Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Громаковская, Б. М. Широков, Распределение числа бесквадратных делителей в классах вычетов, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 3, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-3-11>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:21:59

Л.А. ГРОМАКОВСКАЯ, Б.М. ШИРОКОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА БЕСКВАДРАТНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ В КЛАССАХ ВЫЧЕТОВ

Аннотация. Слабо равномерное распределение целочисленных арифметических функций было введено В. Наркевичем. В различных работах для многих функций решен вопрос о наличии такого распределения и установлены асимптотические формулы для частоты попадания значений функции в классы вычетов, взаимно простые с модулем, причем, как правило, содержащие лишь главные члены асимптотики. Такая же задача решается в настоящей работе для функции, дающей число бесквадратных делителей натурального числа, но асимптотическая формула представляет собой асимптотический ряд.

Ключевые слова: распределение в классах вычетов, асимптотическая формула, слабо равномерное распределение, число бесквадратных делителей.

УДК: 511.3

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-3-3-11

1. ВВЕДЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В 1961 г. И. Нивен в работе [1] определил понятие равномерного распределения целочисленных арифметических функций в классах вычетов следующим образом. Пусть N — фиксированное натуральное число и $f(n)$ — целочисленная арифметическая функция. Для вещественного числа $x > 1$ через $A(x, r, f)$ обозначим количество натуральных чисел $n \leq x$, для которых $f(n) \equiv r \pmod{N}$.

Определение 1. Функция $f(n)$ называется равномерно распределенной по модулю N , если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x, r, f)}{x} = \frac{1}{N}.$$

Проводя аналогию с теорией вероятностей, можно сказать, что при равномерном распределении попадание значения $f(n)$ в любой класс вычетов равновероятно. Различным аспектам равномерного распределения функций посвящена монография Кейперса и Нидеррейтора [2].

В 1967 г. В. Наркевич [3] предложил рассматривать равномерное распределение в классах вычетов, взаимно простых с модулем N , и назвал такое распределение слабо равномерным распределением по модулю N . Более точно, пусть $S(x, r, f)$ — количество таких натуральных чисел $n \leq x$, что для r , взаимно простого с N , выполняется сравнение

$$f(n) \equiv r \pmod{N},$$

и $M(N, f)$ — множество натуральных чисел n , для которых $f(n)$ взаимно просто с N .

Определение 2. Целочисленная функция $f(n)$ называется слабо равномерно распределенной по модулю N , если множество $M(N, f)$ бесконечно и для любых целых чисел a и b , взаимно простых с N ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(x, a, f)}{S(x, b, f)} = 1.$$

Слабо равномерному распределению арифметических функций посвящено много работ (например, [3]–[6] и др., см. также библиографию в них).

В настоящей работе изучается слабо равномерное распределение функции $\theta(n)$, количество бесквадратных делителей числа n . Эта функция ранее рассматривалась на предмет асимптотики средних значений в работе [7].

Основные обозначения. Пусть m, n, k, N — натуральные числа, p, q — простые числа, $x > 1$ — вещественное число, $\chi(n)$ — характер Дирихле по модулю N , χ_0, χ_1 — главный и вещественный неглавный характеры соответственно, $G(N)$ — группа вычетов по модулю N , взаимно простых с модулем, $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\omega(n)$ — количество различных простых делителей числа n , $s = \sigma + it$ — комплексное число, Ω — множество точек s -плоскости, описываемое неравенствами с некоторой постоянной $c_0 > 0$:

$$\sigma = \Re s \geq 1 - \frac{c_0}{\ln(|t| + 2)}, \quad -\infty < t < \infty.$$

В работе доказываются следующие два утверждения.

Теорема 1. *Функция $\theta(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда $N = q^k$ и 2 — первообразный корень по модулю N , $q \geq 3$, $k \geq 1$.*

Теорема 2. *Если $N = q^k$, $q \geq 3$, $k \geq 1$, и 2 — первообразный корень по модулю N , то для любого вычета $r \in G(N)$, любого натурального $n \geq 1$ и любого действительного числа $x > 1$ справедливо равенство*

$$S(x, r, \theta) = \frac{1}{\varphi(N)} \left[x + \sum_{\chi \neq \chi_0, \chi_1} \left(\frac{x}{(\ln x)^{1-\chi(2)}} \sum_{m=1}^n \frac{\bar{\chi}(r) a_m(\chi, \theta)}{(\ln x)^{m-1}} + O \left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1-\Re \chi(2)}} \right) \right) \right],$$

где $a_m(\chi, \theta)$ — постоянные, и константа в символе O не зависит от x , но может зависеть от n .

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Введем дополнительные обозначения, которые понадобятся только в этом разделе. Для функции $f(n)$ через $R(N, f) \subset G(N)$ обозначим множество таких $r \in G(N)$, что существует простое число p , для которого выполняется сравнение $f(p) \equiv r \pmod{N}$ и $\Lambda(N, f)$ — подгруппа группы $G(N)$, порожденная множеством $R(N, f)$.

Так как $\theta(n) = 2^{\omega(n)}$, то для бесконечности множества $M(N, \theta)$ необходимо, чтобы N было нечетно.

Далее для установления слабо равномерного распределения будем использовать критерий В. Наркевича [3]. Пусть $f(n)$ — некоторая мультипликативная функция, которая обладает свойством

$$p \equiv q \pmod{N} \implies f(p) \equiv f(q) \pmod{N}. \quad (C)$$

Критерий В. Наркевича приведем в частном случае, необходимом для нашей задачи, а именно для случая, когда $R(N, f) \neq \emptyset$, чтобы не загромождать текст ненужными обозначениями. В. Наркевичем приводимый ниже критерий доказан для так называемых полиномоподобных функций, но на функции, обладающие свойством (C), он перенесен в работе Б.М. Широкова [5].

Теорема 3 (В. Наркевич). *Если функция $f(n)$ мультипликативна и обладает свойством (C), то для того, чтобы она была слабо равномерно распределена по модулю N , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое простое число p , что для любого неглавного характера χ , равного единице на подгруппе $\Lambda(N, f)$, выполнялось равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(f(p^n))}{p^n} = 0. \quad (1)$$

Следствие. Если $\Lambda(N, f) = G(N)$, то $f(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N .

Так как $R(N, \theta) = \{2\}$, то равенство $\Lambda(N, \theta) = G(N)$ возможно в том и только том случае, если 2 порождает $G(N)$, т. е. 2 является первообразным корнем по модулю N , но это для нечетного N возможно только тогда, когда $N = q^k$, $q \geq 3$ и $k \geq 1$.

Допустим теперь, что $\Lambda(N, \theta)$, порожденная двойкой, не совпадает с $G(N)$ и χ — неглавный характер, равный единице на $\Lambda(N, \theta)$. Для любого простого числа p имеем $\theta(p^k) = 2$. Значит, $\chi(\theta(p^k)) = \chi(2) = 1$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi(\theta(p^n))}{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} > 1.$$

Таким образом, условие (1) не выполняется. Поэтому при $\Lambda(N, f) \neq G(N)$ слабо равномерного распределения нет. Теорема доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Лемма. Пусть на области $G = \{s | \sigma > 1/2\}$ задана последовательность регулярных в ней функций $u_n(s)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность положительных чисел a_n , что для любого n и любого $s \in G_\varepsilon = \{s | \sigma \geq 1/2 + \varepsilon\}$ справедливо неравенство $|u_n(s)| \leq a_n$ и ряд

$$\sum_n a_n \quad (2)$$

сходится. Тогда в области G сходится произведение

$$u(s) = \prod_n (1 + u_n(s)),$$

а функция $u(s)$ регулярна в области G и ограничена при $\sigma \geq \frac{3}{4}$.

Доказательство. Так как ряд (2) сходится, можно считать, что $a_n < 1$. Покажем, что ряд

$$\sum_n \ln(1 + u_n(s)) \quad (3)$$

сходится равномерно на G_ε при любом $\varepsilon > 0$, если у логарифма закрепляется главная ветвь. Пусть выбрано $\varepsilon > 0$ и соответствующая последовательность чисел a_n такая, что $|u_n(s)| \leq a_n$ на G_ε . Тогда $\ln|1 + u_n(s)| \leq \ln(1 + |u_n(s)|) \leq |u_n(s)| \leq a_n$. На основании признака Вейерштрасса ряд $\sum_n \ln|1 + u_n(s)|$ равномерно сходится на G_ε .

Теперь рассмотрим ряд из аргументов

$$\sum_n \arg(1 + u_n(s)). \quad (4)$$

Ввиду того, что выбрана главная ветвь логарифма и $|u_n(s)| < 1$, имеем

$$|\arg(1 + u_n(s))| \leq \arcsin |u_n(s)| \leq \frac{\pi}{2} |u_n(s)| \leq \frac{\pi}{2} a_n.$$

Из этого неравенства и условий леммы следует, что ряд (4) сходится равномерно на G_ε . Таким образом, ряд (3) сходится равномерно на G_ε . Так как для любого компакта $K \subset G$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $K \subset G_\varepsilon$, то по теореме Вейерштрасса функция $\ln u(s)$ регулярна в области G . Следовательно, регулярна и функция $u(s)$.

Оценим $u(s)$ при $\sigma \geq \frac{3}{4}$, т. е. в области $G_{1/4}$. Пусть (a_n) — последовательность, соответствующая $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Тогда

$$|u(s)| = \prod_n |1 + u_n(s)| \leq \prod_n (1 + |u_n(s)|) \leq \prod_n (1 + a_n).$$

Последнее произведение сходится и функция $u(s)$ ограничена. $\square$

Поскольку далее речь пойдет только об одной арифметической функции $\theta(n)$, то количество $S(x, r, \theta)$ будем обозначать через $S(x, r)$.

Пусть $N = q^k$, $q > 2$, $k \geq 1$, и 2 — первообразный корень по модулю N . Наша задача — получить асимптотическую формулу для суммы

$$S(x, r) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \theta(n) \equiv r \pmod{N}}} 1.$$

Свойства ортогональности характеров Дирихле позволяют нам представить эту сумму, как сумму коэффициентов некоторого ряда Дирихле. А именно, пусть $w(m)$ есть индикаторная функция класса вычетов $m \equiv r \pmod{N}$. Упомянутое выше свойство характеров Дирихле можно записать в виде

$$w(m) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(r) \chi(m).$$

Тогда

$$S(x, r) = \sum_{n \leq x} w(\theta(n)) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(r) \sum_{n \leq x} \chi(\theta(n)) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(r) S(x, \chi), \quad (5)$$

где через $S(x, \chi)$ обозначена сумма по $n \leq x$.

Наша задача свелась к нахождению асимптотики суммы $S(x, \chi)$, которая является сумматорной функцией для коэффициентов производящего ряда Дирихле

$$F(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(\theta(n))}{n^s}. \quad (6)$$

Теперь для каждого характера χ необходимо применить следующую теорему тауберова типа, приведенную в работе [6].

Теорема 4 (Л. Громаковская, Б. Широков). Пусть для комплекснозначной функции $f(n)$ существует такое число $A > 0$, что $f(n) = O(\ln^A n)$ и функция $F(s)$, определенная для $\sigma > 1$ как сумма ряда

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

удовлетворяет следующим условиям:

- 1) существует комплексное число z и такая регулярная в Ω функция $G(s)$, что $G(1) \neq 0$ и при $\sigma > 1$

$$F(s) = \frac{G(s)}{(s-1)^z}, \quad s \in \Omega,$$

причем, если z не является целым рациональным числом, то выбирается главная ветвь $\ln(s-1)$;

- 2) существует такая константа c_1 , что для продолжения $F(s)$ в области Ω верна оценка

$$F(s) = O(\ln^{c_1}(2+|t|)), \quad |t| \geq 1.$$

Тогда существует такая постоянная $c > 0$, что

- 1) если $z = 0, -1, -2, \dots$, то

$$\sum_{n \leq x} f(n) = O(x e^{-c\sqrt{\ln x}});$$

- 2) если $z = 1$, то

$$\sum_{n \leq x} f(n) = G(1)x + O(x e^{-c\sqrt{\ln x}});$$

- 3) если z не является целым рациональным числом, то для любого положительного целого числа n

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{x}{(\ln x)^{1-z}} P_{n-1} \left(\frac{1}{\ln x} \right) + O \left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1-\Re z}} \right),$$

где

$$P_n(y) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{(z-1) \cdots (z-k)}{\Gamma(z)} y^k,$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, a_k — коэффициенты Тейлора функции $\frac{G(s)}{s}$ в точке $s = 1$.

Для применения этой теоремы необходимо изучить аналитические свойства продолжения функции $F(s, \chi)$ в области Ω .

Отметим, что функция $\theta(n)$ мультипликативна, а характер всегда переводит произведение в произведение, поэтому функция $\chi(\theta(n))$ мультипликативна.

Пусть $\chi = \chi_0$. Так как $\theta(n) = 2^{\omega(n)}$ и $\chi_0(2) = 1$, то

$$\chi_0(\theta(n)) = \chi_0(2^{\omega(n)}) = \chi_0^{\omega(n)}(2) = 1.$$

Следовательно, $F(s, \chi_0) = \zeta(s)$ и

$$S(x, \chi_0) = [x] = x + O(1). \quad (7)$$

Пусть $\chi = \chi_1$ — действительный характер, порождаемый значением $\chi(2) = -1$. При $\sigma > 1$ ряд Дирихле (6) сходится абсолютно, поэтому можно применить теорему Эйлера:

$$F(s, \chi_1) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} - \frac{1}{p^{2s}} - \dots \right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s - 1} \right).$$

Для каждого p умножим и разделим соответствующий член произведения на $1 + \frac{1}{p^s - 1}$, после чего выделим множитель для $p = 2$. В результате получим

$$F(s, \chi_1) = \frac{1}{\zeta(s)} \left(1 - \frac{1}{(2^s - 1)^2}\right) \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p^s - 1)^2}\right).$$

Ввиду того, что функция $\zeta(s)$ имеет в точке $s = 1$ изолированный полюс первого порядка, функция $\zeta^{-1}(s)$ в этой же точке имеет изолированный нуль первого порядка. Кроме того, функция $1 - (2^s - 1)^{-2}$, регулярная при $\sigma > 0$, также имеет нуль в этой же точке. Чтобы установить его порядок, вычислим производную этой функции в точке $s = 1$:

$$\frac{d}{ds} \left(1 - \frac{1}{(2^s - 1)^2}\right) = \frac{2^{s+1} \ln 2}{(2^s - 1)^3}.$$

Эта функция при $s = 1$ равна $4 \ln 2$, так что порядок нуля у рассматриваемого множителя равен единице. Таким образом, произведение $\frac{1}{\zeta(s)} \left(1 - \frac{1}{(2^s - 1)^2}\right)$ имеет нуль второго порядка в точке $s = 1$. Так как в силу известных оценок для нулей дзета-функции, $\zeta(s) \neq 0$ в области Ω , то это произведение регулярно в области Ω . Произведение по $p > 2$ есть регулярная в Ω и не равная нулю при $s = 1$ функция, как будет показано ниже. Следовательно, $F(s, \chi_1)$ удовлетворяет условию (1) теоремы 4.

Проверим условие (2). Второй сомножитель этого произведения ограничен в области Ω , а для $\zeta^{-1}(s)$, как известно, существует такая константа $B > 0$, что $\zeta^{-1}(s) = O(\ln^B(2 + |t|))$ в области Ω при $|t| \geq 1$ (см. [8], с. 83).

Рассмотрим произведение по $p > 2$. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда для $\sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ имеем

$$\left| \frac{1}{(p^s - 1)^2} \right| \leq \frac{1}{(p^\sigma - 1)^2} \leq \frac{1}{(p^{\varepsilon+1/2} - 1)^2}. \quad (8)$$

К произведению применим лемму, полагая (в качестве номера можно взять порядковый номер простого числа, но проще нумеровать простыми числами)

$$u_p(s) = -\frac{1}{(p^s - 1)^2}, \quad a_p = \frac{1}{(p^{\varepsilon+1/2} - 1)^2}.$$

Ряд с членами a_p сходится, поэтому бесконечное произведение удовлетворяет условиям леммы и представляет собой регулярную и ограниченную функцию при $\sigma \geq \frac{3}{4}$, а значит, и в области Ω .

В итоге в области Ω при $|t| \geq 1$

$$F(s, \chi_1) = O(\ln^B(|t| + 2)),$$

т. е. удовлетворяется условие (2) теоремы 4.

Таким образом, к функции $F(s, \chi_1)$ можно применить теорему 4 с показателем $z = -2$, поэтому

$$S(s, \chi_1) = O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}). \quad (9)$$

Пусть $\chi \neq \chi_0$ и $\chi \neq \chi_1$. Число $\chi(2)$ теперь действительное. Ряд Дирихле (6) абсолютно сходится при $\sigma > 1$. Поэтому на основании теоремы Эйлера функцию $F(s, \chi)$ в этой области

можно представить в виде

$$F(s, \chi) = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(2)}{p^s} + \frac{\chi(2)}{p^{2s}} + \dots \right) = \prod_p \left(1 + \frac{\chi(2)}{p^s \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)} \right).$$

Обозначим $a = \chi(2)$. Для фиксированного p рассмотрим отдельно множитель произведения, обозначая $z = p^{-s}$. Фиксируя главную ветвь $\ln(1-z)$, умножим этот множитель на $(1-z)^a$:

$$\left(1 + \frac{az}{1-z} \right) (1-z)^a = \left(1 + \frac{az}{1-z} \right) (1-az+z^2g(z)). \quad (10)$$

Пусть

$$g(z) = \frac{(1-z)^a - 1 + az}{z^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2) \cdots (a-n+1)}{n!} z^{n-2}.$$

Эта функция регулярна при $|z| < 1$. Выберем положительное число $\delta < 1$. Более конкретно этот выбор будет описан ниже. Оценим $g(z)$ в круге $|z| \leq \delta$. Так как $|a(a-1)(a-2) \cdots (a-n+1)| \leq n!$, то

$$|g(z)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |z|^{n-2} \leq \frac{1}{1-\delta}. \quad (11)$$

Равенство (10) можно привести к виду

$$\left(1 + \frac{az}{1-z} \right) (1-z)^a = 1 + z^2 h(z),$$

обозначая $h(z) = \frac{a-a^2 + (1+(a-1)z)g(z)}{1-z}$. Для этого преобразуем его правую часть:

$$\left(1 + \frac{az}{1-z} \right) (1-az+z^2g(z)) = 1 + z^2 \left(\frac{a-a^2}{1-z} + \frac{azg(z)}{1-z} + g(z) \right) = 1 + z^2 h(z).$$

Оценим функцию $h(z)$ в круге $|z| \leq \delta$, учитывая оценку (11):

$$|h(z)| \leq \frac{2 + \frac{2\delta + 1}{1-\delta}}{1-\delta} = \frac{3}{(1-\delta)^2} = C_1, \quad (12)$$

где C_1 — обозначение полученной постоянной. Возвращаясь к старым переменным, получим представление для производящей функции

$$F(s, \chi) = \zeta^{\chi(2)}(s) \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} h\left(\frac{1}{p^s}\right) \right), \quad (13)$$

причем для $\ln \zeta(s)$ выбираем главную ветвь.

Определимся с выбором числа δ . Выберем ε в промежутке $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ и положим $\delta = 2^{-(\varepsilon+1/2)}$. Применим к произведению по простым числам в $F(s, \chi)$ лемму, полагая

$$u_p(s) = \frac{1}{p^{2s}} h\left(\frac{1}{p^s}\right).$$

Неравенство (12) при $\sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ для каждого p дает оценку

$$\left| \frac{h(p^{-s})}{p^{2s}} \right| \leq \frac{C_1}{p^{1+2\varepsilon}}.$$

Значит, в лемме положим $a_p = \frac{C_1}{p^{1+2\varepsilon}}$. Бесконечное произведение удовлетворяет условиям леммы и можем заключить, что оно представляет собой регулярную, не равную нулю при $s = 1$ и ограниченную в Ω функцию.

Обозначим

$$G(s, \chi) = [(s-1)\zeta(s)]^{\chi(2)} \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^{2s}} h\left(\frac{1}{p^s}\right)\right).$$

Тогда получаем окончательное представление для производящей функции Дирихле при $\sigma > 1$

$$F(s, \chi) = \frac{G(s, \chi)}{(s-1)^{\chi(2)}}. \quad (14)$$

Функция $G(s, \chi)$ не обращается в нуль при $s = 1$ и регулярна в области Ω . В полученном представлении для $F(s, \chi)$ при $\sigma > 1$ правая часть определена в области Ω . Значит, равенство (14) дает нам продолжение производящей функции в область Ω .

Таким образом, функция $F(s, \chi)$ удовлетворяет первому условию тауберовой теоремы 4.

Перейдем к проверке второго условия, используя представление (13). Этим равенством функция представлена как произведение $\zeta^{\chi(2)}(s)$ и функции, которая ограничена при $\sigma \geq \frac{3}{4}$, так что ее оценка при больших $|t|$ в области Ω определяется оценками дзета-функции.

Итак, пусть $\chi(2) = a + bi$. Фиксируем главную ветвь $\ln \zeta(s)$ и пусть $\varphi = \arg \zeta(s)$. Тогда $|\varphi| \leq \pi$. Далее,

$$\zeta^{a+bi}(s) = e^{(a+bi)(\ln |\zeta(s)| + i\varphi)} = e^{a \ln |\zeta(s)| - b\varphi} e^{(b \ln |\zeta(s)| + a\varphi)i}.$$

Отсюда получаем $|\zeta^{a+bi}(s)| \leq |\zeta(s)|^a e^{b|\pi|}$. Если $a \geq 0$, то ввиду оценки (см. [8], с. 75)

$$\zeta(s) = O(\ln |t|), \quad |t| \geq 3, \quad s \in \Omega,$$

в области Ω для $|t| \geq 1$ получим $\zeta^{\chi(2)} = O(\ln^a(|t| + 2))$. Если же $a < 0$, то поступим аналогично, используя следующее утверждение: существует такое число $B > 0$, что в области Ω для $|t| \geq 3$ справедлива оценка (см. [8], с. 83) $\frac{1}{\zeta(s)} = O(\ln^B t)$. В результате получим, что существует такое число $B > 0$, что в области Ω для $|t| \geq 1$

$$\zeta^{\chi(2)}(s) = O(\ln^{|a|B}(|t| + 2)).$$

Таким образом, функция $F(s, \chi)$ удовлетворяет и второму условию теоремы 4. Применяя эту теорему, получим

$$S(x, \chi) = \frac{x}{(\ln x)^{1-\chi(2)}} \sum_{m=1}^n \frac{a_m(\chi, \theta)}{(\ln x)^{m-1}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1-\Re \chi(2)}}\right).$$

Подставим теперь полученное асимптотическое равенство и равенства (7), (9) в формулу (5), тогда получим

$$S(x, r, \theta) = \frac{1}{\varphi(N)} \left[x + \sum_{\chi \neq \chi_0, \chi_1} \left(\frac{x}{(\ln x)^{1-\chi(2)}} \sum_{m=1}^n \frac{\bar{\chi}(r) a_m(\chi, \theta)}{(\ln x)^{m-1}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1-\Re \chi(2)}}\right) \right) \right].$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Асимптотические формулы для частоты попадания значений функции $f(n)$ в заданный класс вычетов, т. е. для $x^{-1}S(x, r, f)$, в работах многих авторов (см., например, [3], [4]) содержат лишь главные члены асимптотики. Это объясняется тем, что из производящих рядов Дирихле, применяемых для получения асимптотики, извлекаются лишь свойства, необходимые для применения теоремы Деланжа. Но эти ряды, как показывает доказательство теоремы 2 работы, имеют лучшие свойства, позволяющие применить теорему 4 тауберова типа, которая дает более точный результат.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Niven I. *Uniform distribution of sequences of integers*, Trans. Amer. Math. Soc. **5** (1), 35–40 (1961).
- [2] Kuipers L., Niederreiter H. *Uniform distribution of sequences* (Wiley-Interscience, New-York, 1974).
- [3] Narckiewicz W. *On distribution of values of multiplicative functions in residue classes*, Acta Arithm. **12** (3), 269–279 (1967).
- [4] Фоменко О.М. *Распределение значений мультипликативных функций по простому модулю*, Зап. научн. сем. ЛОМИ **93** (6), 218–224 (1980).
- [5] Широков Б.М. *Распределение значений арифметических функций в классах вычетов*, Зап. научн. сем. ЛОМИ **121**, 176–186 (1983).
- [6] Shirokov B.M., Gromakovskaya L.A. *Distribution of values of the sum of unitary divisors in residue classes*, Пробл. анализа **5(23)** (1), 31–44 (2016).
- [7] Gioia A.A., Vaidya A.M. *The number of squarefree divisors of an integer*, Duke Math. J. **33** (4), 797–799 (1966).
- [8] Прахар К. *Распределение простых чисел* (Мир, М., 1967).

Лариса Александровна Громаковская
Петрозаводский государственный университет,
пр. Ленина, д. 33, г. Петрозаводск, 185910, Россия,
e-mail: gromak_la@mail.ru

Борис Михайлович Широков
Петрозаводский государственный университет,
пр. Ленина, д. 33, г. Петрозаводск, 185910, Россия,
e-mail: bmshir@mail.ru

L.A. Gromakovskaya and B.M. Shirokov

Distribution of the number of square-free divisors in residue classes

Abstract. The notion of weekly uniform distribution of arithmetical functions was introduced by W. Narckiewicz. The existence problem of that distribution was solved and asymptotic formulas for frequency of hits of function values to residue classes coprime with a module was done for many functions in various papers. That asymptotic formulas contained only principal part of the asymptotic, as rule. Such problem solves for the function which gives the number of square-free divisors of integer, but the asymptotic formula is the asymptotic series.

Keywords: distribution in the residue classes, asymptotic formulas, weekly uniform distribution, number of square-free divisors.

Larisa Aleksandrovna Gromakovskaya
Petrozavodsk State University,
33 Lenin Ave., Petrozavodsk, 185910 Russia,
e-mail: gromak_la@mail.ru

Boris Mikhailovich Shirokov
Petrozavodsk State University,
33 Lenin Ave., Petrozavodsk, 185910 Russia,
e-mail: bmshir@mail.ru