Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Мамадалиев, Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 3, 12–28

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-12-28>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 02:54:42

Н.А. МАМАДАЛИЕВ

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИГР С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

Аннотация. Изучены линейные дифференциальные игры, описываемые системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при интегральных ограничениях на управления игроков. Предлагаются различные схемы получения достаточных условий для разрешимости линейной задачи преследования в системе с запаздыванием.

Ключевые слова: игра, преследование, запаздывания, терминальное множество, преследователь, убегающий, управление.

УДК: 517.97

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-3-12-28

1. ВВЕДЕНИЕ

Во второй половине XX в. одним из интенсивно развивающихся разделов современной математики стала теория управляемых процессов. В ее развитии существенную роль сыграл принцип максимума Л.С.Понтрягина. Следует также отметить метод динамического программирования Р.Беллмана и правило экстремального прицеливания Н.Н.Красовского, позволяющие глубоко исследовать ряд новых задач, имеющих прикладное значение и не укладывающихся в рамки ранее существовавших теорий. Наряду с теорией управления объектами, была развита теория принятия решений в процессах, протекающих в условиях конфликта, т.е. когда управление процессом осуществляется двумя противоборствующими сторонами.

Конфликтно управляемые процессы, описываемые дифференциальными уравнениями, называются дифференциальными играми. Настоящий термин был введен американским математиком Р.Айзексом — одним из основоположников теории дифференциальных игр. Исследования Айзекса по проекту корпорации RAND (США), выполненные в начале второй половины XX в., были опубликованы в 1965 г. в виде монографии [1], где был предложен оригинальный метод решения дифференциальных игр и достаточно глубоко выяснены все основные принципиальные трудности проблемы. При этом заслуживает внимание то, что стратегия противоборствующих сторон конструируется в виде синтезирующих функций, зависящих только от состояния игры. Р.Айзекс с помощью своего метода решил большое количество интересных прикладных задач и получил оригинальные результаты.

Зарубежными учеными дифференциальные игры изучались в основном как часть общей теории игр и при таком подходе ими рассматривались вопросы существования решения

Поступила в редакцию 06.12.2018, после доработки 13.10.2019. Принята к публикации 18.12.2019.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований, проект ОТ-Ф4-33.

игры, седловой точки или ситуации равновесия, цены игры и т. д. В этой области следует отметить работы Л. Берковица [2], [3], У. Флеминга [4], А. Фридмана [5] и др., которые внесли существенный вклад в развитие теории дифференциальных игр.

Становление и систематическое развитие теории дифференциальных игр началось в конце 50-х и начале 60-х гг. XX столетия. Оно стимулировалось потребностями практики, большими успехами математической теории управления, теории игр и исследования операций. Прогресс теории дифференциальных игр связан прежде всего с именами советских и зарубежных математиков Л.С. Понтрягина, Н.Н. Красовского, Е.Ф. Мищенко, Р. Айзекса, У. Флеминга. Крупный вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли Ю.С. Осипов, Р.В. Гамкрелидзе, А.И. Субботин, А.Б. Куржанский, А.В. Кряжковский, Ф.Л. Черноусько, В.Н. Ушаков, Н.Ю. Лукоянов, Б.Н. Пшеничный, Н.Ю. Сатимов, А.А. Азамов, А.Г. Ченцов, В.Е. Третьяков, Л.А. Петросян, М.С. Никольский, В.И. Максимов, Н.Н. Субботина, П.Б. Гусятников, Н.Л. Григоренко, В.И. Ухоботов, А.А. Чикрий и многие другие математики.

Основополагающий вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли школы Л.С. Понтрягина и Н.Н. Красовского. Н.Н. Красовским и представителями его научной школы [6]–[9] был предложен и развит позиционный подход к дифференциальным играм. Этот подход, основанный на конструктивных законах управления с обратной связью, позволил изучить структуру дифференциальных игр и выдвинул фундаментальный принцип построения разрешающих управлений — принцип экстремального прицеливания, сформулировать и доказать центральный результат теории позиционных дифференциальных игр — теорему об альтернативе. Затем была развита более общая концепция позиционной дифференциальной игры, доказаны теоремы существования цены игры и седловой точки, предложены конструктивные методы формирования оптимальных стратегий. Итоги подведены в совместной с А.И. Субботиным монографии [10]. Обоснованы методы детерминированных и стохастических программных конструкций. Решение игровой задачи сводится к последовательному выбору экстремальных управлений, сохраняющих траекторию конфликтно управляемого процесса на стабильном мосту и приводящих траекторию по нему на терминальное множество.

Теория позиционных игр основана на понятии стабильного моста и правиле экстремального прицеливания [11]–[18]. Одним из способов построения стабильных мостов являются попятные процедуры, позволяющие вскрыть структуру дифференциальной игры. Начальные идеи в этом направлении принадлежат Л.С. Понтрягину и реализованы им в методе альтернированного интеграла [19]–[21]. Идею рассматривать дифференциальную игру с двух точек зрения предложил и развил Л.С. Понтрягин [22]. При таком подходе выдвигается на первый план один из игроков, которому предоставляется право строить управление на основе определенной информационной дискриминации противника.

Фундаментальные результаты по решению дифференциальных игр преследования и убегания получили Л.С. Понтрягин и Е.Ф. Мищенко. В работе [23] сформулированы достаточные условия разрешимости задачи преследования в нелинейных дифференциальных играх. В ней использован формализм принципа максимума — одного из центральных методов теории управления [24]. Основным результатом заключается в описании множества начальных позиций, из которых гарантируется возможность завершения преследования, а также в вычислении времени преследования, и способ формирования управления преследователя, реализующего процесс преследования. Результаты, полученные Л.С. Понтрягиным и Е.Ф. Мищенко [25], привели к созданию Л.С. Понтрягиным первого и второго прямых

методов решения задачи преследования для линейных дифференциальных игр. Наиболее простым и достаточно эффективным для решения конкретных задач преследования является первый метод Л.С. Понтрягина. Данный метод дает удобно проверяемые достаточные условия разрешимости задачи преследования в классе контрстратегий. Первый метод Л.С. Понтрягина послужил основой для многих обобщений, в частности, [26]–[35], а также этот метод имеет тесную связь с методом разрешающих функций [36]. В работе [37] разработан третий промежуточный прямой метод для линейных дифференциальных игр. А. Азамовым [38]–[42] обнаружена двойственность альтернированного интеграла Л.С. Понтрягина. Среди работ, посвященных развитию и применению методов Л.С. Понтрягина, следует отметить [19], [25], [26], [37], [39]–[48].

Во всех упомянутых выше работах изучались дифференциальные игры, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Однако при более тщательном изучении часто становится очевидным, что более реалистичная модель игры должна включать некоторые из предшествующих состояний системы. Простейший тип зависимости от прошлого в дифференциальных играх осуществляется через фазовые переменные. Изучению дифференциальных игр, описываемых дифференциально-разностными уравнениями, посвящены работы А.Б. Куржанского [11], М.С. Никольского [30], [31], А.А. Чикрия, Г.Ц. Чикрия [34], А.Б. Куржанского, Ю.С. Осипова [49], Н.Н. Красовского, Ю.С. Осипова [50], В.В. Остапенко, А.П. Яковлева [51], Ю.С. Осипова [52]. В этих работах приводятся достаточные условия успешного завершения дифференциально-разностной игры сближения, выясняется структура экстремальных стратегий сближения, доказан ряд теорем об альтернативе, изучаются дифференциально-разностные игры преследования и убегания при геометрических и интегральных ограничениях на управления игроков, исследуется структура дифференциальных игр. Настоящая работа примыкает к публикациям [27], [29], [35], [37], [51] и продолжает исследования [12], [36], [30]–[34].

Постановка задачи. В конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается линейная дифференциальная игра преследования ([28]; [54], с. 198)

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, A, B, C, D — постоянные матрицы, размерности которых $n \times n$, $n \times n$, $n \times p$, $n \times q$ соответственно, h — фиксированное положительное число (величина запаздывания), $u(t) \in \mathbb{R}^p$ — управление преследующего игрока, $v(t) \in \mathbb{R}^q$ — управление убегającego игрока соответственно. Они выбираются как суммируемые с квадратом функции $u(t)$, $v(t)$, удовлетворяющие интегральным ограничениям [18], [32]

$$\|u(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \leq \rho, \quad \|v(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)} \leq \sigma, \quad (2)$$

где ρ, σ — неотрицательные константы.

Измеримые функции $u = u(t)$, $v = v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегającego игроков соответственно.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено непустое терминальное множество $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 — выпуклое компактное подмножество подпространства L , где L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$). Начальным положением для преследования (1) является n -мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$. Отрезок $-h \leq t \leq 0$, на

котором задано начальное положение (функция), назовем начальным множеством и обозначим через X , т. е.

$$X = \left\{ \varphi(\cdot) : \varphi(t) \text{ — абсолютно непрерывная функция,} \right. \\ \left. \text{определенная на отрезке } [-h, 0], z(0) = \varphi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus M \right\}. \quad (3)$$

Преследование начинается из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ и считается законченным в момент времени $\tilde{t} = \tilde{t}[\varphi(\cdot)]$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество $M : z(\tilde{t}) \in M$. Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Через $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами ([54], с. 25–26; [55], с. 359–361):

- а) $K(t) = \tilde{0}$, $t < 0$, $\tilde{0}$ — нулевая матрица порядка n ;
- б) $K(0) = E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n ;
- с) элементы матрицы $K(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, принадлежат классу $C^1[0, \tau]$;
- д) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t - h), \quad t > 0. \quad (4)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, $-\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а)–д), могут быть доказаны обычным методом последовательного интегрирования уравнения (4).

Пусть допустимые управления $u = u(t)$, $v = v(t)$ выбраны на отрезке $[0, \tau]$, $\tau > 0$, тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) с начальным условием (3) имеется представление ([56], с. 97–101; [57], с. 33–35)

$$z(\tau) = K(\tau)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(\tau - t - h)B\varphi(t)dt - \int_0^\tau K(\tau - t)[Cu(t) - Dv(t)]dt. \quad (5)$$

Определение. Будем говорить, что в игре (1), (2) из начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = T(\varphi(\cdot))$, $0 \leq T < +\infty$, если существует функция $u(t, v)$, $0 \leq t < +\infty$, $v \in \mathbb{R}^q$, $u(t, v) \in \mathbb{R}^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, $v(t) \in \mathbb{R}^q$, удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq \sigma$, функция $u(t) = u(t, v(t))$, $0 \leq t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq \rho$ и траектория $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$, уравнения (1) с учетом начального условия (3) до момента T попадает на терминальное множество M при некотором $t = t^* \in [0, T]$, т. е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M$.

Требуется найти начальные положения $\varphi(\cdot) \in X$, из которых в игре (1), (2) возможно завершение преследования за конечное время T .

2. ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Обозначим через π матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L , а через $X * Y = \{x : x + Y \subset X\} = \bigcup_{y \in Y} (X - y)$ — геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y , $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ ([22], с. 346).

Пусть $\alpha \in [0, \frac{\rho}{\sigma})$ — произвольная константа, $\mu(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, — суммируемая с квадратом неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию $\int_0^\tau \mu^2(t)dt \leq (\rho - \alpha\sigma)^2$,

$F(t) : L \rightarrow L$, $t \in [0, \tau]$, — квадратная матрица размерности ν , $\nu = \dim L$, полунепрерывная сверху, зависящая от t , и $M_2(\tau)$ — выпуклое компактное подмножество подпространства L , определенное следующим образом:

$$M_2(\tau) = M_1 \ast \bigcup_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0,\tau]} \leq \sigma} \int_0^\tau [E_\nu - F(\tau - t)] \pi K(\tau - t) Dv(t) dt,$$

где E_ν — единичная матрица порядка ν .

Пусть $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, — произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию $\int_0^\tau M(t) dt \subset M_2(\tau)$ ([26], [28]).

Введем множество

$$\hat{w}(M(t), t) = \bigcap_{v \in \mathbb{R}^q} \left\{ \left[M(\tau - t) + \pi K(\tau - t) C S_{r(t)} \right] - F(\tau - t) \pi K(\tau - t) Dv \right\},$$

где $S_{r(t)}$ — p -мерный замкнутый шар радиуса $r(t) = \alpha|v| + \mu(\tau - t)$, $0 \leq t \leq \tau$, с центром в начале координат.

Предположение 1. *Существуют константа $\alpha \in [0, \frac{\rho}{\sigma})$, матрица F , функция $\mu(t)$ и многозначное отображение $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такие, что для всех $t \in [0, \tau]$ непусты множества $M_2(\tau)$, $\hat{w}(M(t), t)$.*

Введем множество

$$W(\tau) = \int_0^\tau \hat{w}(M(t), t) dt, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad W(0) = M_1. \quad (6)$$

Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$. Введем вектор-функцию

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau) \varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h) B \varphi(t) dt - f_1(\tau),$$

где $f_1(\tau) \in W(\tau)$. В соответствии с определением интеграла (6) существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \hat{w}(M(t), t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такой, что имеет место равенство $f_1(\tau) = \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t) dt$, зафиксируем его. Тогда вектор-функция $\xi[\tau, \varphi(\cdot)]$ имеет вид

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau) \varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h) B \varphi(t) dt - \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t) dt.$$

Легко показать, что если для некоторого положительного τ функция $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = 0$, то задача преследования разрешима к моменту τ . В дальнейшем предполагается, что $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0$ для всех $\tau \geq 0$. Положим

$$\eta[\tau, \varphi(\cdot)] = \frac{\xi[\tau, \varphi(\cdot)]}{|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]|}, \quad \xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0. \quad (7)$$

Далее определим числовую функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$ следующим образом [21]:

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lambda \eta[\tau, \varphi(\cdot)] \in \left[M(\tau - t) + \pi K(\tau - t) C S_{\alpha|v| + \mu(\tau - t)} \right] - \right.$$

$$-F(\tau - t)\pi K(\tau - t)Dv - \tilde{w}(\tau - t)\}.$$

Предположение 2. Для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ существует число $\tau = \tau_1 > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$|\xi[\tau_1, \varphi(\cdot)]| - \inf \left\{ \int_0^{\tau_1} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v(t)) dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0, \tau_1]} \leq \sigma \right\} \leq 0. \quad (8)$$

Теорема 1. Если выполнены условия предположений 1, 2, то в игре (1), (2) из заданного начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = \tau_1$.

Доказательство. Для произвольной измеримой функции $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, $\|v(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq \sigma$, рассмотрим функцию $\rho(t; v(r))$, $0 \leq r \leq t$, $0 \leq t \leq \tau$, определенную следующим образом ([27], с. 95; [46], с. 157):

$$\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t) = |\xi[\tau, \varphi(\cdot)]| - \int_0^t \lambda(\varphi(\cdot), \tau, r, v(r)) dr.$$

Утверждается, что существует момент времени $t = t^* \in [0, \tau]$ такой, что $\rho(t^*; v(t), 0 \leq t \leq t^*) = 0$ (в силу предположения 2 такой момент времени существует). Действительно, в противном случае

$$\begin{aligned} 0 < \rho(\tau; v(t), 0 \leq t \leq \tau) &= |\xi[\tau, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau} \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v(t)) dt \leq \\ &\leq |\xi[\tau, \varphi(\cdot)]| - \inf_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0, \tau]} \leq \sigma} \int_0^{\tau} \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v(t)) dt, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (8). Таким образом, пусть $\rho(t^*; v(t), 0 \leq t \leq t^*) = 0$. С учетом этого факта выберем функции $u(t) \in S_{\alpha|v|+\mu}(\tau-t)$, $m_1(t) \in M(t)$, которые в момент времени $t \in [0, t^*]$ определяются как решения уравнения

$$\begin{aligned} m_1(\tau - t) + \pi K(\tau - t)Cu(t) - F(\tau - t)\pi K(\tau - t)Dv(t) &= \\ &= \tilde{w}(\tau - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v(t))\eta[\tau, \varphi(\cdot)], \end{aligned} \quad (9)$$

а в момент времени $t \in (t^*, \tau]$ — как решения уравнения

$$m_1(\tau - t) + \pi K(\tau - t)Cu(t) - F(\tau - t)\pi K(\tau - t)Dv(t) = \tilde{w}(\tau - t). \quad (10)$$

Промежутки времени $[0, t^*]$ и $(t^*, \tau]$ в дальнейшем будем называть “активным” и “пассивным” соответственно [53].

В силу предположения 1 существует одно или много решений уравнения (9), (10). Согласно утверждению П.2 из ([27], с. 189) функция $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$ является измеримой функцией по t при фиксированных v . Следовательно, в силу теоремы Филиппова–Кастена ([58], с. 179) уравнения (9), (10) разрешимы в классе измеримых функций. Покажем, что при таком способе управления параметром $u(t)$ преследователь может гарантировать окончание преследования за время τ .

Используя формулу Коши (см. (5)) после его проектирования на L , прибавляя и вычитая величину $\int_0^\tau w(\tau - t)dt$, учитывая закон выбора управлений (9), (10), при $\tau = \tau_1$ получаем

$$\begin{aligned}
\pi z(\tau_1) &= \pi K(\tau_1)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau_1 - t - h)B\varphi(t)dt - \\
&- \int_0^{\tau_1} \left[\pi K(\tau_1 - t)Cu(t) - F(\tau_1 - t)\pi K(\tau_1 - t)Dv(t) \right] dt + \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_1 - t)dt + \\
&+ \int_0^{\tau_1} \left[E_\nu - F(\tau_1 - t) \right] \pi K(\tau_1 - t)Dv(t)dt - \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_1 - t)dt = \xi[\tau_1, \varphi(\cdot)] + \\
&+ \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_1 - t)dt - \int_0^{t^*} \left[\tilde{w}(\tau_1 - t) - m_1(\tau_1 - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v(t))\eta[\tau_1, \varphi(\cdot)] \right] dt - \\
&- \int_{t^*}^{\tau_1} \left[\tilde{w}(\tau_1 - t) - m_1(\tau_1 - t) \right] dt + \int_0^{\tau_1} \left[E_\nu - F(\tau_1 - t) \right] \pi K(\tau_1 - t)Dv(t)dt = \\
&= \xi[\tau_1, \varphi(\cdot)] + \int_0^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_1 - t)dt - \int_0^{t^*} \tilde{w}(\tau_1 - t)dt - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v(t))\eta[\tau_1, \varphi(\cdot)]dt + \\
&+ \int_0^{t^*} m_1(\tau_1 - t)dt - \int_{t^*}^{\tau_1} \tilde{w}(\tau_1 - t)dt + \int_{t^*}^{\tau_1} m_1(\tau_1 - t)dt + \int_0^{\tau_1} \left[E_\nu - F(\tau_1 - t) \right] \pi K(\tau_1 - t)Dv(t)dt = \\
&= \int_0^{\tau_1} m_1(\tau_1 - t)dt + \int_0^{\tau_1} \left[E_\nu - F(\tau_1 - t) \right] \pi K(\tau_1 - t)Dv(t)dt. \tag{11}
\end{aligned}$$

Поскольку, как установлено выше,

$$\xi[\tau_1, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v(t))\eta[\tau_1, \varphi(\cdot)]dt = \left[\xi[\tau_1, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t, v(t))dt \right] \eta[\tau_1, \varphi(\cdot)] = 0.$$

Следовательно, из (11) имеем

$$\begin{aligned}
\pi z(\tau_1) &= \int_0^{\tau_1} m_1(\tau_1 - t)dt + \int_0^{\tau_1} \left[E_\nu - F(\tau_1 - t) \right] \pi K(\tau_1 - t)Dv(t)dt \in \\
&\in \int_0^{\tau_1} M(\tau_1 - t)dt + \int_0^{\tau_1} \left[E_\nu - F(\tau_1 - t) \right] \pi K(\tau_1 - t)Dv(t)dt \subset M_1.
\end{aligned}$$

Таким образом, для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ имеет место включение $\pi z(\tau_1) \in M_1$, это эквивалентно тому, что $z(\tau_1) \in M$, т. е. преследование заканчивается за время τ_1 . Для полного доказательства теоремы осталось показать, что управление $u(t)$, $0 \leq t < +\infty$,

является допустимым. Действительно, в силу неравенства Коши–Буняковского ([59], с. 49), справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |u(t)|^2 dt &\leq \alpha^2 \int_0^{\tau_1} |v(t)|^2 dt + 2\alpha \int_0^{\tau_1} \mu(\tau_1 - t) |v(t)| dt + \int_0^{\tau_1} \mu^2(\tau_1 - t) dt \leq \\ &\leq \left(\alpha\sigma + \sqrt{\int_0^{\tau_1} \mu^2(\tau_1 - t) dt} \right)^2 \leq \rho^2, \end{aligned}$$

что и означает допустимость управления $u(t)$, $0 \leq t \leq \tau_1$. $\square$

Через $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, обозначим произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию $\int_0^\tau M(t) dt \subset \delta M_1$, где $\delta \in [0, 1]$ — некоторая константа. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$. Положим

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau) \varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h) B \varphi(t) dt + \beta - f_2(\tau),$$

где $\beta \in L$ и $f_2(\tau) \in W(\tau)$. В силу предположения 1 существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \hat{w}(M(t), t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такой, что имеет место равенство $f_2(\tau) = \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t) dt$. Зафиксируем его. Тогда

$$\xi[\tau, \beta, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau) \varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h) B \varphi(t) dt + \beta - \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t) dt.$$

Определим числовую функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$ следующим образом [28]:

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi(\cdot), \tau, \beta, t, v) = \sup \Big\{ \lambda \geq 0 : \lambda \xi[\tau, \beta, \varphi(\cdot)] \in \Big[M(\tau - t) + \pi K(\tau - t) C S_{\alpha|v| + \mu(\tau - t)} \Big] - \\ - F(\tau - t) \pi K(\tau - t) D v - \tilde{w}(\tau - t) \Big\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Предположение 3. Для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ существуют число $\tau = \tau_2 > 0$, константа $\delta \in [0, 1]$, вектор $\beta \in L$, матрица F , функция $\mu(t)$ и многозначное отображение $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, такие, что

- а) для всех $t \in [0, \tau_2]$ множество $\hat{w}(M(t), t)$ непусто;
- б) справедливо неравенство

$$1 - \inf \left\{ \int_0^{\tau_2} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, \beta, t, v(t)) dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0, \tau_2]} \leq \sigma \right\} \leq 0;$$

с) для любого допустимого управления $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, убегающего игрока имеет место включение

$$\int_0^{\tau_2} \left[E_\nu - F(\tau_2 - t) \right] \pi K(\tau_2 - t) D v(t) dt \in \beta + (1 - \delta) M_1.$$

Теорема 2. Если выполнены условия предположения 3, то в игре (1), (2) из заданного начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = \tau_2$.

Доказательство. Пусть для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ выполнены условия предположения 3 и $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, — произвольное допустимое управление убегающего игрока. Определим при $t \geq 0$ функцию

$$\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda(\varphi(\cdot), r, \beta, t, v(r)) dr, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Обозначим через t^* первый положительный корень уравнения $\rho(t^*; v(r), 0 \leq r \leq t^*) = 0$, если величина $\rho(t; v(r), 0 \leq r \leq t)$ положительна для всех $t \in [0, \tau]$, то полагаем $t^* = \tau$. Выберем функции $u(t) \in S_{\alpha|v|+\mu(t)}$, $m(t) \in M(t)$ в момент времени $t \in [0, t^*]$ как решения уравнения

$$\begin{aligned} m(\tau - t) + \pi K(\tau - t)Cu(t) - F(\tau - t)\pi K(\tau - t)Dv(t) = \\ = \tilde{w}(\tau - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, \beta, t, v(t))\xi[t, \beta, \varphi(\cdot)], \end{aligned} \quad (13)$$

а в момент времени $t \in (t^*, \tau]$ функции $u(t) \in S_{\alpha|v|+\mu(t)}$ и $m(t) \in M(t)$ выберем как решения уравнения

$$m(\tau - t) + \pi K(\tau - t)Cu(t) - F(\tau - t)\pi K(\tau - t)Dv(t) = \tilde{w}(\tau - t). \quad (14)$$

Далее, в силу п. а) предположения 3 существует решение уравнений (13), (14). Отметим, что интеграл в (6) имеет смысл, так как функция (12) является измеримой при произвольной измеримой функции $v(t)$, $t \in [0, \tau]$. Следовательно, измеримой является и функция

$$\inf_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0, \tau]} \leq \sigma} \left[\lambda(\varphi(\cdot), \tau, \beta, t, v(t)) \right], \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Согласно теореме Филиппова–Кастена ([58], с. 179) уравнения (13), (14) разрешимы в классе измеримых функций. Покажем, что в этом случае преследование завершится за время $\tau = \tau_2$. Для этого подставим функции $u(t)$, $v(t)$, $t \in [0, \tau]$, в уравнение (1). Тогда для решения полученного уравнения по формуле Коши (см. (5)) с учетом начального условия (3), после его проектирования на L приходим к следующему соотношению:

$$\pi z(\tau) = \pi K(\tau)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)B\varphi(t)dt - \int_0^\tau \pi K(\tau - t) \left[Cu(t) - Dv(t) \right] dt.$$

Учитывая закон выбора управлений (13), (14), при $\tau = \tau_2$ имеем

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_2) = \pi K(\tau_2)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau_2 - t - h)B\varphi(t)dt + \int_0^{\tau_2} \left[E_\nu - F(\tau_2 - t) \right] \pi K(\tau_2 - t)Dv(t)dt - \\ - \int_0^{\tau_2} \left[\pi K(\tau_2 - t)Cu(t) - F(\tau_2 - t)\pi K(\tau_2 - t)Dv(t) \right] dt = \pi K(\tau_2)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau_2 - t - h)B\varphi(t)dt - \\ - \int_0^{t^*} \left[\tilde{w}(\tau_2 - t) - m(\tau_2 - t) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, \beta, t, v(t))\xi[\tau_2, \beta, \varphi(\cdot)] \right] dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t^*}^{\tau_2} [\tilde{w}(\tau_2 - t) - m(\tau_2 - t)] dt + \int_0^{\tau_2} [E_\nu - F(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) Dv(t) dt = \\
& = \pi K(\tau_2) \varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau_2 - t - h) B \varphi(t) dt - \int_0^{t^*} \tilde{w}(\tau_2 - t) dt - \int_{t^*}^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t) dt + \\
& + \int_0^{t^*} m(\tau_2 - t) dt + \int_{t^*}^{\tau_2} m(\tau_2 - t) dt - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, \beta, t, v(t)) \xi[\tau_2, \beta, \varphi(\cdot)] dt + \\
& + \int_0^{\tau_2} [E_\nu - F(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) Dv(t) dt = \pi K(\tau_2) \varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau_2 - t - h) B \varphi(t) dt - \\
& - \int_0^{\tau_2} \tilde{w}(\tau_2 - t) dt + \int_0^{\tau_2} m(\tau_2 - t) dt - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, \beta, t, v(t)) \xi[\tau_2, \beta, \varphi(\cdot)] dt + \\
& + \int_0^{\tau_2} [E_\nu - F(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) Dv(t) dt = \xi[t, \beta, \varphi(\cdot)] - \beta + \int_0^{\tau_2} m(\tau_2 - t) dt - \\
& - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, \beta, t, v(t)) \xi[\tau_2, \beta, \varphi(\cdot)] dt + \int_0^{\tau_2} [E_\nu - F(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) Dv(t) dt = \\
& = \xi[\tau_2, \beta, \varphi(\cdot)] \left(1 - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_2, \beta, t, v(t)) dt \right) - \beta + \int_0^{\tau_2} m(\tau_2 - t) dt + \\
& + \int_0^{\tau_2} [E_\nu - F(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) Dv(t) dt = -\beta + \int_0^{\tau_2} m(\tau_2 - t) dt + \\
& + \int_0^{\tau_2} [E_\nu - F(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) Dv(t) dt.
\end{aligned}$$

В силу п. б) предположения 3 выполнено включение

$$-\beta + \int_0^{\tau_2} [E_\nu - F(\tau_2 - t)] \pi K(\tau_2 - t) Dv(t) dt \in (1 - \delta) M_1. \quad (15)$$

Кроме того,

$$\int_0^{\tau_2} m(\tau_2 - t) dt \in \int_0^{\tau_2} M(\tau_2 - t) dt \subset \delta M_1. \quad (16)$$

Отсюда, и из (15), (16) получаем, что $\pi z(\tau_2) \in M_1$. Последнее включение эквивалентно включению $z(\tau_2) \in M$. Следовательно, преследование заканчивается за время τ_2 . Допустимость управления $u(t)$, $0 \leq t \leq \tau_2$, доказывается таким же способом, как в теореме 1. $\square$

Пусть функция $\mu(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, — суммируемая с квадратом неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию $\int_0^\tau \mu^2(t)dt \leq \rho^2$. Через $\alpha(t)$, $0 \leq t < +\infty$, обозначим произвольную измеримую неотрицательную скалярную функцию. Через $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, обозначим произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию $\int_0^\tau M(t)dt \subset \delta M_1$, где $\delta \in [0, 1)$ — некоторая константа.

Рассмотрим множество

$$\hat{w}(M(t), t) = \left\{ \left[M(\tau - t) + \pi K(\tau - t)CS_{\mu(\tau-t)} \right] * \pi K(\tau - t)DS_{\alpha(\tau-t)} \right\}, \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Введем множество

$$W(\tau) = \int_0^\tau \hat{w}(M(t), t)dt, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad W(0) = \delta M_1.$$

Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$. Пусть

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)B\varphi(t)dt - f_3(\tau),$$

где $f_3(\tau) \in W(\tau)$. Далее по определению интеграла $W(\tau)$ существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \hat{w}(M(t), t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такой, что $f_3(\tau) = \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t)dt$. Зафиксируем его. Тогда вектор-функция

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)B\varphi(t)dt - \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t)dt.$$

Для произвольного вектора $v \in S_{\alpha(\tau-t)}$, $0 \leq t \leq \tau$, определим числовую функцию

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lambda \eta[\tau, \varphi(\cdot)] \in \left[M(\tau - t) + \pi K(\tau - t)CS_{\mu(\tau-t)} \right] - \right. \\ \left. - \pi K(\tau - t)Dv - \tilde{w}(\tau - t) \right\}, \quad (17)$$

где $\eta[\tau, \varphi(\cdot)]$ определяется в виде (8).

Введем функцию $\psi(\cdot) : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$, $\psi(t) = t \geq 0$.

Предположение 4. Для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ существуют число $\tau = \tau_3 > 0$, функции $\mu(t)$, $\alpha(t)$, многозначное отображение $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, константа $\delta \in [0, 1)$ такие, что

- а) множество $\hat{w}(M(t), t)$ непусто для всех $t \in [0, \tau_3]$;
- б) справедливо неравенство

$$|\xi[\tau_3, \varphi(\cdot)]| \leq \inf_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0, \tau_3]} \leq \sigma} \int_0^{\tau_3} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_3, t, v(t))dt; \quad (18)$$

с) для любого допустимого управления $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, убегающего игрока имеет место включение

$$\bigcup_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0, \tau_3]} \leq \sigma} \int_0^{\tau_3} \psi \left[1 - \frac{\alpha(\tau_3 - t)}{|v(t)|} \right] \pi K(\tau_3 - t) Dv(t) dt \in (1 - \delta) M_1.$$

В (18) инфимум берется по всевозможным измеримым на отрезке $[0, \tau_3]$ функциям $v(t)$, принимающим значения из $S_{\alpha(\tau_3 - t)}$.

Теорема 3. Если выполнены условия предположения 4, то в игре (1), (2) из заданного начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = \tau_3$.

Доказательство. Пусть для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ выполнены условия предположения 4. Рассмотрим функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$, определенную соотношением (17). Согласно утверждению П.2 ([27], с. 189) можно показать, что эта функция полунепрерывна сверху по v при фиксированном t и измерима по t при фиксированном v . Пусть $t \in [0, \tau_3]$. Для произвольного вектора $v \in S_{\alpha(\tau_3 - t)}$, $0 \leq t \leq \tau_3$, рассмотрим следующие уравнения относительно неизвестных $u \in S_{\mu(\tau_3 - t)}$ и $m \in M(\tau_3 - t)$, $0 \leq t \leq \tau_3$:

$$m + \pi K(\tau_3 - t)Cu = \pi K(\tau_3 - t)Dv + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_3, t, v)\eta[\tau_3, \varphi(\cdot)] + w(\tau_3 - t), \quad (19)$$

$$m + \pi K(\tau_3 - t)Cu = \pi K(\tau_3 - t)Dv + w(\tau_3 - t). \quad (20)$$

В силу п. а) предположения 4 существует одно или много решений уравнений (19), (20). Следовательно, в силу теоремы Филиппова–Кастена ([58], с. 179) уравнения (19), (20) имеют единственную наименьшую в лексикографическом смысле пару решений, которую обозначим через $u(t, v(t))$, $m(t, v(t))$, $0 \leq t \leq \tau_3$. Через $G^1(t, v)$, $G^2(t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, обозначим множества решений уравнений (19), (20) соответственно. В силу $\tilde{w}(t) \in \hat{w}(M(t), t)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, и (17) множества $G^1(t, v)$, $G^2(t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, непусты и являются компактными. Через

$$\phi^1(t, v) = \text{col}(m(t, v), U^1(t, v)), \quad \phi^2(t, v) = \text{col}(m(t, v), U^2(t, v)), \quad 0 \leq t \leq \tau_3,$$

обозначим решения уравнений (19), (20) с наименьшими в лексикографическом смысле компонентами $U^1(t, v)$, $U^2(t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, соответственно. Из уравнений (19), (20) видно, что такие решения единственны. Воспользовавшись свойствами функции $\lambda(z_0(\cdot), \tau, t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_3$ и C — свойством многозначных отображений, можно показать ([27], с. 179; [58], с. 189), что функции $U^1(t, v)$, $U^2(t, v)$, $m(t, v)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, являются B -измеримыми. Следовательно, для произвольной измеримой функции $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $t \in [0, +\infty)$, функции $U^1(t, v(t))$, $U^2(t, v(t))$, $m(t, v)$, $t \in [0, \tau_3]$, являются измеримыми ([59], с. 282). Положим $m(t, v(t)) = 0$, $u(t, v(t)) = 0$ при $t > \tau_3$.

Ниже для построения управления $u(t)$, $0 \leq t < +\infty$, преследующего игрока используется одна идея из работы [32]. Там же впервые предлагалось представить управление $v(\cdot)$ убегающего игрока в виде суммы двух измеримых функций. Такое представление управления $v(\cdot)$ дает возможность использовать множество M_1 для решения поставленной задачи. А именно, грубо говоря, множеством M_1 “поглощается” часть энергии убегающего игрока, а остальной частью энергии управляет преследующий игрок. Ограниченность энергии убегающего игрока и в тоже время неограниченность энергии преследующего игрока представляют больше возможностей для решения задачи преследования.

Пусть $v = v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, — произвольное допустимое управление убегающего игрока. В соответствии с [32] на отрезке $[0, \tau_3]$ значение $v(t)$ управления v убегающего игрока в

каждый момент времени $t \geq 0$ представляется в виде суммы двух измеримых функций $v_1(t)$, $v_2(t)$, т. е. $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, где

$$v_1(t) = \begin{cases} v(t) & \text{при } |v(t)| \leq \alpha(\tau_3 - t); \\ \alpha(\tau_3 - t) \frac{v(t)}{|v(t)|} & \text{при } |v(t)| > \alpha(\tau_3 - t), \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |v(t)| \leq \alpha(\tau_3 - t); \\ \left[1 - \frac{\alpha(\tau_3 - t)}{|v(t)|}\right] v(t) & \text{при } |v(t)| > \alpha(\tau_3 - t), \quad 0 \leq t \leq \tau_3. \end{cases}$$

Информация, имеющаяся у преследующего игрока, делает возможным такое представление. Очевидно, что функция $v_1(t)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, удовлетворяет включению $v_1(t) \in S_{\alpha(\tau_3 - t)}$, $t \in [0, \tau_3]$. Далее рассмотрим функцию

$$\rho(t; v_1(r), 0 \leq r \leq t) = |\xi[\tau, \varphi(\cdot)]| - \int_0^t \lambda(\varphi(\cdot), \tau, r, v_1(r)) dr, \quad 0 \leq t \leq \tau_3.$$

Легко видеть, что в силу п. б) предположения 4 существует момент времени $t = t^* \in [0, \tau_3]$ такой, что $\rho(t^*; v_1(r), 0 \leq r \leq t^*) = 0$ (если таких моментов времени более одного, то наименьший из них обозначим через t^*). Действительно, в противном случае

$$\begin{aligned} \rho(\tau_3; v_1(t), 0 \leq t \leq \tau_3) &= |\xi[\tau_3, \varphi(\cdot)]| - \int_0^{\tau_3} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_3, t, v_1(t)) dt \leq \\ &\leq |\xi[\tau_3, \varphi(\cdot)]| - \inf_{\|v_1(\cdot)\|_{L_2[0, \tau_3]} \leq \alpha(\tau_3 - t)} \int_0^{\tau_3} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_3, t, v_1(t)) dt, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству (18). Учитывая этот факт, управление $u(t)$, $0 \leq t < +\infty$, определим следующим образом. Если в момент $t \in [0, \tau_3]$ величина $\rho(t; v_1(r), 0 \leq r \leq t)$, $0 \leq t \leq \tau_3$, положительна, то положим $u(t) = U^1(t, v_1(t))$. Пусть $t^* \in [0, \tau_3]$ — первый момент времени, для которого выполнено равенство $\rho(t^*; v_1(r), 0 \leq r \leq t^*) = 0$. Тогда при $t \in (t^*, \tau_3]$ положим $u(t) = U^2(t, v_1(t))$. При $t > \tau_3$ положим $u(t) = 0$. Покажем, что, применяя стратегию $u(t)$, выбранную как решения уравнений (19), (20), преследователь может гарантировать окончание преследования за момент времени τ_3 . Подставим функции $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t < +\infty$, в уравнение (1). Для решения $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$, полученного уравнения, с учетом начального условия (3) из формулы Коши после проектирования на L и, учитывая (19), (20) при $\tau = \tau_3$, получаем

$$\begin{aligned} \pi z(\tau_3) &= \pi K(\tau_3) \varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau_3 - t - h) B \varphi(t) dt - \int_0^{\tau_3} \pi K(\tau_3 - t) [C u(t) - D v_1(t)] dt + \\ &+ \int_0^{\tau_3} \pi K(\tau_3 - t) D v_2(t) dt = \pi K(\tau_3) \varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau_3 - t - h) B \varphi(t) dt - \\ &- \int_0^{t^*} [-m(t, v_1(t)) + \lambda(\varphi(\cdot), \tau_3, t, v_1(t)) \eta[\tau_3, \varphi(\cdot)] + w(\tau_3 - t)] dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t^*}^{\tau_3} [-m(t, v_1(t)) + w(\tau_3 - t)] dt + \int_0^{\tau_3} \pi K(\tau_3 - t) Dv_2(t) dt = \\
& = \pi K(\tau_3) \varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau_3 - t - h) B \varphi(t) dt + \int_0^{\tau_3} m(t, v_1(t)) dt - \int_0^{\tau_3} w(\tau_3 - t) dt - \\
& - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_3, t, v_1(t)) \eta[\tau_3, \varphi(\cdot)] dt + \int_0^{\tau_3} \pi K(\tau_3 - t) Dv_2(t) dt = \xi[\tau_3, \varphi(\cdot)] + \int_0^{\tau_3} m(t, v_1(t)) dt - \\
& - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_3, t, v_1(t)) \eta[\tau_3, \varphi(\cdot)] dt + \int_0^{\tau_3} \psi \left[1 - \frac{\alpha(\tau_3 - t)}{|v(t)|} \right] \pi K(\tau_3 - t) Dv(t) dt = \\
& = \int_0^{\tau_3} m(t, v_1(t)) dt + \int_0^{\tau_3} \psi \left[1 - \frac{\alpha(\tau_3 - t)}{|v(t)|} \right] \pi K(\tau_3 - t) Dv(t) dt.
\end{aligned}$$

Поскольку, как установлено выше,

$$\xi[\tau_3, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_3, t, v_1(t)) \eta[\tau_3, \varphi(\cdot)] dt = \left[\xi[\tau_3, \varphi(\cdot)] - \int_0^{t^*} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_3, t, v_1(t)) dt \right] \eta[\tau_3, \varphi(\cdot)] = 0.$$

Следовательно, в силу п. б) предположения 4 имеют место включения

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\tau_3} m(t, v_1(t)) dt \in \int_0^{\tau_3} M(\tau_3 - t) dt \subset \delta M_1, \\
& \int_0^{\tau_3} \psi \left[1 - \frac{\alpha(\tau_3 - t)}{|v(t)|} \right] \pi K(\tau_3 - t) Dv(t) dt \in (1 - \delta) M_1.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\pi z(\tau_3) \in M_1$, а это эквивалентно включению $z(\tau_3) \in M$. $\square$

Рассмотрим многозначное отображение

$$\hat{w}(t) = \pi K(\tau - t) C S_{\mu(\tau-t)} * \pi K(\tau - t) D S_{\alpha(\tau-t)}, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

где $S_{\mu(\tau-t)}$, $S_{\alpha(\tau-t)}$ — p -мерный и q -мерный замкнутые шары радиусов $\mu(\tau - t)$, $\alpha(\tau - t)$ соответственно с центром в начале координат.

Введем множество $W(\tau) = \int_0^{\tau} \hat{w}(t) dt$, $W(0) = M_1$. Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$. Введем вектор-функцию

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau) \varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h) B \varphi(t) dt - f_4(\tau),$$

где $f_4(\tau) \in W(\tau)$. Далее, по определению интеграла $W(\tau)$ существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \hat{w}(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такой, что $f_4(\tau) = \int_0^{\tau} \tilde{w}(\tau - t) dt$. Зафиксируем

его. Тогда вектор-функция

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)B\varphi(t)dt - \int_0^\tau \tilde{w}(\tau - t)dt.$$

Для произвольного вектора $v \in S_{\alpha(\tau-t)}$ определим числовую функцию

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lambda \eta[\tau, \varphi(\cdot)] \in \pi K(\tau - t)CS_{\mu(\tau-t)} - \pi K(\tau - t)Dv - \tilde{w}(\tau - t) \right\},$$

где функция $\eta[\tau, \varphi(\cdot)]$ определяется в виде (7).

Предположение 5. Для начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ существуют число $\tau = \tau_4 > 0$, функции $\mu(\tau_4 - t)$, $\alpha(\tau_4 - t)$, $0 \leq t \leq \tau_4$, такие, что

- а) множество $\hat{w}(t)$ непусто для всех $t \in [0, \tau_4]$;
- б) справедливо неравенство

$$|\xi[\tau_4, \varphi(\cdot)]| - \inf \left\{ \int_0^{\tau_4} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_4, t, v(t))dt : \|v(\cdot)\|_{L_2[0, \tau_4]} \leq \sigma \right\} \leq 0;$$

в) для любого допустимого управления $v(t)$, $0 \leq t \leq \tau_4$, убегающего игрока имеет место включение

$$\bigcup_{\|v(\cdot)\|_{L_2[0, \tau_4]} \leq \sigma} \int_0^{\tau_4} \psi \left[1 - \frac{\alpha(\tau_4 - t)}{|v(t)|} \right] \pi K(\tau_4 - t)Dv(t)dt \subset M_1.$$

Теорема 4. Если выполнены условия предположения 5, то в игре (1), (2) из заданного начального положения $\varphi(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = \tau_4$.

Доказательство теоремы 4 полностью аналогично доказательству теоремы 3 с той разницей, что теорема 4 формулируется для первого прямого метода Понтрягина, т. е. многозначное отображение $M(t)$ не участвует.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Айзекс Р. *Дифференциальные игры* (Мир, М., 1967).
- [2] Berkovitz L.D. *Differential games of survival*, J. Math. Anal. Appl. **129** (2), 493–504 (1988).
- [3] Berkovitz L.D. *Characterizations of the differential games*, Appl. Math. Optimiz. **17** (2), 177–183 (1988).
- [4] Fleming W.H. *The convergence problem for differential games*, J. Math. Anal. Appl. **3** (1), 102–116 (1961).
- [5] Friedman A. *Differential games* (New York, 1966).
- [6] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Дифференциальная игра наведения*, Дифференц. уравнения **6** (4), 579–591 (1970).
- [7] Красовский Н.Н. *Игровые задачи о встрече движений* (Наука, М., 1970).
- [8] Красовский Н.Н. *Управление динамической системой* (Наука, М., 1985).
- [9] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Альтернатива для игровой задачи сближения*, Прикл. матем. и механ. **34** (6), 1005–1022 (1970).
- [10] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры* (Наука, М., 1974).
- [11] Куржанский А.Б. *Дифференциальные игры сближения в системах с запаздыванием*, Дифференц. уравнения **7** (8), 1398–1409 (1971).
- [12] Кряжмский А.В., Осипов Ю.С. *Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целовым множеством*, Прикл. матем. и механ., **37** (1), 3–13 (1973).
- [13] Субботин А.И. *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби* (Наука, М., 1991).
- [14] Субботин А.И. *Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр*, ДАН СССР, **254** (2), 293–297 (1980).

- [15] Субботин А.И., Субботина Н.Н. *Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой дифференциальной игры*, ДАН СССР **243** (4), 862–865 (1978).
- [16] Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления* (Наука, М., 1981).
- [17] Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. *Алгоритм построения стабильного моста в линейной задаче сближения с выпуклой целью*, Исследов. задач минимаксного управления. Свердловск., Изд-во УНЦ АН, 82–90 (1985).
- [18] Ушаков В.Н. *Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями*, Прикл. матем. и механ. **36** (1), 15–22 (1972).
- [19] Понтрягин Л.С. *Линейные дифференциальные игры преследования*, Матем. сб. **112** (3), 307–330 (1980).
- [20] Понтрягин Л.С. *О линейных дифференциальных играх I*, ДАН СССР **174** (6), 1278–1280 (1967).
- [21] Мищенко Е.Ф., Сатимов Н.Ю. *Альтернированный интеграл в линейных дифференциальных играх с нелинейными управлениями*, Дифференц. уравнения **10** (12), 2173–2178 (1974).
- [22] Понтрягин Л.С. *Избранные научные труды*, Т.2 (Наука, М., 1988).
- [23] Понтрягин Л.С. *К теории дифференциальных игр*, УМН **21** (4), 219–274 (1966).
- [24] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. и др. *Математическая теория оптимальных процессов* (Наука, М., 1969).
- [25] Мищенко Е.Ф., Понтрягин Л.С. *Линейные дифференциальные игры*, ДАН СССР **174** (1), 27–29 (1967).
- [26] Азамов А., Саматов Б.Т. *О модифицированном третьем методе в задачах преследования*, В кн. “Неклассические задачи математической физики”(ФАН, Ташкент), 174–184 (1985).
- [27] Григоренко Н.Л. *Математические методы управления несколькими динамическими процессами* (Изд-во МГУ, М., 1990).
- [28] Мамадалиев Н.А. *О задачах преследования в линейных дифференциальных играх при наличии запаздываний*, Изв. вузов. Матем., № 6, 16–22 (2010).
- [29] Никольский М.С. *Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх* (Изд-во МГУ, М., 1984).
- [30] Никольский М.С. *Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний*, Дифференц. уравнения **8** (2), 260–267 (1972).
- [31] Никольский М.С. *Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний*, ДАН СССР **197** (5), 1018–1021 (1971).
- [32] Никольский М.С. *О задаче преследования при различных ограничениях на управления догоняющего и убегающего*, Теор. оптим. решений, Изд-е ин-та кибернетики, Киев, 59–66 (1975).
- [33] Чикрий А.А., Питцык М.В., Шишкина Н.Б. *Первый прямой метод Л.С.Понтрягина и некоторые эффективные способы преследования*, Кибернетика, № 5, 75–81 (1986).
- [34] Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц. *Групповое преследование в дифференциально-разностных играх*, Дифференц. уравнения **20** (5), 802–810 (1984).
- [35] Чикрий А.А. *Гарантированный результат в игровых задачах управления движением*, Тр. ИММ УрО РАН **16** (5), 223–232 (2010).
- [36] Чикрий А.А. *Конфликтно управляемые процессы* (Науков. думка, Киев, 1992).
- [37] Сатимов Н.Ю. *К задаче преследования в линейных дифференциальных играх*, Дифференц. уравнения **9** (11), 2000–2009 (1973).
- [38] Азамов А. *Двойственность линейных дифференциальных игр преследования*, ДАН СССР **263** (4), 777–780 (1982).
- [39] Азамов А. *Математические труды* (Ташкент, “Университет”, 2017).
- [40] Азамов А. *О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования*, Матем. сб. **118** (3), 422–430 (1982).
- [41] Азамов А. *Об альтернативе для игр преследования на бесконечном интервале времени*, Прикл. матем. и механ. **50** (4), 561–570 (1986).
- [42] Азамов А. *Полустойчивость и двойственность в теории альтернированного интеграла Понтрягина*, ДАН СССР **299** (2), 265–286 (1988).
- [43] Пшеничный Б.Н. *Линейные дифференциальные игры*, Автоматика и телемеханика, № 1, 65–78 (1968).
- [44] Сатимов Н.Ю. *Об одном методе преследования в линейных дифференциальных играх*, ДАН Р Уз, № 6, 7–8 (1981).
- [45] Сатимов Н.Ю., Карабаев Э.О. *Об одном методе решения задачи преследования*, ДАН Р Уз, № 3, 7–9 (1986).
- [46] Сатимов Н.Ю. *О задаче преследования в квазилинейных дифференциальных играх многих лиц*, В кн.: Неклассические задачи математической физики (ФАН, Ташкент), 154–174 (1985).

- [47] Фазылов А.З. *О структуре дискретных и непрерывных игр*, Дисс...канд. физ.-матем. наук. Ташкент, 94 с. (1981).
- [48] Югай Л.П. *О задаче уклонения в дифференциальных играх многих лиц*, Дисс... канд. физ.-матем. наук. Ташкент, 137 с. (1978).
- [49] Куржанский А.Б., Осипов Ю.С. *К задаче программного преследования в линейных системах*, Изв. АН, Техн. кибернетика, № 3, 18–29 (1970).
- [50] Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. *Линейные дифференциально-разностные игры*, ДАН СССР **197** (4) 777–780 (1971).
- [51] Остапенко В.В., Яковлева А.П. *Задача уклонения от встречи при запаздывающем аргументе*, Автоматика и телемеханика, № 8, 10–14 (1981).
- [52] Осипов Ю.С. *Дифференциальные игры систем с последствием*, ДАН СССР **196** (4), 779–782 (1971).
- [53] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения* (Наука, М., 1967).
- [54] Резван В. *Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием* (Наука, М., 1983).
- [55] Halanay A. *Differential Equations, Stability, Oscillations. Time Lags* (Akad. Press, New York, 1966).
- [56] Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом* (Наука, М., 1972).
- [57] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений* (Мир, М., 1984).
- [58] Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями* (Наука, М., 1977).
- [59] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* (Наука, М., 1972).

Нуманжон Алимджанович Мамадалиев

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, д. 4, Вузгородок, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: M_numana59@mail.ru

N.A. Mamadaliev

The pursuit problem for linear games with integral constraints on players' controls

Abstract. We study linear differential games described by a system of linear differential equations with delay subject to certain integral constraints on the control parameters of the players. We give several scheme for getting enough conditions for solvability of linear problem pursuit in system with delay.

Keywords: game, pursuit, delay, terminal set, pursuer, evader, controls.

Numanzhon Alimdzhonovich Mamadaliev

National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek,
4 Universitetskaya str., Vuzgorodok, Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,

e-mail: M_numana59@mail.ru