P}$ -последовательностью. Легко видеть, что для любых $t \in \mathbb{R}^+(\tau_1)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $V(t, x) \leq a(\|x\|)$, где $a(r) = (\max g(t) + \max \alpha(t))(\|S^{-1}\|r)^2$. Так как на каждом

замкнутом интервале $[\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$, $i \geq 1$, справедливо неравенство $\gamma \leq g(t) + \alpha(t)$, то для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ получаем $b(\|x\|) \leq V(t, x)$, где $b(r) = \gamma \cdot (r/\|S\|)^2$. Из этого следует, что двойное неравенство $b(\|x\|) \leq V(t, x) \leq a(\|x\|)$ справедливо для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$. Для производной $\dot{V}(t, x)$ функции $V(t, x)$ в силу системы (3) имеем равенства

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= (g'(t) + \alpha'(t))\|y\|^2 + (S^{-1}Ax, (\bar{S})^{-1}x) + (S^{-1}x, (\bar{S})^{-1}Ax) = \\ &= (g'(t) + \alpha'(t))\|y\|^2 + (S^{-1}ASy, (\bar{S})^{-1}\bar{S}\bar{y}) + (S^{-1}Sy, (\bar{S})^{-1}A\bar{S}\bar{y}) = \\ &= (g'(t) + \alpha'(t))\|y\|^2 + (By, \bar{y}) + (y, \bar{B}\bar{y}) = (g'(t) + \alpha'(t))\|y\|^2 + \\ &+ \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \bar{y}_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} y_j \bar{y}_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i y_i \bar{y}_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \bar{b}_{ij} \bar{y}_j y_i \right) = \\ &= (g'(t) + \alpha'(t))\|y\|^2 + \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \bar{\lambda}_i) y_i \bar{y}_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij} y_j \bar{y}_i + \bar{b}_{ij} \bar{y}_j y_i). \end{aligned}$$

Так как $\alpha'(t) < 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$ и $\max g'(t) > 0$, то имеем $g'(t) + \alpha'(t) < \max g'(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$. По условию теоремы $\operatorname{Re} \lambda_i < -\max g'(t)$ для любого $1 \leq i \leq n$. Поэтому имеем $\lambda_i + \bar{\lambda}_i = 2\operatorname{Re} \lambda_i < -2\max g'(t)$. Так как $\bar{b}_{ij} y_j \bar{y}_i = \bar{b}_{ij} \bar{y}_j y_i$, то получаем

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (b_{ij} y_j \bar{y}_i + \bar{b}_{ij} \bar{y}_j y_i) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2\operatorname{Re}(b_{ij} y_j \bar{y}_i) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2|b_{ij} y_j \bar{y}_i| = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2|b_{ij}| |y_j| |\bar{y}_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |b_{ij}| (|y_j|^2 + |y_i|^2) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |b_{ij}| \|y\|^2 \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu \|y\|^2 = \frac{1}{2} n(n-1) \mu \|y\|^2, \end{aligned}$$

где $\mu > 0$ — наперед заданное число, для которого $|b_{ij}| < \mu$. Из указанных выше неравенств получаем $\dot{V}(t, x) \leq (-\max g'(t) + (1/2)n(n-1)\mu)\|y\|^2$. Если выбрать число $\mu > 0$ так, чтобы $\mu < (2\max g'(t))/(n(n-1))$, то получим $\dot{V}(t, x) \leq -\psi\|y\|^2$, $\psi = \max g'(t) - (1/2)n(n-1)\mu > 0$. Из неравенства $\dot{V}(t, x) \leq -\psi\|y\|^2$ следует

$$\dot{V}(t, x) \leq -\frac{\psi}{g(t) + \alpha(t)} V(t, x).$$

Так как $-\psi/(g(t) + \alpha(t)) \leq -\psi/\max(g(t) + \alpha(t))$, то получаем неравенство

$$\dot{V}(t, x) \leq -c V(t, x),$$

где $c = \psi/\max(g(t) + \alpha(t)) > 0$. Это неравенство означает, что уравнением сравнения для системы (4) является уравнение $\dot{\xi} = -c\xi$ от одной переменной. Методом функций Ляпунова легко проверяется, что решения уравнения $\dot{\xi} = -c\xi$ totally ограничены. Например, в качестве функции Ляпунова для уравнения $\dot{\xi} = -c\xi$ можно взять функцию $W(\xi) = \xi^2$. Так как решения уравнения $\dot{\xi} = -c\xi$ totally ограничены, то они totally ограничены и по Пуассону относительно рассмотренной выше $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$. Таким образом, для $\mathcal{P}$ -возмущенной системы (4) все условия следствия выполнены и, следовательно, решения этой $\mathcal{P}$ -возмущенной системы totally ограничены по Пуассону. $\square$

Напомним теперь [10] (также [3] и [11]) понятие сложной системы дифференциальных уравнений.

Под сложной системой дифференциальных уравнений понимают любую систему вида

$$\dot{x}^i = f_i(t, x^i) + \sum_{1 \leq j \leq m} D_i B_{ij}(t) H_j x^j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (5)$$

где $x^i = (x_1^i, \dots, x_{n_i}^i) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leq i \leq m$, которая составлена из набора так называемых передаточных подсистем

$$\dot{x}^i = f_i(t, x^i) + D_i u^i, \quad y^i = H_i x^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (6)$$

связанных между собой соотношениями

$$u^i = \sum_{1 \leq j \leq m} B_{ij}(t) y^j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (7)$$

где вектор $u^i = (u_1^i, \dots, u_{p_i}^i)^T \in \mathbb{R}^{p_i}$ называется входом в передаточную подсистему (6), вектор $y^i = (y_1^i, \dots, y_{q_i}^i)^T \in \mathbb{R}^{q_i}$ называется выходом из передаточной подсистемы (6), $f_i(t, x^i)$ — непрерывная функция, заданная на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n_i}$, D_i — постоянная $n_i \times p_i$ -матрица, H_i — постоянная $q_i \times n_i$ -матрица и $B_{ij}(t)$ — $p_i \times q_j$ -матрица, элементами которой являются непрерывные функции от переменной $t \in \mathbb{R}^+$.

Рассмотрим любую сложную систему вида

$$\dot{x}^i = f_i(t, x^i) + \sum_{1 \leq j \leq m} D_i B_{ij} H_j x^j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (8)$$

где B_{ij} — постоянная $(p_i \times q_i)$ -матрица, и рассмотрим $\mathcal{P}$ -возмущенную систему по отношению к системе (8), т. е. рассмотрим систему

$$\dot{x}^i = \frac{f_i(t, x^i)}{g(t) + \alpha(t)} + \sum_{1 \leq j \leq m} D_i \frac{B_{ij}}{g(t) + \alpha(t)} H_j x^j, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (9)$$

Видно, что система (9) является сложной системой, которая составлена из набора передаточных подсистем

$$\dot{x}^i = \frac{f_i(t, x^i)}{g(t) + \alpha(t)} + D_i u^i, \quad y^i = H_i x^i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

связанных между собой соотношениями

$$u^i = \sum_{1 \leq j \leq m} \frac{B_{ij}}{g(t) + \alpha(t)} y^j, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Поставим теперь вопрос о том, какие требования нужно наложить на сложную систему (8), чтобы решения сложной $\mathcal{P}$ -возмущенной системы (9) были totally ограничены по Пуассону. Одним из ответов на этот вопрос является

Теорема 3. Пусть для сложной системы (8) выполнено условие $B_{ii} = 0$ и пусть существуют такие дифференцируемые функции $V_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$ и постоянные $c_{1i} > 0$, $c_{2i} > 0$, $c_{3i} > 0$, $c_{4i} > 0$, $1 \leq i \leq m$, что для указанных выше функций $g(t)$ и $\alpha(t)$ и всех $t \in \mathbb{R}^+$, $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leq i \leq m$, выполнены следующие условия:

- 1) $c_{1i} \|x^i\|^2 \leq V_i(t, x^i) \leq c_{2i} \|x^i\|^2$,
- 2) $(g(t) + \alpha(t)) \frac{\partial V_i(t, x^i)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_i(t, x^i)}{\partial x^i}, f_i(t, x^i) \right) \leq -c_{3i} \|x^i\|^2$,
- 3) $\left\| \frac{\partial V_i(t, x^i)}{\partial x^i} \right\| \leq c_{4i} \|x^i\|$.

Кроме того, пусть для собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ постоянной действительной $m \times m$ -матрицы $A = (a_{ij})$, задаваемой равенствами

$$a_{ii} = \max g'(t) - \frac{c_{3i}}{2c_{2i}}, \quad a_{ij} = \frac{c_{4i}^2}{2c_{3i}c_{1j}} \sum_{1 \leq k \leq m} \|D_i B_{ik} H_k\|^2, \quad i \neq j, \quad (10)$$

выполнено условие $\operatorname{Re} \lambda_i < -\max g'(t)$ для всех $1 \leq i \leq m$. Тогда решения сложной $\mathcal{P}$ -возмущенной системы (9) тотально ограничены по Пуассону.

Доказательство. Определим вектор-функцию

$$W(t, x) = (W_1(t, x), \dots, W_m(t, x))^T,$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)^T = (x_1^1, \dots, x_{n_1}^1, \dots, x_1^m, \dots, x_{n_m}^m)^T$ и $n = n_1 + \dots + n_m$, полагая

$$W_i(t, x) = (g(t) + \alpha(t))V_i(t, x^i) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Для любого фиксированного $0 < \gamma < \max g(t)$ рассмотрим возрастающую последовательность $\vartheta_1 < \vartheta_2 < \dots < \vartheta_i < \dots$ всех корней уравнения $g(t) + \alpha(t) = \gamma$. Пусть ϑ_k — первый из указанных корней, для которого на отрезке $[\vartheta_k; \vartheta_{k+1}]$ выполнено условие $g(t) + \alpha(t) \geq \gamma$. Определим возрастающую последовательность $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \dots$, полагая $\tau_i = \vartheta_{i+k-1}$, $i \geq 1$. Очевидно, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$ и, следовательно, $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ является $\mathcal{P}$ -последовательностью. Из условия 1) теоремы получаем, что для любых $t \in \mathbb{R}^+(\tau_1)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $W_1(t, x) + \dots + W_m(t, x) \leq a(\|x\|)$, где $a(r) = \max(g(t) + \alpha(t))(c_{21} + \dots + c_{2m})r^2$. Так как на каждом замкнутом интервале $[\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$, $i \geq 1$, имеет место неравенство $\gamma \leq g(t) + \alpha(t)$, то из условия 1) теоремы получаем для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ неравенство $b(\|x\|) \leq W_1(t, x) + \dots + W_m(t, x)$, где $b(r) = \gamma \min\{c_{11}, \dots, c_{1m}\}r^2$. Из этого следует, что двойное неравенство

$$b(\|x\|) \leq W_1(t, x) + \dots + W_m(t, x) \leq a(\|x\|)$$

справедливо для всех $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$. Таким образом, условия 1) и 2) теоремы 1 выполнены. Справедливость условия 3) теоремы 1 следует из непрерывности нормы и условия 3) доказываемой теоремы. Рассмотрим теперь производную $\dot{W}(t, x)$ вектор-функции $W(t, x)$ в силу системы (9). Пользуясь при $i \neq j$ равенством $\partial W_i(t, x)/\partial x^j = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{W}_i(t, x) &= \frac{\partial W_i(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial W_i(t, x)}{\partial x^i}, \frac{f_i(t, x^i)}{g(t) + \alpha(t)} + \sum_{1 \leq j \leq m} D_i \frac{B_{ij}}{g(t) + \alpha(t)} H_j x^j \right) = \\ &= (g'(t) + \alpha'(t))V_i(t, x^i) + (g(t) + \alpha(t)) \frac{\partial V_i(t, x^i)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_i(t, x^i)}{\partial x^i}, f_i(t, x^i) \right) + \\ &\quad + \left(\frac{\partial V_i(t, x^i)}{\partial x^i}, \sum_{1 \leq j \leq m} D_i B_{ij} H_j x^j \right). \end{aligned}$$

При помощи условий 2) и 3) теоремы, а также учитывая, что $\alpha'(t) < 0$ и $B_{ii} = 0$, получаем

$$\dot{W}_i(t, x) \leq (\max g'(t))V_i(t, x^i) - c_{3i}\|x^i\|^2 + c_{4i}\|x^i\| \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \|D_i B_{ij} H_j\| \cdot \|x^j\|.$$

Из очевидного неравенства

$$\left(\sqrt{c_{3i}} \|x^i\| - \frac{c_{4i}}{\sqrt{c_{3i}}} \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \|D_i B_{ij} H_j\| \cdot \|x^j\| \right)^2 \geq 0$$

следует неравенство

$$\frac{c_{3i}}{2} \|x^i\|^2 + \frac{c_{4i}^2}{2c_{3i}} \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \|D_i B_{ij} H_j\| \cdot \|x^j\| \right)^2 \geq c_{4i} \|x^i\| \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \|D_i B_{ij} H_j\| \cdot \|x^j\|,$$

при помощи которого имеем

$$\dot{W}_i(t, x) \leq (\max g'(t)) V_i(t, x^i) - \frac{c_{3i}}{2} \|x^i\|^2 + \frac{c_{4i}^2}{2c_{3i}} \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \|D_i B_{ij} H_j\| \cdot \|x^j\| \right)^2.$$

Рассматривая выражение в скобках как скалярное произведение соответствующих векторов и пользуясь неравенством Коши для скалярного произведения и норм этих векторов, получаем неравенство

$$\left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \|D_i B_{ij} H_j\| \cdot \|x^j\| \right)^2 \leq \sum_{1 \leq k \leq m} \|D_i B_{ik} H_k\|^2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \|x^j\|^2$$

и, следовательно, имеем

$$\dot{W}_i(t, x) \leq (\max g'(t)) V_i(t, x^i) - \frac{c_{3i}}{2} \|x^i\|^2 + \frac{c_{4i}^2}{2c_{3i}} \sum_{1 \leq k \leq m} \|D_i B_{ik} H_k\|^2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} \|x^j\|^2.$$

Пользуясь теперь неравенствами из условия 1) теоремы, получаем

$$\begin{aligned} \dot{W}_i(t, x) &\leq \left(\max g'(t) - \frac{c_{3i}}{2c_{2i}} \right) V_i(t, x^i) + \frac{c_{4i}^2}{2c_{3i}c_{1j}} \sum_{1 \leq k \leq m} \|D_i B_{ik} H_k\|^2 \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} V_j(t, x^j) = \\ &= \frac{1}{g(t) + \alpha(t)} \sum_{1 \leq j \leq m} a_{ij} W_j(t, x). \end{aligned}$$

Таким образом, показана справедливость векторного неравенства

$$\dot{W}(t, x) \leq \frac{1}{g(t) + \alpha(t)} A \cdot W(t, x),$$

где $m \times m$ -матрица $A = (a_{ij})$ определена по формулам (10). Это векторное неравенство означает, что $W(t, x)$ является вектор-функцией Ляпунова для системы (9) и система

$$\dot{\xi} = \frac{1}{g(t) + \alpha(t)} A \xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m, \quad (11)$$

является системой сравнения для системы (9). Так как по условию теоремы для собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ матрицы A для всех $1 \leq i \leq m$ выполнено условие $\operatorname{Re} \lambda_i < -\max g'(t)$, то

при помощи теоремы 2 получаем, что решения системы сравнения (11) totally ограничены по Пуассону. Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены и, следовательно, решения сложной $\mathcal{P}$ -возмущенной системы (9) totally ограничены по Пуассону. $\square$

Рассмотрим теперь важный частный случай сложных систем — сложные системы с петлями обратных связей. Напомним, следуя [10], что сложной системой с петлей обратной связи называется любая сложная система (5), передаточные подсистемы которой связаны между собой соотношениями

$$u^i = \zeta(t)y^{i-1}, \quad 2 \leq i \leq m, \quad u^1 = \zeta(t)y^m, \quad (12)$$

где $\zeta(t)$ — любая непрерывная функция, т.е. с точностью до умножения на $\zeta(t)$ вход i -й подсистемы, где $2 \leq i \leq m$, совпадает с выходом $(i-1)$ -й подсистемы, а вход m -й системы совпадает с выходом 1-й подсистемы. Легко видеть, что в этом случае $p_i = q_{i-1}$, поскольку $u^i \in \mathbb{R}^{p_i}$ и $y^{i-1} \in \mathbb{R}^{q_{i-1}}$. Кроме того, очевидно, что в рассматриваемом случае матрицы $B_{ij}(t)$ в соотношениях (7) задаются равенствами

$$B_{ij}(t) = \zeta(t) \begin{cases} E_{p_1}, & i = 1, j = m; \\ E_{p_i}, & 2 \leq i \leq m, j = i - 1; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где E_{p_i} — единичная $p_i \times p_i$ -матрица. Таким образом, каждая сложная система с петлей обратной связи имеет вид

$$\dot{x}^1 = f_1(t, x^1) + D_1 \zeta(t) H_m x^m, \quad \dot{x}^i = f_i(t, x^i) + D_i \zeta(t) H_{i-1} x^{i-1}, \quad 2 \leq i \leq m.$$

Рассмотрим теперь любую сложную систему с петлей обратной связи вида

$$\dot{x}^1 = f_1(t, x^1) + D_1 H_m x^m, \quad \dot{x}^i = f_i(t, x^i) + D_i H_{i-1} x^{i-1}, \quad 2 \leq i \leq m, \quad (13)$$

где $\zeta(t) = 1$, и рассмотрим $\mathcal{P}$ -возмущенную систему по отношению к сложной системе с петлей обратной связи (13), т.е. рассмотрим сложную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= \frac{f_1(t, x^1)}{g(t) + \alpha(t)} + \frac{D_1 H_m}{g(t) + \alpha(t)} x^m, \\ \dot{x}^i &= \frac{f_i(t, x^i)}{g(t) + \alpha(t)} + \frac{D_i H_{i-1}}{g(t) + \alpha(t)} x^{i-1}, \quad 2 \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (14)$$

Видно, что сложная система (14) является сложной системой с петлей обратной связи, где $\zeta(t) = 1/(g(t) + \alpha(t))$.

Так как система (14) является частным случаем системы (9), то исследование решений системы (14) на равномерную ограниченность в пределе по Пуассону можно, конечно, проводить при помощи теоремы 3. Однако для проведения такого исследования имеется следующий, более удобный, достаточный признак, применение которого не требует оценки действительных частей собственных значений.

Теорема 4. Пусть для сложной системы с петлей обратной связи (13) существуют дифференцируемые функции $V_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$ и постоянные $c_{1i} > 0$, $c_{2i} > 0$, $c_{3i} > 0$, $c_{4i} > 0$, $1 \leq i \leq m$, удовлетворяющие для указанных выше функций $g(t)$ и $\alpha(t)$ и всех $t \in \mathbb{R}^+$ и $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leq i \leq m$, условиям 1)–3) теоремы 3. Кроме того, пусть выполнены условия

$$c_{3i} > 4c_{2i} \max g'(t), \quad \prod_{i=1}^m \eta_i^2 < 1, \quad (15)$$

где

$$\eta_i = \frac{c_{4i}\sqrt{c_{2i}}}{\sqrt{c_{1,i-1}c_{3i}(c_{3i} - 4c_{2i}\max g'(t))}} \|D_i H_{i-1}\|, \quad 1 \leq i \leq m$$

(здесь $c_{1,0}$ и H_0 соответственно считаются другими обозначениями c_{1m} и H_m). Тогда решения $\mathcal{P}$ -возмущенной сложной системы с петлей обратной связи (14) тотально ограничены по Пуассону.

Доказательство. Так как система (14) является частным случаем системы (9) и выполнены условия 1)–3) теоремы 3, то системой сравнения для системы (14) является система (11), где элементы матрицы $A = (a_{ij})$ определяются в рассматриваемом случае по формулам

$$a_{ii} = \max g'(t) - \frac{c_{3i}}{2c_{2i}}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$a_{1m} = \frac{c_{41}^2}{2c_{31}c_{1m}} \|D_1 H_m\|^2, \quad a_{i,i-1} = \frac{c_{4i}^2}{2c_{3i}c_{1,i-1}} \|D_i H_{i-1}\|^2, \quad 2 \leq i \leq m,$$

и $a_{ij} = 0$ в других случаях. Запишем систему сравнения (11) для системы (14) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \frac{1}{g(t) + \alpha(t)} ((\max g'(t) - a_1)\xi_1 + b_1\xi_m), \\ \dot{\xi}_i &= \frac{1}{g(t) + \alpha(t)} ((\max g'(t) - a_i)\xi_m + b_i\xi_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (16)$$

где $a_i = c_{3i}/(2c_{2i})$, $1 \leq i \leq m$, $b_1 = a_{1m}$ и $b_i = a_{i,i-1}$, $2 \leq i \leq m$. Покажем, что если для системы (16) выполнены условия

$$a_i > 2\max g'(t), \quad 1 \leq i \leq m, \quad \prod_{i=1}^m \frac{a_i - 2\max g'(t)}{b_i} > 1, \quad (17)$$

то решения этой системы тотально ограничены по Пуассону. Для этого по теореме 2 достаточно показать, что собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ матрицы $A = (a_{ij})$ из системы (16) удовлетворяют для всех $1 \leq i \leq m$ условию $\operatorname{Re} \lambda_i < -\max g'(t)$. Предположим от противного, что для некоторого $1 \leq j \leq m$ выполнено условие $\operatorname{Re} \lambda_j \geq -\max g'(t)$. Рассмотрим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E_m) = 0$ матрицы $A = (a_{ij})$ из системы (16). Прямые вычисления показывают, что данное характеристическое уравнение имеет вид

$$\prod_{i=1}^m (\lambda + a_i - \max g'(t)) - \prod_{i=1}^m b_i = 0.$$

Из этого, пользуясь условиями $a_i > 2\max g'(t)$, $1 \leq i \leq m$, и предположением $\operatorname{Re} \lambda_j \geq -\max g'(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m b_i &= \left| \prod_{i=1}^m b_i \right| = \left| \prod_{i=1}^m (\lambda_j + a_i - \max g'(t)) \right| = \prod_{i=1}^m |\lambda_j + a_i - \max g'(t)| \geq \\ &\geq \prod_{i=1}^m (\operatorname{Re} \lambda_j + a_i - \max g'(t)) \geq \prod_{i=1}^m (a_i - 2\max g'(t)), \end{aligned}$$

что противоречит второму условию из (17). Таким образом, все собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ матрицы $A = (a_{ij})$ из системы (16) удовлетворяют для всех $1 \leq i \leq m$ неравенству $\operatorname{Re} \lambda_i < -\max g'(t)$ и, следовательно, по теореме 2 решения этой системы тотально

ограничены по Пуассону. Заметим теперь, что второе условие из (15) влечет второе условие из (17). В самом деле, пользуясь вторым условием из (15), получаем

$$\prod_{i=1}^m \frac{a_i - 2 \max g'(t)}{b_i} = \prod_{i=1}^m \frac{c_{1,i-1} c_{3i} (c_{3i} - 4c_{2i} \max g'(t))}{c_{4i}^2 c_{2i} \|D_i H_{i-1}\|^2} \geq \prod_{i=1}^m \frac{1}{\eta_i^2} > 1.$$

Из этого, как было показано выше, следует, что решения системы (16) totally ограничены по Пуассону. Так как система (16) является системой сравнения для системы (14), то решения $\mathcal{P}$ -возмущенной сложной системы с петлей обратной связи (14) totally ограничены по Пуассону. $\square$

Пример. Пусть задана система уравнений от переменных $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 5$,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\varrho_1 x_1 + x_5, \\ \dot{x}_2 &= -\varrho_2 x_2 + x_5, \\ \dot{x}_3 &= -\varrho_3 x_3 + x_5, \\ \dot{x}_4 &= -\varrho_4 x_4 + x_5, \\ \dot{x}_5 &= -\gamma x_5 - f(x_5) + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\varrho_s, \beta_s, \gamma \in \mathbb{R}$, $1 \leq s \leq 4$, $0 < \varrho_1 \leq \varrho_2 \leq \varrho_3 \leq \varrho_4$ и $f(x_5)$ — любая непрерывная функция, удовлетворяющая условию $x_5 f(x_5) > 0$. Такого вида системы используются как системы регулирования с управлением $\sigma = x_5$ продольного движения самолета [12] (также [13]). Рассмотрим систему (18) как сложную систему

$$\dot{x}^1 = f_1(t, x^1) + D_1 H_2 x^2, \quad \dot{x}^2 = f_2(t, x^2) + D_2 H_1 x^1, \quad (19)$$

полагая

$$\begin{aligned} x^1 &= (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4, \quad x^2 = (x_5) \in \mathbb{R}^1, \\ f_1(t, x^1) &= (-\varrho_1 x_1, -\varrho_2 x_2, -\varrho_3 x_3, -\varrho_4 x_4)^T, \quad f_2(t, x^2) = -\gamma x_5 - f(x_5), \\ B_{12} &= E_1, \quad B_{21} = E_4, \quad B_{11} = 0, \quad B_{22} = 0, \\ H_1 &= E_4, \quad H_2 = E_1, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4), \end{aligned}$$

и рассмотрим $\mathcal{P}$ -возмущенную сложную систему по отношению к сложной системе (19)

$$\dot{x}^1 = \frac{f_1(t, x^1)}{g(t) + \alpha(t)} + \frac{D_1 H_2}{g(t) + \alpha(t)} x^2, \quad \dot{x}^2 = \frac{f_2(t, x^2)}{g(t) + \alpha(t)} + \frac{D_2 H_1}{g(t) + \alpha(t)} x^1. \quad (20)$$

Исследуем при помощи теоремы 3 решения сложной системы (20) на totalную ограниченность по Пуассону. Для этого рассмотрим функции

$$V_1(x^1) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad V_2(x^2) = x_5^2.$$

Легко проверяется, что для этих функций и постоянных $c_{11} = c_{12} = c_{21} = c_{22} = 1$, $c_{31} = 2\varrho_1$, $c_{32} = 2\gamma$, $c_{41} = c_{42} = 2$ выполнены условия 1)–3) теоремы 3. Вычислим по формулам (10) элементы 2×2 -матрицы $A = (a_{ij})$. Имеем

$$a_{11} = \max g'(t) - \frac{c_{31}}{2c_{21}} = \max g'(t) - \varrho_1, \quad a_{22} = \max g'(t) - \frac{c_{32}}{2c_{22}} = \max g'(t) - \gamma.$$

Так как $\|D_1 B_{12} H_2\| = \|D_1\| = 2$ и $\|D_2 B_{21} H_1\| = \|D_2\| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2}$, то получаем

$$a_{12} = \frac{c_{41}^2}{2c_{31}c_{12}} \|D_1 B_{12} H_2\|^2 = \frac{4}{\varrho_1}, \quad a_{21} = \frac{c_{42}^2}{2c_{32}c_{11}} \|D_2 B_{21} H_1\|^2 = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2}{\gamma}.$$

Оценим действительные части собственных значений 2×2 -матрицы A . Для этого рассмотрим сначала общий случай 2×2 -матриц. Пусть заданы любая 2×2 -матрица $U = (u_{ij})$ и

произвольное число $m \geq 0$. Элементарными вычислениями проверяется, что собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы $U = (u_{ij})$ удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re} \lambda_1 < -m$ и $\operatorname{Re} \lambda_2 < -m$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$u_{11} + u_{22} < -2m, \quad u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} > -m(u_{11} + u_{22} + m). \quad (21)$$

При помощи (21) получаем, что собственные значения λ_1 и λ_2 рассмотренной выше (2×2) -матрицы $A = (a_{ij})$ удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re} \lambda_1 < -\max g'(t)$ и $\operatorname{Re} \lambda_2 < -\max g'(t)$, если выполнены условия

$$\begin{aligned} 4 \max g'(t) &< \varrho_1 + \gamma, \\ 4 \max g'(t)^2 - 2(\varrho_1 + \gamma) \max g'(t) + \varrho_1 \gamma &> \frac{4(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2)}{\varrho_1 \gamma}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из этого и теоремы 3 следует, что при выполнении условий (22) решения $\mathcal{P}$ -возмущенной сложной системы (20) totally ограничены по Пуассону.

Заметим теперь, что система (19) является сложной системой с петлей обратной связи. Поэтому исследование решений системы (20) на totalную ограниченность по Пуассону можно провести при помощи теоремы 4. Пользуясь предыдущими вычислениями, получаем, что условия (15) в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} 2 \max g'(t) &< \varrho_1, \quad 2 \max g'(t) < \gamma, \\ 4(\max g'(t))^2 - 2(\varrho_1 + \gamma) \max g'(t) + \varrho_1 \gamma &> \frac{4(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2)}{\varrho_1 \gamma}. \end{aligned} \quad (23)$$

Видно, что условия (22) дают больше степеней свободы параметрам ϱ_1 и γ , чем условия (23).

В заключение отметим, что полученные в работе результаты могут быть применены к исследованию решений на totalную ограниченность по Пуассону $\mathcal{P}$ -возмущенных сложных систем по отношению к сложным системам, описывающим (например, [11] и [10]) много-связные системы автоматического управления, динамику электроэнергетических систем, управление движением внеатмосферных астрономических обсерваторий, динамику развития экономических систем и др.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yoshizawa T. *Liapunov's function and boundedness of solutions*, Funkcialaj Ekvacioj **2**, 95–142 (1959).
- [2] Матросов В.М. *Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем* (Физматлит, М., 2001).
- [3] Bailey F.N. *The application of Lyapunov's second method to interconnected systems*, SIAM J. Control (USA), ser. A. **3** (3), 443–462 (1965).
- [4] Лапин К.С. *Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова*, Дифференц. уравнения **54** (1), 40–50 (2018).
- [5] Лапин К.С. *Ограниченность в пределе по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и функции Ляпунова*, Матем. заметки **103** (2), 223–235 (2018).
- [6] Лапин К.С. *Вектор-функции Ляпунова и ограниченность в пределе по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений*, Матем. заметки **104** (1), 73–86 (2018).
- [7] Лапин К.С. *Тотальная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова*, Матем. заметки **104** (2), 243–254 (2018).
- [8] Лапин К.С. *Высшие производные функций Ляпунова и totalная ограниченность решений по Пуассону*, Изв. вузов. Матем., 2019, № 8, с.21–30.
- [9] Карташев А.П., Рождественский Б.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления* (Наука, М., 1980).
- [10] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости* (Мир, М. 1980).

- [11] Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И., Матросов В.М. *Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости* (Наука, М., 1987).
- [12] Пионтковский А.А., Рутковская Л.Д. *Исследование некоторых задач теории устойчивости с помощью метода векторной функции Ляпунова*, Автоматика и телемеханика, № 10, 23–31 (1967).
- [13] Летов А.М. *Устойчивость нелинейных регулируемых систем* (Физматлит, М., 1962).

Кирилл Сергеевич Лапин

*Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е. Евсевьева,
ул. Студенческая, д. 11А, г. Саранск, 430007, Россия,*

e-mail: klapin@mail.ru

K.S. Lapin

Total Poisson boundedness of solutions of $\mathcal{P}$ -perturbed complex systems of differential equations

Abstract. We introduce the concept of a $\mathcal{P}$ -perturbed system and, in particular, $\mathcal{P}$ -perturbed complex system. Based on the method Lyapunov functions we obtain the sufficient condition of total Poisson boundedness of solutions of $\mathcal{P}$ -perturbed systems with respect to any linear system with constant coefficients. Based on the method of vector Lyapunov functions and the above condition we obtain sufficient conditions of total Poisson boundedness of solutions of $\mathcal{P}$ -perturbed complex system and solutions of $\mathcal{P}$ -perturbed complex systems with feedback loop.

Keywords: $\mathcal{P}$ -perturbed system, complex system, Lyapunov function, total Poisson boundedness of solutions.

Kirill Sergeevich Lapin

*Mordovian State Pedagogical Institute named after M.E. Evseviev,
11A Studencheskaya str., Saransk, 430007 Russia,*

e-mail: klapin@mail.ru