Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Аминова, Д. Р. Хакимов, Проективно-групповые свойства h -пространств типа $\{221\}$, *Изв. вузов. Матем.*, 2019, номер 10, 87–93

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-10-87-93>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:57:28

Краткое сообщение

А.В. АМИНОВА, Д.Р. ХАКИМОВ

ПРОЕКТИВНО-ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА h -ПРОСТРАНСТВ ТИПА $\{221\}$

Аннотация. Исследуется кривизна 5-мерного h -пространства H_{221} типа $\{221\}$ [3], получаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы H_{221} было пространством постоянной кривизны K (теорема 1). Находится общее решение уравнения Эйзенхарта в h -пространстве H_{221} непостоянной кривизны. Устанавливаются необходимые и достаточные условия существования негомомететического проективного движения в h -пространстве H_{221} непостоянной кривизны (теорема 5) и как следствие определяется структура негомомететической проективной алгебры Ли в таком пространстве (теорема 6).

Ключевые слова: пятимерное псевдориманово многообразие, уравнение Эйзенхарта, проективная алгебра Ли, h -пространство типа $\{221\}$.

УДК: 514.763: 514.8

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-87-93

1. Векторное поле X на псевдоримановом многообразии (M, g) с проективной структурой Π называется *инфинитезимальным проективным преобразованием*, или *проективным движением*, если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$ локальная 1-параметрическая группа состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов проективной структуры. Необходимое и достаточное условие этого состоит в выполнении уравнения Эйзенхарта

$$\nabla h(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\varphi + g(Y, W)Z\varphi + g(Z, W)Y\varphi, \quad (1)$$

равносильного после замены $h = a + 2\varphi g$ уравнению

$$\nabla a(Y, Z, W) = g(Y, W)Z\varphi + g(Z, W)Y\varphi, \quad (2)$$

и обобщенного уравнения Киллинга

$$L_X g = h,$$

где $Y, Z, W \in TM$, $(n+1)\varphi = \operatorname{div} X$ [1]. Если $\varphi = \operatorname{const}$, т. е. $\operatorname{div} X = \operatorname{const}$, то проективное движение является аффинным.

В косономальном репере (Y_h) ([1], с. 98), адаптированном к характеристике Сегре симметричной билинейной формы h

$$\chi = \left\{ r_1 \dots r_{k_0} \left(m_1^{k_0+1} \dots m_{s_{k_0+1}}^{k_0+1} \right) \dots \left(m_1^k \dots m_{s_k}^k \right) \right\}$$

и заданном в области $V \subset M^n$ разбиением $I = \bigcup_{\alpha=1}^k I_\alpha$, $I_\alpha = \{s | n_\alpha + 1 \leq s \leq n_\alpha + r_\alpha\}$, $n_1 = 0$, $n_\alpha = \sum_{l=1}^{\alpha-1} r_l$, $r_1 + \dots + r_k = n$, $\alpha = 2, \dots, k$, с множеством индексов $I = \{1, \dots, n\}$ и

биекцией $\sim: I \rightarrow I: I_\alpha \ni p \rightarrow \tilde{p} = 2n_\alpha + r_\alpha + 1 - p \in I_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, k$), индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики $\bar{g}_{pq} = g(Y_p, Y_q) \equiv \theta_p(Y_q) = e_p \delta_p^q$, например, $\theta^h = e_h \theta_{\bar{h}}$, $e_p = \pm 1$, уравнение (2) принимает вид

$$d\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^n e_h (\bar{a}_{hq} \omega_{p\bar{h}} + \bar{a}_{ph} \omega_{q\bar{h}}) = (Y_q \varphi) \theta_p + (Y_p \varphi) \theta_q,$$

где θ_h — каноническая 1-форма, сопряженная с Y_h , $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$ — 1-форма связности, $p, q, r = 1, \dots, n$.

Классификация псевдоримановых пространств, допускающих негомтетические проективные движения, основана на разбиении их по типам в соответствии с алгебраической структурой производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении проективного движения X , определяемой в каждой точке $p \in V \subseteq M$ характеристикой Сегре χ тензора $h = L_X g$. Тип тензора $L_X g$ определяет тип проективного движения X и тип метрики g в области V . Такие метрики будем называть *h-метриками типа χ* , а соответствующие пространства — *h-пространствами типа χ* [2].

В работе [3] с помощью метода косономального репера определены пятимерные *h*-пространства H_{221} типа $\{221\}$ и установлены необходимые и достаточные условия существования проективного движения того же типа. Для нахождения всех проективных движений и вычисления максимальной проективной алгебры Ли в H_{221} нужно найти общее решение *h* уравнения Эйзенхарта (1) в H_{221} . В данной статье (п. 3, теорема 2) решение этой задачи требует обращения к условиям интегрируемости уравнений Эйзенхарта, включающих тензор кривизны. При этом необходимо выделить пространства постоянной кривизны $S^5(K)$, допускающие максимальную 35-мерную проективную группу, строение которой хорошо известно (например, [1], гл. 4). Структура кривизны *h*-пространства H_{221} выясняется в п. 2. В п. 3 находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы H_{221} было пространством постоянной кривизны K (теорема 1). В п. 4 находится общее решение уравнения Эйзенхарта в *h*-пространстве типа $\{221\}$ непостоянной кривизны, устанавливаются необходимые и достаточные условия существования негомтетического проективного движения в таком пространстве (теорема 5) и как следствие определяется строение негомтетической проективной алгебры Ли этого пространства (теорема 6).

2. Канонический косономальный репер $(Y_h) = \xi^i \partial / \partial x^i$ задается в подходящих координатах x^i формулами

$$\begin{aligned} \xi_1^1 &= \frac{1}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}}, \quad \xi_2^1 = \frac{1}{2(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2}} \left(\frac{2}{f_2 - f_1} + \frac{1}{f_3 - f_1} \right), \\ \xi_2^2 &= \frac{1}{(f_2 - f_1)(f_3 - f_1)^{1/2} (\varepsilon_1 (x^1 + \tau(x^2)) + 1 - \varepsilon_1)}, \quad \xi_3^3 = \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}}, \\ \xi_4^3 &= \frac{1}{2(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2}} \left(\frac{2}{f_1 - f_2} + \frac{1}{f_3 - f_2} \right), \\ \xi_4^4 &= \frac{1}{(f_1 - f_2)(f_3 - f_2)^{1/2} (\varepsilon_2 (x^3 + \omega(x^4)) + 1 - \varepsilon_2)}, \quad \xi_5^5 = \frac{1}{(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)}. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом репере метрика g *h*-пространства H_{221} и соответствующая билинейная форма $a = h - 2\rho g$ определяются каноническими формами

$$\bar{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 f_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 f_2 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 f_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Выполняются уравнения

$$Y_1 \varphi = Y_3 \varphi = 0, \quad (5)$$

$$df_1 = e_1(Y_2 \varphi) \theta_1, \quad df_2 = e_2(Y_4 \varphi) \theta_3, \quad df_3 = 2e_3(Y_5 \varphi) \theta_5, \quad (6)$$

$$\omega_{14} = \frac{Y_4 \varphi}{f_2 - f_1} \theta_1, \quad \omega_{15} = \frac{Y_5 \varphi}{f_3 - f_1} \theta_1, \quad \omega_{21} = (Y_2 \varphi) \theta_2, \quad \omega_{23} = \frac{Y_2 \varphi}{f_2 - f_1} \theta_3, \\ \omega_{24} = \frac{Y_4 \varphi}{(f_2 - f_1)^2} \theta_1 + \frac{Y_4 \varphi}{f_2 - f_1} \theta_2 - \frac{Y_2 \varphi}{(f_2 - f_1)^2} \theta_3 + \frac{Y_2 \varphi}{f_2 - f_1} \theta_4, \quad (7)$$

$$\omega_{25} = \frac{Y_5 \varphi}{(f_3 - f_1)^2} \theta_1 + \frac{Y_5 \varphi}{f_3 - f_1} \theta_2 + \frac{Y_2 \varphi}{f_3 - f_1} \theta_5,$$

$$\omega_{35} = \frac{Y_5 \varphi}{f_3 - f_2} \theta_3, \quad \omega_{43} = (Y_4 \varphi) \theta_4, \quad \omega_{45} = \frac{Y_5 \varphi}{(f_3 - f_2)^2} \theta_3 + \frac{Y_5 \varphi}{f_3 - f_2} \theta_4 + \frac{Y_4 \varphi}{f_3 - f_2} \theta_5.$$

Здесь

$$\varphi = f_1 + f_2 + \frac{1}{2} f_3 \quad (8)$$

— определяющая функция проективного движения типа {221}, $\omega_{ij} = \gamma_{jik} \theta^k$ — 1-форма связности в косономальном репере (Y_h) , $f_1 = \varepsilon_1 x^2 + (1 - \varepsilon_1) \kappa_1$, $f_2 = \varepsilon_2 x^4 + (1 - \varepsilon_2) \kappa_2$, $f_3 = \mu(x^5)$, ε_1 и ε_2 принимают значения 0 и 1, κ_1, κ_2 — постоянные, $e_1, e_2, e_3 = \pm 1$ [3].

Используя первое структурное уравнение Картана $d\theta_i = -\sum_{j=1}^5 e_j \omega_{ij} \wedge \theta_j$ и формулы (7), находим

$$d\theta_1 = -e_1(Y_2 \varphi) \theta_1 \wedge \theta_2 - \frac{e_2(Y_4 \varphi)}{f_2 - f_1} \theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{e_3(Y_5 \varphi)}{f_3 - f_1} \theta_1 \wedge \theta_5, \\ d\theta_2 = -\frac{e_2(Y_4 \varphi)}{(f_2 - f_1)^2} \theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{e_3(Y_5 \varphi)}{(f_3 - f_1)^2} \theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{e_2(Y_4 \varphi)}{f_2 - f_1} \theta_2 \wedge \theta_3 - \frac{e_3(Y_5 \varphi)}{f_3 - f_1} \theta_2 \wedge \theta_5, \\ d\theta_3 = -\frac{e_1(Y_2 \varphi)}{f_2 - f_1} \theta_1 \wedge \theta_3 - e_2(Y_4 \varphi) \theta_3 \wedge \theta_4 - \frac{e_3(Y_5 \varphi)}{f_3 - f_2} \theta_3 \wedge \theta_5, \\ d\theta_4 = \frac{e_1(Y_2 \varphi)}{(f_2 - f_1)^2} \theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{e_1(Y_2 \varphi)}{f_2 - f_1} \theta_1 \wedge \theta_4 - \frac{e_3(Y_5 \varphi)}{(f_3 - f_2)^2} \theta_3 \wedge \theta_5 - \frac{e_3(Y_5 \varphi)}{f_3 - f_2} \theta_4 \wedge \theta_5, \\ d\theta_5 = -\frac{e_1(Y_2 \varphi)}{f_3 - f_1} \theta_1 \wedge \theta_5 - \frac{e_2(Y_4 \varphi)}{f_3 - f_2} \theta_3 \wedge \theta_5.$$

Введем обозначения

$$A_1 \equiv Y_2 \varphi, \quad A_2 \equiv Y_4 \varphi, \quad A_3 \equiv Y_5 \varphi,$$

$$C_1 \equiv e_1 Y_2(Y_2 \varphi), \quad C_2 \equiv e_2 Y_4(Y_4 \varphi), \quad C_3 \equiv e_3 Y_5(Y_5 \varphi).$$

Взяв внешний дифференциал от обеих частей равенства $df_1 = e_1(Y_2 \varphi) \theta_1 \equiv e_1 A_1 \theta_1$ (6) и сравнивая это с $dA_1 = \theta^l Y_l Y_2 \varphi = \theta^l [Y_l, Y_2] + \theta^l Y_2 Y_l \varphi$, с учетом (5) получим

$$dA_1 = C_1 \theta_1 - e_1 A_1^2 \theta_2 - A_1 \left(e_2 \frac{A_2}{f_2 - f_1} \theta_3 + e_3 \frac{A_3}{f_3 - f_1} \theta_5 \right).$$

Так же вычисляются dA_2 и dA_3 . Воспользовавшись полученными соотношениями и вторым структурным уравнением Картана

$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \sum_{l=1}^5 e_l \omega_{il} \wedge \omega_{lj}$, вычислим 2-форму кривизны Ω_{ij} h -пространства типа $\{221\}$:

$$\begin{aligned}
\Omega_{12} &= - \left(C_1 + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2} \right) \theta_1 \wedge \theta_2, \quad \Omega_{13} = - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} \theta_1 \wedge \theta_3, \\
\Omega_{14} &= - \left(\frac{C_2}{f_2 - f_1} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)^2} \right) \theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} \theta_1 \wedge \theta_4, \\
\Omega_{15} &= - \left(\frac{C_3}{f_3 - f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2} \right) \theta_1 \wedge \theta_5, \\
\Omega_{23} &= \left(\frac{C_1}{f_2 - f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2(f_3 - f_2)} \right) \theta_1 \wedge \theta_3 - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} \theta_2 \wedge \theta_3, \\
\Omega_{24} &= - \left(\frac{C_1}{(f_2 - f_1)^2} + \frac{C_2}{(f_2 - f_1)^2} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2(f_3 - f_2)^2} \right) \theta_1 \wedge \theta_3 + \\
&\quad \left(\frac{C_1}{f_2 - f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2(f_3 - f_2)} \right) \theta_1 \wedge \theta_4 - \left(\frac{C_2}{f_2 - f_1} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)^2} \right) \theta_2 \wedge \theta_3 - \\
&\quad \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} \theta_2 \wedge \theta_4, \\
\Omega_{25} &= - \left(\frac{C_3}{(f_3 - f_1)^2} - \frac{2e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^3} - \frac{C_1}{f_3 - f_1} \right) \theta_1 \wedge \theta_5 - \left(\frac{C_3}{f_3 - f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2} \right) \theta_2 \wedge \theta_5, \\
\Omega_{34} &= - \left(C_2 + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_2)^2} \right) \theta_3 \wedge \theta_4, \quad \Omega_{35} = - \left(\frac{C_3}{f_3 - f_2} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_2)^2} \right) \theta_3 \wedge \theta_5, \\
\Omega_{45} &= - \left(\frac{C_3}{(f_3 - f_2)^2} - \frac{C_2}{f_3 - f_2} - \frac{2e_3 A_3^2}{(f_3 - f_2)^3} \right) \theta_3 \wedge \theta_5 - \left(\frac{C_3}{f_3 - f_2} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_2)^2} \right) \theta_4 \wedge \theta_5.
\end{aligned} \tag{9}$$

3. Запишем 2-форму кривизны в виде $\Omega_{ij} \equiv \sum_{(kl)} K_{ijkl} \theta_k \wedge \theta_l$ ($k, l = 1, \dots, 5$, $k < l$) и положим $K_{ijij} \equiv \rho_{ij}$, тогда предыдущая формула примет вид

$$\Omega_{ij} = \rho_{ij} \theta_i \wedge \theta_j + \sum_{(kl) \neq (ij)} K_{ijkl} \theta_k \wedge \theta_l \quad (i, j, k, l = 1, \dots, 5, i < j, k < l),$$

где в силу (9)

$$\begin{aligned}
\rho_{12} &= -C_1 - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2}, \quad \rho_{13} = \rho_{14} = \rho_{23} = \rho_{24} = - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)}, \quad \rho_{34} = -C_2 - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_2)^2}, \\
\rho_{15} = \rho_{25} &= - \frac{C_3}{f_3 - f_1} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2}, \quad \rho_{35} = \rho_{45} = - \frac{C_3}{f_3 - f_2} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_2)^2},
\end{aligned}$$

а из коэффициентов K_{ijkl} при $(kl) \neq (ij)$ отличны от нуля только

$$\begin{aligned}
K_{1413} &= - \frac{C_2}{f_2 - f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)^2}, \quad K_{2313} = \frac{C_1}{f_2 - f_1} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2(f_3 - f_2)}, \\
K_{2413} &= - \frac{C_1 + C_2}{(f_2 - f_1)^2} - \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2(f_3 - f_2)^2}, \quad K_{2414} = K_{2313}, \quad K_{2423} = K_{1413}, \\
K_{2515} &= - \frac{C_3}{(f_3 - f_1)^2} + \frac{2e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^3} + \frac{C_1}{f_3 - f_1}, \quad K_{4535} = - \frac{C_3}{(f_3 - f_2)^2} + \frac{2e_3 A_3^2}{(f_3 - f_2)^3} + \frac{C_2}{f_3 - f_2}.
\end{aligned}$$

Теорема 1. Для того чтобы h -пространство H_{221} типа {221} было пространством постоянной кривизны K : $\Omega_{ij} = K\theta_i \wedge \theta_j$, необходимо и достаточно выполнения условий $K_{1413} = K_{2313} = K_{2515} = 0$, что равносильно

$$C_1 = \frac{e_3(f_2 - f_1)A_3^2}{(f_3 - f_1)^2(f_3 - f_2)}, \quad C_2 = -\frac{e_3(f_2 - f_1)A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)^2}, \quad C_3 = \frac{e_3(2f_3 - f_1 - f_2)A_3^2}{(f_1 - f_3)(f_2 - f_3)}, \quad (10)$$

при этом $K_{ijkl} = 0$ для всех $(kl) \neq (ij)$,

$$\Omega_{ij} = \rho\theta_i \wedge \theta_j, \quad \rho_{ij} = -\frac{e_3A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} \equiv \rho = K \quad (11)$$

$(i, j, k, l = 1, \dots, 5; i < j, k < l)$.

Схема доказательства. Необходимость условий $K_{1413} = K_{2313} = K_{2515} = 0$ следует из формулы $\Omega_{ij} = K\theta_i \wedge \theta_j$, определяющей пространство постоянной кривизны K . Если выполняется (10), то $\rho_{ij} = \rho_{kl}$ для всех $i, j, k, l = 1, \dots, 5; i < j, k < l$. Обозначив $\rho_{ij} \equiv \rho$, найдем $\Omega_{ij} = \rho\theta_i \wedge \theta_j$, где по теореме Шура [4] $\rho = \text{const} \equiv K$.

4. Найдем общее решение уравнения Эйзенхарта в h -пространстве (H_{221}, g) непостоянной кривизны.

Теорема 2. Любое решение (k, g, ψ) уравнения Эйзенхарта

$$\nabla k(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\psi + g(W, Z)Y\psi + g(Y, W)Z\psi,$$

равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ уравнению

$$\nabla b(Y, Z, W) = g(W, Z)Y\psi + g(Y, W)Z\psi, \quad (12)$$

в h -пространстве (H_{221}, g) типа {221} непостоянной кривизны удовлетворяет условию

$$\psi = c_1 \left(f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 \right) + \text{const} = c_1\varphi + \text{const}, \quad (13)$$

где функция φ определена равенством (8), c_1 — произвольная постоянная.

Схема доказательства. Ввиду инвариантности величин f_i и тензорного характера равенства (13) достаточно доказать его в каноническом косорепере (3), где уравнение (12) принимает вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^5 e_h \left(\bar{b}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph}\omega_{q\tilde{h}} \right) = (Y_q\psi)\theta_p + (Y_p\psi)\theta_q, \quad (14)$$

$\omega_{p\tilde{h}}$ определены формулами (7), а $\bar{b}_{pq}$ — компоненты тензора b в косорепере (3).

Применив внешний дифференциал d к уравнению (14), получим условия интегрируемости этого уравнения

$$\bar{b}_{ph}\Omega_q^h + \bar{b}_{hq}\Omega_p^h = \psi_{ph}\theta^h \wedge \theta_q + \psi_{hq}\theta^h \wedge \theta_p, \quad (15)$$

где $\Omega_p^h = e_h\Omega_{\tilde{h}p}$, $\psi_{ph} \equiv -Y_h Y_p \psi - \gamma_{ph}^l Y_l \psi = \psi_{hp}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных 2-формах $\theta_h \wedge \theta_q$ слева и справа в (15), при $(pq) = (11), (13), (15), (14)$ найдем

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= -\bar{b}_{11} \left(C_1 + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2} \right) = -\bar{b}_{11} \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)} = \bar{b}_{11} \left(\frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)^2} - \frac{C_3}{f_3 - f_1} \right), \\ \bar{b}_{11} \left(\frac{C_2}{f_2 - f_1} + \frac{e_3 A_3^2}{(f_3 - f_1)(f_3 - f_2)^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то отсюда следует (10), и по теореме 1 H_{221} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{11} = \psi_{11} = 0$. Так же выводятся равенства

$$\bar{b}_{i_1 5} = \bar{b}_{i_2 5} = \bar{b}_{i_1 i_2} = 0, \psi_{i_1 5} = \psi_{i_2 5} = \psi_{i_1 i_2} = 0 \quad (i_1 = 1, 2; i_2 = 3, 4). \quad (16)$$

С учетом этих равенств уравнения (14), где ω_{hs} определены формулами (7), при $(pq) = (11), (12)$ дают $Y_1 \psi = 0, d\bar{b}_{12} \equiv \theta^l Y_l \bar{b}_{12} = (Y_2 \psi) \theta_1$. Пользуясь формулами (3), отсюда выводим $\bar{b}_{12} = e_1 \alpha(x^2), \partial_2 \psi = \alpha'$. Так же получаются равенства $\bar{b}_{34} = e_2 \beta(x^4), \bar{b}_{55} = e_3 \gamma(x^5)$ и $\psi = \alpha(x^2) + \beta(x^4) + (1/2)\gamma(x^5) + \text{const}$. Из (14) при $(pq) = (23), (14)$ найдем

$$\alpha' = \frac{\beta - \alpha}{f_2 - f_1} f_1', \quad \beta' = \frac{\beta - \alpha}{f_2 - f_1} f_2'.$$

В случае $f_2' f_1' \neq 0$ отсюда следует $(\alpha'/f_1')(x^2) = (\beta'/f_2')(x^4) \equiv c_1 = \text{const}$, т. е. $\alpha = c_1 f_1 + \text{const}, \beta = c_1 f_2 + \text{const}$; к такому же выводу придем при $f_2' f_1' = 0$.

Интегрируя уравнение (14), $(pq) = (15)$:

$$\gamma' = \frac{\gamma - c_1 f_1}{f_3 - f_1} f_3',$$

получим $\gamma = c_1 f_3 + \text{const}$, в итоге имеем (13). $\square$

Теорема 3. Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h -пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору

$$b_{ij} = c_2 g_{ij} \quad (c_2 = \text{const}).$$

Схема доказательства. В косономальном репере (3) уравнение $b_{ij,k} = 0$ принимает вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^5 e_h \left(\bar{b}_{hq} \omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph} \omega_{q\tilde{h}} \right) = 0. \quad (17)$$

Так как это уравнение получается из уравнения (14) при $\psi = \text{const}$, то справедливы равенства (16): $\bar{b}_{i_1 5} = \bar{b}_{i_2 5} = \bar{b}_{i_1 i_2} = 0$ ($i_1 = 1, 2; i_2 = 3, 4$), благодаря которым система (17) сводится к уравнениям $d\bar{b}_{12} = d\bar{b}_{34} = d\bar{b}_{55} = 0, e_2 \bar{b}_{34} - e_1 \bar{b}_{12} = e_3 \bar{b}_{55} - e_2 \bar{b}_{34} = 0$, из которых следует $\bar{b}_{pq} = c_2 \bar{g}_{pq}$, где матрица $(\bar{g}_{pq})$ определена каноническими формами (4) и множитель c_2 постоянен ввиду условия $b_{ij,k} = 0$ и ковариантного постоянства метрического тензора g_{ij} .

Так как векторное поле X является аффинным движением в H_{221} , если и только если $(L_X g)_{,k} = 0$, то из теоремы 3 следует

Теорема 4. Всякое аффинное движение X в h -пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ непостоянной кривизны есть инфинитезимальная гомотетия: $L_X g = cg, c = \text{const}$.

Поскольку любые два решения h_1 и h_2 уравнения Эйзенхарта (1) с одинаковой правой частью могут отличаться лишь на ковариантно постоянный тензор b , то из теоремы 2 и линейности уравнения (1) следует, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h -пространстве (H_{221}, g) типа $\{221\}$ может быть записано в виде $c_1 h + b$ или в силу теоремы 3 в виде $c_1 h + c_2 g$, где $h = a + 2\varphi g, g$ и a определены в косономальном репере (3) каноническими формами (4) [3], $c_1, c_2 = \text{const}$. Отсюда получается

Теорема 5. Векторное поле X является проективным движением в h -пространстве (H_{221}, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда

$$L_X g = c_1 h + c_2 g \equiv c_1 (a + 2\varphi g) + c_2 g,$$

где φ — определяющая функция проективного движения X, g и a определены в косономальном репере (3) каноническими формами (4), c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Из теоремы 5 вытекает

Теорема 6. Если h -пространство (H_{221}, g) типа {221} непостоянной кривизны допускает r -мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r , то эта алгебра содержит $(r - 1)$ -мерную гомотетическую подалгебру.

Схема доказательства. Если $(X_1, \dots, X_r)$ — базис алгебры Ли P_r , то $L_{X_s}g = c_1 h + c_2 g$, $s = 1, \dots, r$, где одна из постоянных c_1 , например, c_1 отлична от нуля (в противном случае P_r состоит из гомотетий). В новом базисе $Z_1 = X_1$, $Z_\tau = c_1 X_\tau - c_1 X_1$ имеем $L_{Z_\tau}g = (c_1 c_2 - c_2 c_1)g$, $\tau = 2, \dots, r$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аминова А.В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий* (Янус-К, М., 2003).
- [2] Аминова А.В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий*, УМН, **50** (1), 69–142 (1995).
- [3] Аминова А.В., Хакимов Д.Р. *О проективных движениях пятимерных пространств специального вида*, Изв. вузов. Матем., №5, 1–7 (2017).
- [4] Schur F. *Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungsmasses mit den projectiven Raumen*, Math. Ann., **27**, 537–567 (1886).

Ася Васильевна Аминова

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Джамолиддин Рахмонович Хакимов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: dzhamoliddink@mail.ru

A.V. Aminova and D.R. Khakimov

Projective group properties of h -spaces of type {221}

Abstract. We investigate the curvature of a 5-dimensional h -space H_{221} of the type {221} [3], necessary and sufficient conditions are obtained in order that H_{221} be a space of constant curvature K (theorem 1). A general solution of the Eisenhart equation is found in the h -space H_{221} of non-constant curvature. The necessary and sufficient conditions for the existence of non-homothetical projective motion in the h -space H_{221} of non-constant curvature are established (theorem 5) and, as a consequence, the structure of the non-homothetical projective Lie algebra in such a space is determined (theorem 6).

Keywords: five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, the Eisenhart equation, projective Lie algebra, h -space of the type {221}.

Asya Vasilyevna Aminova

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: asya.aminova@kpfu.ru

Dzhamoliddin Rakhmonovich Khakimov

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: dzhamoliddink@mail.ru