Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Мамедов, Х. И. Ахмедов, Об одной смешанной задаче для уравнения теплопроводности с опережением времени в граничных условиях, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 3, 29–47

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-29-47>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:36:00

Ю.А. МАМЕДОВ, Х.И. АХМЕДОВ

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОПЕРЕЖЕНИЕМ ВРЕМЕНИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Аннотация. Исследуется одномерная смешанная задача для уравнения теплопроводности со смещением времени в нелокальных и несамосопряженных граничных условиях, описывающая реальный физический процесс. При минимальных условиях на начальные данные доказана однозначная разрешимость и получено явное представление для решения задачи.

Ключевые слова: смешанная задача, отклонение по времени, вычетный метод.

УДК: 519.64

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-3-29-47

1. Постановка задачи. Пусть

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - u_t(x, t),$$

$$l_j u(x, t) = u(x, t + (1 - j)\omega) + \alpha_j u(1 - x, t + j\omega), \quad j = 0, 1,$$

и

$$l_j u(x, t) = a_{j-2} u_x^{(j-2)}(x, t) + b_{j-2} u_x^{(j-2)}(1 - x, t), \quad j = 2, 3,$$

где $a, \omega, \alpha_j, a_j, b_j$ ($j = 0, 1$) — вещественные постоянные, $a \neq 0, \omega > 0, \alpha_0 \alpha_1 \neq 0$.

В полуполосе $\Pi = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}$ рассмотрим смешанную задачу

$$Lu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Pi, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

$$l_j u|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \quad j = 0, 1, \tag{3}$$

$$l_j u|_{x=0} = 0, \quad 0 < t \leq \omega, \quad j = 2, 3, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ — заданная, а $u(x, t)$ — искомая функции.

Под решением задачи (1)–(4) будем подразумевать функцию $u(x, t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $u(x, t) \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(0 < x < 1, t \geq 0)$; $\int_0^t u(x, \tau) d\tau \in C(0 \leq x \leq 1, t \geq 0)$;
- 2) $l_j u(x, t) \in C(0 \leq x < 1, t > 0)$, $j = 0, 1$;
- 3) $l_j u(x, t) \in C(0 \leq x < 1, 0 < t \leq \omega)$, $j = 2, 3$;
- 4) $u(x, t)$ удовлетворяет равенствам (1)–(4) в обычном смысле.

Заметим, во-первых, что граничные условия $l_j u|_{x=s} = 0$, $s = 0, 1$, и соответствующие требования 2), 3) из определения решения более естественны и целесообразны, поскольку в привычной постановке условия (3), (4) были бы представлены в виде

$$u(0, t + (1 - j)\omega) + \alpha_j u(1, t + j\omega) = 0 \quad (t > 0, j = 0, 1),$$

$$a_{j-2} u_x^{(j-2)}(0, t) + b_{j-2} u_x^{(j-2)}(1, t) = 0 \quad (0 < t \leq \omega, j = 2, 3),$$

в определении классического решения пришлось бы требовать выполнение условия $u(x, t) \in C(0 \leq x \leq 1, t \geq 0) \cap C^{1,0}(0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq \omega)$, что значительно сужает класс разрешимых задач. Ибо очевидно, что требования непрерывного примыкания к границе и непрерывности на ней решения и его производной по x более жесткие ограничения, чем непрерывного примыкания к границе $x = 0$ и непрерывности на ней функций $l_j u$ — линейных комбинаций решений $u(x, \cdot)$, $u(1 - x, \cdot)$ и их производных. Например, при $\varphi(x) = \cos 2\pi x$, $a_0 = -b_0 = a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $\alpha_0 \alpha_1 \neq 0$ удовлетворяются все условия доказанной ниже теоремы 3, в то же время, в частности, при $\alpha_0 \neq -e^{-4\pi^2 \omega}$ непрерывного в граничной точке $(0, \omega)$ решения просто не существует: $u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \cos 2\pi x$ — единственное решение (1), (2), (4) в $(0, 1) \times (0, \omega)$ и, тем самым, $u(0, \omega - \varepsilon) = e^{-4\pi^2(\omega - \varepsilon)}$, $u(1, \varepsilon) = e^{-4\pi^2 \varepsilon}$, а из условия $u(0, t + \omega) + \alpha_0 u(1, t) = 0$ ($t > 0$) следует $u(0, \omega + \varepsilon) = -\alpha_0 e^{-4\pi^2 \varepsilon}$.

Во-вторых, ясно, что задача (1)–(4) правильно поставлена и допускает поэтапное решение: решая сначала в $\{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < \omega\}$ обычную смешанную задачу (1), (2), (4), можно найти начальное, а с помощью условий (3) и граничные состояния для прямоугольника $\{(x, t) : 0 < x < 1, \omega < t < 2\omega\}$ и т. д. Но такой подход не только трудоемкий, но и требует каждый раз выяснения условия на начальные и граничные данные $u(x, k\omega)$, $u(0, t)$, $u(1, t)$, обеспечивающие однозначную разрешимость в $(0, 1) \times (k\omega, (k + 1)\omega)$ ($k = 1, 2, \dots$), а также сохранения гладкости решения при переходе с одного слоя на другой.

В-третьих, рассматриваемая задача реально-физическая, описывает процесс теплопередачи в стержне, температуры каждого из концов которого с некоторым запаздыванием $\omega > 0$ пропорционально передается в противоположный конец, а до наступления этого момента на концах поддерживаются пропорциональные температуры и теплообмен с внешней средой.

Здесь же не разбивая на многочисленные задачи, комбинированием метода преобразования Лапласа и вычетного метода М.Л. Расулова [1], [2], доказаны единственность и существование решения и получено аналитическое представление для него.

Отметим еще, что несмотря на наличие большого количества результатов об общих и качественных вопросах задач для уравнений в частных производных, в том числе и параболических, с отклоняющимися аргументами ([3]–[9] и др.), а также работ в которых вместо краевых ставятся функциональные условия [3], [10], [11], исследования задач вида (1)–(4) (со смещением аргумента искомой функции в граничных условиях), или охватывающие эту постановку, с исключением одной частной задачи [12], нам неизвестны.

2. Единственность решения. Задачу

$$L\left(\frac{d}{dx}, \mu^2\right) y(x, \mu) = 0, \quad l_j y|_{x=0} = 0, \quad j = 2, 3, \quad (5)$$

с комплексным параметром μ назовем первой спектральной задачей и напомним некоторые известные [2], [13] и легко доказываемые факты относительно этой задачи.

Если $a_0 b_1 + b_0 a_1 \neq 0$, то при всех комплексных значениях μ , не принадлежащих множеству $S = \left\{0; a \ln_0 \left(B \pm \sqrt{B^2 - A^2}\right) A^{-1} + 2a\pi k i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$, где $A = a_0 b_1 + b_0 a_1$, $B = -a_0 a_1 - b_0 b_1$, существует функция Грина $G_1(x, \xi, \mu)$ задачи (5), аналитическая по μ

всюду, кроме точек множества S , которые являются ее полюсами. Причем эти полюсы могут быть простыми или двукратными (например, если $(a_0^2 - b_0^2)(a_1^2 - b_1^2) = 0$). Необходимо уточнить, что если $(a_0 + b_0)(a_1 + b_1) \neq 0$, то $\mu = 0 \in S$ является устранимой особой точкой функции G_1 .

Перенумеровывая точки из S в порядке возрастания их модулей с учетом их кратности, обозначим $S = \{\mu_\nu, \nu = 1, 2, \dots\}$, $|\mu_1| \leq |\mu_2| \leq \dots$, μ_ν имеет кратность χ_ν , где $\chi_\nu = 1$ или $\chi_\nu = 2$. Ясно, что $|\mu_\nu| \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow \infty$), существуют $c_1, \delta > 0$ такие, что

$$-c_1 < \operatorname{Re} \mu_\nu < c_1, \quad |\mu_{\nu+1} - \mu_\nu| > 2\delta \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (6)$$

Вне δ -окрестностей точек μ_ν , справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^k G_1(x, \xi, \mu)}{\partial x^k} \right| \leq C |\mu|^{k-1}, \quad C > 0, \quad k = 0, 1, 2, \quad (7)$$

при $f(x) \in C[0, 1]$

$$L\left(\frac{d}{dx}, \mu^2\right) \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi = -f(x),$$

$$l_j G_1(x, \xi, \mu)|_{x=0} = 0, \quad j = 2, 3, \quad (8)$$

очевидно так же, что для любой функции $f(x)$ из области определения оператора первой спектральной задачи $f(x) \in C^2[0, 1]$, $l_j f|_{x=0} = 0$ ($j = 2, 3$) имеет место равенство

$$\int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi = \frac{f(x)}{\mu^2} + \frac{a^2}{\mu^2} \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f''(\xi) d\xi. \quad (9)$$

Примем ряд обозначений, которые ниже для укорочения записи, часто будут использоваться.

Пусть $c > 0, r > 0$ — некоторые числа, z — комплексное переменное, $\mathfrak{S}_c = \{z : \operatorname{Re} z^2 = c\}$ — гипербола с ветвями $\mathfrak{S}_c^\pm = \{z : \operatorname{Re} z^2 = c, \pm \operatorname{Re} z > 0\}$, $\Omega_r = \{z : |z| = r\}$, $\Omega_r(\theta_1, \theta_2)$ — дуга окружности Ω_r , заключенная между лучами $z = \sigma e^{i\theta_j}$ ($0 \leq \sigma < \infty, i = \sqrt{-1}, j = 1, 2$). Заметим, что дугами $\{z : |z| = r, \operatorname{Re} z^2 \geq c, \operatorname{Re} z > 0\}$, $\{z : |z| = r, \operatorname{Re} z^2 \leq c, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\{z : |z| = r, \operatorname{Re} z^2 \geq c, \operatorname{Re} z < 0\}$ и $\{z : |z| = r, \operatorname{Re} z^2 \leq c, \operatorname{Im} z < 0\}$, соединяющими ветви и стороны гиперболы $\mathfrak{S}_c$ в нашем обозначении будут соответственно

$$\Omega_r(-\theta_{c,r}, \theta_{c,r}), \quad \Omega_r(\theta_{c,r}, -\theta_{c,r} + \pi), \quad \Omega_r(-\theta_{c,r} + \pi, \theta_{c,r} + \pi), \quad \Omega_r(\theta_{c,r} + \pi, -\theta_{c,r} + 2\pi),$$

где $\theta_{c,r} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r^2 - c}{r^2 + c}}$.

Введем еще контуры (ломанные)

$$\hat{\mathfrak{S}}_c = \hat{\mathfrak{S}}_c^+ \cup \hat{\mathfrak{S}}_c^-, \quad \hat{\mathfrak{S}}_c^\pm = \left\{ z : \pm z = \sigma e^{-\frac{3\pi}{8}i}, \sigma \in [2c\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty) \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ z : \pm z = c(1 + i\eta), \eta \in [-1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}] \right\} \cup \left\{ z : \pm z = \sigma e^{\frac{3\pi}{8}i}, \sigma \in [2c\sqrt{1+\sqrt{2}}, \infty) \right\}.$$

Части контуров $\mathfrak{S}_c, \mathfrak{S}_c^\pm, \hat{\mathfrak{S}}_c, \hat{\mathfrak{S}}_c^\pm$, заключенные внутри окружности Ω_r , обозначим соответственно через $\mathfrak{S}_{c,r}, \mathfrak{S}_{c,r}^\pm, \hat{\mathfrak{S}}_{c,r}, \hat{\mathfrak{S}}_{c,r}^\pm$. Наконец, через $\Gamma_{c,r}, \Gamma_{c,r}^+, \hat{\Gamma}_{c,r}, \hat{\Gamma}_{c,r}^+$ при $r \geq 2c\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$ обозначим замкнутые контуры

$$\Gamma_{c,r} = \Omega_r(\theta_{c,r} + \pi, -\theta_{c,r} + 2\pi) \cup \mathfrak{S}_{c,r}^+ \cup \Omega_r(\theta_{c,r}, -\theta_{c,r} + \pi) \cup \mathfrak{S}_{c,r}^-,$$

$$\Gamma_{c,r}^+ = \mathfrak{S}_{c,r}^+ \cup \Omega_r(-\theta_{c,r}, \theta_{c,r}), \quad \hat{\Gamma}_{c,r}^+ = \hat{\mathfrak{S}}_{c,r}^+ \cup \Omega_r\left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right),$$

$$\hat{\Gamma}_{c,r} = \Omega_r\left(-\frac{5\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}\right) \cup \hat{\mathfrak{S}}_{c,r}^+ \cup \Omega_r\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right) \cup \hat{\mathfrak{S}}_{c,r}^-.$$

Положительным на всех этих и встречающихся в последующем линиях будем считать направление против движения часовой стрелки.

Пусть $\{r_n\}$ — последовательность чисел таких, что

$$0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty,$$

окружности Ω_{r_n} не пересекают δ -окрестности (δ достаточно малое, фиксированное) точек $\mu_\nu \in S$. Ввиду структуры S (см. также (6)) существование такого числа δ и такой последовательности $\{r_n\}$ не вызывает сомнения. Число точек μ_ν , лежащих внутри $\hat{\Gamma}_{c_1, r_n}$ (c_1 из (6)) обозначим через m_n . Из (9) видно, что для функций $f(x) \in C^2[0, 1]$, $l_j f|_{x=0} = 0$ ($j = 2, 3$),

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_{c_1, r_n}} \mu d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi = f(x) + \frac{a^2}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_{c_1, r_n}} \mu^{-1} d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f''(\xi) d\xi,$$

т. е.

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{m_n} \operatorname{res}_{\mu_\nu} \mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi - \frac{a^2}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_{c_1, r_n}} \mu^{-1} d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f''(\xi) d\xi.$$

В силу оценки (7) и аналитичности функции $G_1(x, \xi, \mu)$ в областях $\{\mu : \pm \operatorname{Re} \mu > c_1\}$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\hat{\Gamma}_{c_1, r_n}} \mu^{-1} d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f''(\xi) d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{r_n}} \mu^{-1} d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f''(\xi) d\xi,$$

$$\left| \int_{\Omega_{r_n}} \mu^{-1} d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f''(\xi) d\xi \right| \leq C \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_n} d\varphi \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

следовательно,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_{c_1, r_n}} \mu d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\mu_\nu} \mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi \quad (10)$$

равномерно по $x \in [0, 1]$.

Опираясь на эти факты, доказываем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $A \neq 0$, $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ и $l_j \varphi|_{x=0} = 0$ ($j = 3, 4$). Тогда задача (1)–(4) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Введем операторы

$$A_{\nu s} f(x) = \operatorname{res}_{\mu_\nu} \mu^{2s+1} \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi = f_{\nu s}(x), \quad (11)$$

переводящие каждую функцию $f(x) \in C[0, 1]$ в $f_{\nu s}(x) \in C^2[0, 1]$, $l_j f_{\nu s}|_{x=0} = 0$ ($j = 3, 4$). Из (10) видно, что если $f(x) \in C^2[0, 1]$ и $l_j f|_{x=0} = 0$ ($j = 3, 4$), то

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu 0}(x) = f(x). \quad (12)$$

Заметим, что если задача (1)–(4) имеет некоторое решение $u(x, t)$, то эта функция является и решением задачи (1), (2), (4) в области $\{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq \omega\}$. Пользуясь гипоеллиптичностью оператора теплопроводности и условиями 1), 3) из определения решения, нетрудно видеть, что решение задачи (1), (2), (4) и его производные u_t , u_{xx} при каждом $t \in (0, \omega]$ непрерывны по x при $0 \leq x \leq 1$. Поэтому применяя к (1), (2) операторы $A_{\nu s}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\nu s}(x, t)}{\partial t} &= \operatorname{res}_{\mu_{\nu}} \mu^{2s+1} \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) a^2 \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} d\xi = u_{\nu s+1}(x, t), \\ u_{\nu s}(x, 0) &= \varphi_{\nu s}(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Если μ_{ν} — простой полюс ($\chi_{\nu} = 1$) функции $G_1(x, \xi, \mu)$, то

$$\operatorname{res}_{\mu_{\nu}} \mu^{2s+1} (\mu^2 - \mu_{\nu}^2) \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) u(\xi, t) d\xi = 0,$$

т. е.

$$u_{\nu s+1}(x, t) = \mu_{\nu}^2 u_{\nu s}(x, t), \quad (14)$$

а если $\chi_{\nu} = 2$, то

$$\operatorname{res}_{\mu_{\nu}} \mu^{2s+1} (\mu^2 - \mu_{\nu}^2)^2 \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) u(\xi, t) d\xi = 0,$$

следовательно,

$$u_{\nu s+2}(x, t) - 2\mu_{\nu}^2 u_{\nu s+1}(x, t) + \mu_{\nu}^4 u_{\nu s}(x, t) = 0. \quad (15)$$

В первом случае ($\chi_{\nu} = 1$) из (13), (14) при $s = 0$ получаем

$$\frac{\partial u_{\nu 0}(x, t)}{\partial t} = \mu_{\nu}^2 u_{\nu 0}(x, t), \quad u_{\nu 0}(x, 0) = \varphi_{\nu 0}(x). \quad (16)$$

Во втором случае ($\chi_{\nu} = 2$), полагая в (13) $s = 0$ и $s = 1$, а в (15) $s = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\nu 0}(x, t)}{\partial t} &= u_{\nu 1}(x, t), \quad \frac{\partial u_{\nu 1}(x, t)}{\partial t} = -\mu_{\nu}^4 u_{\nu 0}(x, t) + 2\mu_{\nu}^2 u_{\nu 1}(x, t), \\ u_{\nu 0}(x, 0) &= \varphi_{\nu 0}(x), \quad u_{\nu 1}(x, 0) = \varphi_{\nu 1}(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Очевидно, задача (16), а также (17), имеют единственное решение

$$u_{\nu s}(x, t) = \operatorname{res}_{\mu_{\nu}} \mu^{2s+1} e^{\mu^2 t} \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) \varphi(\xi) d\xi,$$

где $s = 0$ для задачи (16) и $s = 0, 1$ для задачи (17). Тогда с учетом (12) находим

$$u(x, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\mu_{\nu}} \mu e^{\mu^2 t} \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) \varphi(\xi) d\xi \quad (18)$$

при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq \omega$. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы. Действительно, если задача (1)–(4) имела бы два решения $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, то их разность $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ была бы решением однородной задачи (1)–(4) с $\varphi(x) \equiv 0$, тем самым и однородной задачи (1), (2), (4) в $\{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \omega\}$.

Тогда в силу (18) $v(x, t) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq \omega$, а из условий 2) вытекает, что $v(0, t) \equiv v(1, t) = 0$ при $t \geq 0$. В связи с этим и условием 1) легко видеть, что функция

$$w(x, t) = \int_{\omega}^t v(x, \tau) d\tau$$

является решением однородной задачи $w_t = a^2 w_{xx}$ ($0 < x < 1$, $t \geq \omega$), $w(x, \omega) = 0$ ($0 \leq x \leq 1$), $w(0, t) = w(1, t) = 0$ ($t > \omega$), непрерывным в $\{0 \leq x \leq 1, t \geq \omega\}$, откуда с учетом принципа максимума [4], [5] заключаем, что $w(x, t) \equiv 0$ ($0 \leq x \leq 1, t \geq \omega$), следовательно, $v(x, t) \equiv 0$ ($0 \leq x \leq 1, t \geq 0$). $\square$

Формула (18) позволяет сделать еще некоторые заключения, которые понадобятся нам в дальнейшем. При условиях теоремы 1 из (18) с учетом (9) имеем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_{c_1, r_n}} \mu e^{\mu^2 t} \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) \varphi(\xi) d\xi d\mu = \\ &= \varphi(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2\pi i} \int_{\hat{\Gamma}_{c_1, r_n}} \mu^{-1} e^{\mu^2 t} \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) \varphi''(\xi) d\xi d\mu. \end{aligned}$$

Из оценки (7) и того, что на дугах $\Omega_{r_n}(-\frac{5\pi}{8} + j\pi, -\frac{3\pi}{8} + j\pi)$ ($j = 0, 1$) имеем $\operatorname{Re} \mu^2 \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} |\mu|^2$, вытекает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_{r_n}(-\frac{5\pi}{8} + j\pi, -\frac{3\pi}{8} + j\pi)} \mu^{-1} e^{\mu^2 t} d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) \varphi''(\xi) d\xi = 0 \quad (j = 0, 1),$$

следовательно,

$$u(x, t) = \varphi(x) + \frac{a^2}{2\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_1}} \mu^{-1} e^{\mu^2 t} d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) \varphi''(\xi) d\xi$$

и, наконец, пользуясь тем, что $G_1(x, \xi, -\mu) \equiv G_1(x, \xi, \mu)$, получаем

$$u(x, t) = \varphi(x) + \frac{a^2}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_1}^+} \mu^{-1} e^{\mu^2 t} d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) \varphi''(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Поскольку на далеких частях $\left(|\lambda| > 2c_1 \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$ контура $\hat{\mathfrak{S}}_{c_1}^+$

$$\left| \frac{\partial^{k+m}}{\partial t^k \partial x^m} \mu^{-1} e^{\mu^2 t} \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) \varphi''(\xi) d\xi \right| \leq C |\mu|^{2k+m-2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} t |\lambda|^2} \quad (2k + m \leq 2), \quad (20)$$

то операции $L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$, $l_j u|_{x \rightarrow 0}$ ($j = 2, 3$) при $0 \leq x \leq 1$, $0 < t \leq \omega$ могут быть перенесены под знак интеграла (19) и тогда с учетом (8) имеем

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = -a^2 \varphi''(x) + \frac{a^2 \varphi''(x)}{\pi i} \int_{\hat{\mathbb{S}}_{c_1}^+} \mu^{-1} e^{\mu^2 t} dt = -a^2 \varphi''(x) + \frac{a^2 \varphi''(x)}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\hat{\Gamma}_{c_1, r}} \mu^{-1} e^{\mu^2 t} dt = 0,$$

$$l_j u(x, t)|_{x \rightarrow 0} = l_j \varphi|_{x=0} + \frac{a^2}{\pi i} \int_{\hat{\mathbb{S}}_{c_1}^+} \mu^{-1} e^{\mu^2 t} \int_0^1 l_j G_1(x, \xi, \mu) \varphi''(\xi) d\xi = 0 \quad (j = 2, 3).$$

Из оценки (20) видно, что предел при $t \rightarrow 0$ также можно перенести под знак интеграла при всех $x \in [0, 1]$:

$$u(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x) + \frac{a^2}{\pi i} \int_{\hat{\mathbb{S}}_{c_1}^+} \mu^{-1} d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) \varphi''(\xi) d\xi =$$

$$= \varphi(x) + \frac{a^2}{\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r(-\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})} \mu^{-1} d\mu \int_0^1 G_1(x, \xi, \mu) \varphi''(\xi) d\xi = \varphi(x).$$

Следствие 1. При условиях теоремы 1 задача (1), (2), (4) в области $\{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq \omega\}$ имеет единственное решение и оно представляется формулой (19).

Далее из (19) находим

$$u(s, t) = \varphi(s) + \frac{a^2}{\pi i} \int_{\hat{\mathbb{S}}_{c_1}^+} \mu^{-1} e^{\mu^2 t} d\mu \int_0^1 G_1(s, \xi, \mu) \varphi''(\xi) d\xi \equiv \gamma_s(t) \quad (s = 0, 1) \quad (21)$$

и поскольку интеграл в (21) при $t \geq 0$ и интегралы, получаемые от него формальным дифференцированием по t любое число раз при $t \geq t_1 > 0$ (где $t_1 > 0$ произвольное), равномерно сходятся, получаем

Следствие 2. При условиях теоремы 1, если задача (1)–(4) имеет решение, то на частях $\{(s, t) : 0 \leq t \leq \omega, s = 0, 1\}$ боковой границы области $\{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}$ оно принимает граничные значения $\gamma_s(t) \in C[0, \omega] \cap C^\infty(0, \omega]$ ($s = 0, 1$), определяемые формулой (21).

Более того ввиду оценки (7), определения линии $\hat{\mathbb{S}}_{c_1}^+$ и того, что на лучах $\mu = \sigma e^{\pm \frac{3\pi}{8}i}$

$$|e^{\mu^2 t}| = e^{t \operatorname{Re} \mu^2} = e^{t \sigma^2 \cos \frac{3\pi}{4}} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} t \sigma^2},$$

а на части $\{\mu : \mu = c(1 + i\eta), \eta \in [-1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]\}$ этого контура $|e^{\mu^2 t}| = e^{c^2(1-\eta^2)t}$, из (21) получаем

$$|\gamma'_s(t)| \leq C_1 \int_{2c\sqrt{1+\sqrt{2}}}^{\infty} \sigma^2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} t \sigma^2} d\sigma + C_2 \int_{-1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} e^{c^2(1-\eta^2)t} d\eta \leq C \int_0^{\infty} \sigma^2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} t \sigma^2} d\sigma = C \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2} t^{3/2}}, \quad 0 < t \leq \omega.$$

Следствие 3. При условиях теоремы 1, если задача (1)–(4) имеет решение, то для производных функций $\gamma'_s(t)$ имеет место оценка

$$|\gamma'_s(t)| \leq C t^{-3/2}, \quad t \in (0, \omega]. \quad (22)$$

3. Существование и представление решения. Рассмотрим вторую спектральную задачу

$$L\left(\frac{d}{dx}, \lambda^2\right) Z(x, \lambda) = 0, \quad Z(0, \lambda) = 0, \quad Z(1, \lambda) = 0,$$

с комплексным параметром λ . Она имеет функцию Грина $G_2(x, \xi, \lambda)$ (легко вычисляемую), аналитическую по λ всюду, кроме точек $\lambda_k = a\pi k i$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), которые являются ее простыми полюсами. Не останавливаясь на доказательствах, которые имеются в [2], [13] и в более общем случае, отметим некоторые свойства функции G_2 , необходимые для дальнейших рассуждений.

Существует $\delta > 0$ такое, что на λ -плоскости вне множества $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\lambda : |\lambda - \lambda_k| < \delta\}$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^m G_2(x, \xi, \lambda)}{\partial x^m} \right| \leq C |\lambda|^{m-1}, \quad C > 0, \quad m = 0, 1, 2, \quad (23)$$

при всех $x, \xi \in [0, 1]$. При $\lambda \neq \lambda_k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$L\left(\frac{d}{dx}, \lambda^2\right) \int_0^1 G_2(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = -\varphi(x),$$

$$G_2(0, \xi, \lambda) = G_2(1, \xi, \lambda) = 0. \quad (24)$$

Рассмотрим функцию

$$Q(x, \lambda, p, q) = \left(e^{-\frac{\lambda}{a}} - e^{\frac{\lambda}{a}} \right)^{-1} \left[\left(p e^{-\frac{\lambda}{a}} - q \right) e^{\frac{\lambda}{a}x} + \left(q - p e^{\frac{\lambda}{a}} \right) e^{-\frac{\lambda}{a}x} \right], \quad (25)$$

которой будем пользоваться при

$$p = z_0(\lambda) = \left(\alpha_1 e^{2\lambda^2 \omega} - \alpha_0 \right)^{-1} \alpha_1 e^{\lambda^2 \omega} \left[e^{\lambda^2 \omega} \int_0^{\omega} e^{-\lambda^2 t} \gamma_0(t) dt - \alpha_0 \int_0^{\omega} e^{-\lambda^2 t} \gamma_1(t) dt \right],$$

$$q = z_1(\lambda) = \left(\alpha_1 e^{2\lambda^2 \omega} - \alpha_0 \right)^{-1} e^{\lambda^2 \omega} \left[\alpha_1 e^{\lambda^2 \omega} \int_0^{\omega} e^{-\lambda^2 t} \gamma_1(t) dt - \int_0^{\omega} e^{-\lambda^2 t} \gamma_0(t) dt \right], \quad (26)$$

где $\gamma_0(t)$, $\gamma_1(t)$ — непрерывные функции, определенные в (21) и при $p = \varphi(0)$, $q = \varphi(1)$.

Заметим, что в первом случае ($p = z_0(\lambda)$, $q = z_1(\lambda)$) $Q(x, \lambda, p, q)$ аналитическая по λ всюду, кроме точек $\lambda_k = a\pi i$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$), лежащих на мнимой оси и точек $\lambda_m^{\pm} = \pm \left[\frac{1}{2\omega} \left(\ln_0 \frac{\alpha_0}{\alpha_1} + 2\pi m i \right) \right]^{1/2}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), лежащих на гиперболе $\Im \frac{1}{2m} \ln \left| \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right|$, и все эти точки являются ее полюсами, а во втором случае (когда p и q постоянные) аналитичность ее нарушается лишь в полюсах λ_k .

Очевидно, что во всех точках λ , где $Q(x, \lambda, p, q)$ существует, справедливы равенства

$$L\left(\frac{d}{dx}, \lambda^2\right) Q(x, \lambda, p, q) = 0, \quad Q(0, \lambda, p, q) = p, \quad Q(1, \lambda, p, q) = q. \quad (27)$$

Зафиксируем число $c_2 > \max \left(0, \ln \left| \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right| \right)$.

Теорема 2. Пусть $A \neq 0$, $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ и $l_j \varphi|_{x=0} = 0$ ($j = 2, 3$). Тогда задача (1)–(4) имеет решение

$$u(x, t) = \varphi(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} \left[a^2 \int_0^1 G_2(x, \xi, \lambda) \varphi''(\xi) d\xi - Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1)) \right] d\lambda + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{S}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda)) d\lambda. \quad (28)$$

Доказательство. Отдельно исследуем функции

$$u_1(x, t) = \frac{a^2}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} \int_0^1 G_2(x, \xi, \lambda) \varphi''(\xi) d\xi d\lambda, \quad (29)$$

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1)) d\lambda, \quad (30)$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{S}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda)) d\lambda, \quad (31)$$

входящие в (28).

В связи с тем, что при $\operatorname{Re} \lambda \geq c_2$ для $G_2(x, \xi, \lambda)$ и ее производных имеют место оценки (23) и на далеких частях ($\operatorname{Re} \lambda > c_2$) контура $\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$

$$\left| e^{\lambda^2 t} \right| = e^{t|\lambda|^2 \cos 2 \arg \lambda} = e^{t|\lambda|^2 \cos(\pm \frac{3}{4}\pi)} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} t |\lambda|^2}, \quad (32)$$

ясно, что

$$u_1(x, t) \in C^{2,1}(0 \leq x \leq 1, t > 0) \cap C(0 \leq x \leq 1, t \geq 0) \quad (33)$$

и операции $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$ и $t \rightarrow 0$ можно перенести под знак интеграла (29). Следовательно,

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_1 = \frac{a^2}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} L\left(\frac{d}{dx}, \lambda^2\right) \int_0^1 G_2(x, \xi, \lambda) \varphi''(\xi) d\xi d\lambda = \\ = -\frac{a^2}{\pi i} \varphi''(x) \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} d\lambda = -\frac{a^2}{2\pi i} \varphi''(x) \left[\int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} d\lambda + \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^-} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} d\lambda \right] = \\ = -\frac{a^2}{2\pi i} \varphi''(x) \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2, r}^-} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} d\lambda + \right. \\ \left. + \int_{\Omega_r(-\frac{5}{8}\pi, -\frac{3}{8}\pi)} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} d\lambda + \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2, r}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} d\lambda + \int_{\Omega_r(\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi)} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} d\lambda \right] = -a^2 \varphi''(x) \quad (34)$$

при $t > 0$. В последнем звене этого равенства учтено, что оценка (32) верна и на дугах $\Omega_r(-\frac{5}{8}\pi, -\frac{3}{8}\pi)$, $\Omega_r(\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi)$, поэтому пределы при $r \rightarrow \infty$ соответствующих интегралов равны нулю.

Далее ввиду аналитичности $G_2(x, \xi, \lambda)$ в области $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и оценки (23) находим

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= \frac{a^2}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} d\lambda \int_0^1 G_2(x, \xi, \lambda) \varphi''(\xi) d\xi = \\ &= \frac{a^2}{\pi i} \left[\int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} d\lambda \int_0^1 G_2(x, \xi, \lambda) \varphi''(\xi) d\xi + \int_{\Omega_r(-\frac{3}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi)} \lambda^{-1} d\lambda \int_0^1 G_2(x, \xi, \lambda) \varphi''(\xi) d\xi \right] = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

и при $t > 0$ в силу оценок (23), (32) и равенств (24)

$$u_1(s, t) = \frac{a^2}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^1 G_2(s, \xi, \lambda) \varphi''(\xi) d\xi = 0 \quad (s = 0, 1). \quad (36)$$

Как видно из формулы (25), функция $Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1))$ аналитична в области $\operatorname{Re} \lambda > c_2$, где для нее справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^k Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1))}{\partial x^k} \right| \leq C |\lambda|^k \quad (k = 0, 1, 2) \quad (37)$$

при всех $x \in [0, 1]$ и оценка

$$|Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1))| \leq C_1 e^{-\left|\frac{\lambda}{a}\right| x \cos \frac{3}{8}\pi} + C_2 e^{-\left|\frac{\lambda}{a}\right| (1-x) \cos \frac{3}{8}\pi} \quad (38)$$

на далеких частях ($\operatorname{Re} \lambda > c_2$) контура $\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$ и на дугах $\Omega_r(-\frac{3}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi)$ ($r > 2c_2\sqrt{1+\sqrt{2}}$).

Из (32) и (37) следует

$$u_2(x, t) \in C^{2,1} \quad (0 \leq x \leq 1, \quad t > 0), \quad (39)$$

и в (30) при $t > 0$ операции $L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$, $x \rightarrow 0, x \rightarrow 1$, можно перенести под знак интеграла.

Тогда с учетом (27) получаем

$$\begin{aligned} L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_2(x, t) &= 0, \\ u_2(s, t) &= -\frac{\varphi(s)}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} d\lambda = -\frac{\varphi(s)}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2, r}^+} \lambda^{-1} e^{\lambda^2 t} d\lambda = -\varphi(s) \quad (s = 0, 1). \end{aligned} \quad (40)$$

Как видно из (38), при x , принадлежащем любому сегменту $[x_1, x_2] \subset (0, 1)$, интеграл (30) сходится равномерно по $t \geq 0$. Тогда

$$u_2(x, t) \in C(0 < x < 1, \quad t \geq 0) \quad (41)$$

и при $x \in [x_1, x_2]$

$$u_2(x, 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1)) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathfrak{S}_{c_2, r}^+} \lambda^{-1} Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1)) d\lambda + \int_{\Omega_r(-\frac{3}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi)} \lambda^{-1} Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1)) d\lambda \right] = 0 \quad (42)$$

в силу аналитичности $Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1))$ внутри замкнутого контура $\hat{\Gamma}_{c_2, r}^+$.

Наконец рассмотрим интеграл (31). В первую очередь из равенства

$$\begin{aligned} \int_0^\omega e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_s(\tau) d\tau &= \int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} e^{-\lambda^2 \tau} [\gamma_s(\tau) - \gamma_s(0)] d\tau - \\ &- \frac{1}{\lambda^2} \gamma_s(0) \left(e^{-\frac{\lambda^2}{|\lambda|}} - 1 \right) - \frac{1}{\lambda^2} \left[e^{-\lambda^2 \omega} \gamma_s(\omega) - e^{-\frac{\lambda^2}{|\lambda|}} \gamma_s \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \right] + \frac{1}{\lambda^2} \int_{\frac{1}{|\lambda|}}^\omega e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_s'(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

пользуясь оценкой (22), при $\operatorname{Re} \lambda^2 \geq c_2$ получаем

$$\left| \int_0^\omega e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_s(\tau) d\tau \right| \leq \frac{C}{|\lambda|}. \quad (43)$$

В силу этой оценки, формул (25), (26) и того, что на контуре $\mathfrak{S}_{c_2}^+$

$$\operatorname{Re} \lambda = |\lambda| \cos \arg \lambda = \sqrt{\frac{|\lambda|^2 + c_2}{2}},$$

при всех $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} &\left| \lambda^{2k+1} e^{\lambda^2 t} Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda)) \right| \leq \\ &\leq |\lambda|^{2k} e^{c_2 t} \left[C_1 e^{-\frac{1}{a} x \sqrt{\frac{|\lambda|^2 + c_2}{2}}} + C_2 e^{-\frac{1}{a} (1-x) \sqrt{\frac{|\lambda|^2 + c_2}{2}}} \right], \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0 \quad (k = 0, 1), \end{aligned} \quad (44)$$

откуда следует, что при $x \in [x_1, x_2] \subset (0, 1)$, $t \geq 0$, интеграл (31) и интегралы, получаемые от него формальным дифференцированием два раза по x , один раз по t , равномерно сходятся. Поскольку x_1, x_2 произвольные ($0 < x_1 < x_2 < 1$), то

$$u_3(x, t) \in C^{2,1} \quad (0 < x < 1, \quad t \geq 0) \quad (45)$$

и операции $L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right)$, $t \rightarrow 0$, могут быть перенесены под знак интеграла (31) при $x \in [x_1, x_2]$:

$$L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) u_3 = \frac{a^2}{\pi i} \int_{\mathfrak{S}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} L \left(\frac{d}{dx}, \lambda^2 \right) Q d\lambda = 0, \quad (46)$$

с учетом (27)

$$\lim_{t \rightarrow +0} u_3(x, t) = u_3(x, 0) = \frac{a^2}{\pi i} \int_{\mathfrak{S}_{c_2}^+} \lambda Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda)) d\lambda.$$

Оценим подинтегральную функцию на дугах $\Omega_r(-\theta_{c_2, r}, \theta_{c_2, r})$, где $\theta_{c_2, r} = \arctg \sqrt{\frac{r^2 - c_2}{r^2 + c_2}}$, $r > 0$. Из (25) при $\lambda \in \Omega_r(-\theta_{r, c_2}, \theta_{r, c_2})$ имеем

$$|\lambda Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda))| \leq |\lambda| \left[C_1 |z_0(\lambda)| e^{-\frac{x}{a} \sqrt{\frac{|\lambda|^2 + c_2}{2}}} + C_2 |z_1(\lambda)| e^{-\frac{1-x}{a} \sqrt{\frac{|\lambda|^2 + c_2}{2}}} \right], \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0.$$

Из (26), ввиду того, что

$$z_0(\lambda) = \left(\alpha_1 - \alpha_0 e^{-2\lambda^2\omega}\right)^{-1} \alpha_1 \left[\int_0^\omega e^{-\lambda^2 t} \gamma_0(t) dt - \alpha_0 e^{-\lambda^2\omega} \int_0^\omega e^{-\lambda^2 t} \gamma_1(t) dt \right],$$

$$z_1(\lambda) = \left(\alpha_1 - \alpha_0 e^{-2\lambda^2\omega}\right)^{-1} \left[\alpha_1 \int_0^\omega e^{-\lambda^2 t} \gamma_1(t) dt - e^{-\lambda^2\omega} \int_0^\omega e^{-\lambda^2 t} \gamma_0(t) dt \right]$$

и на $\Omega_r(-\theta_{c_2,r}, \theta_{c_2,r})$

$$|\alpha_1 - \alpha_0 e^{-2\lambda^2\omega}| \geq C > 0, \quad |e^{-\lambda^2\omega}| \leq e^{-c_2\omega},$$

тем самым $|z_0(\lambda)| \leq \frac{C}{|\lambda|}, |z_1(\lambda)| \leq \frac{C}{|\lambda|}$ (в силу (43)), заключаем, что при $x \in [x_1, x_2] \subset (0, 1)$

$$u_3(x, 0) = \frac{a^2}{\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathfrak{S}_{c_2,r}^+} \lambda Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda)) d\lambda + \int_{\Omega_r(-\theta_{c_2,r}, \theta_{c_2,r})} \lambda Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda)) d\lambda \right] = 0 \quad (47)$$

ввиду аналитичности $Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda))$ в области $\operatorname{Re} \lambda^2 > c_2$.

Покажем, что $u_3(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям (3). Поскольку при $x \in [x_1, x_2] \subset (0, 1)$ справедливо $(1-x) \in [1-x_2, 1-x_1] \subset (0, 1)$, то при $x \in [x_1, x_2]$

$$l_0 u_3(x, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{S}_2^+} \lambda e^{\lambda^2 t} \left[e^{\lambda^2 \omega} Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda)) + \alpha_0 Q(1-x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda)) \right] d\lambda,$$

и этот интеграл сходится равномерно по $t \geq 0, x \in [x_1, x_2]$. Вычисляя выражение в прямых скобках под знаком интеграла, находим

$$l_0 u_3(x, t) = J_1(x, t) + J_2(x, t), \quad (48)$$

где

$$J_1(x, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{S}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2(t+\omega)} H(x, \lambda) \int_0^\omega e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_0(\tau) d\tau d\lambda,$$

$$J_2(x, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{S}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} H(1-x, \lambda) \left[e^{\lambda^2 \omega} z_1(\lambda) + \alpha_0 z_0(\lambda) \right] d\lambda,$$

$$H(x, \lambda) = \left(e^{-\frac{\lambda}{a}} - e^{\frac{\lambda}{a}} \right)^{-1} \left[e^{\frac{\lambda}{a}(x-1)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-1)} \right], \quad (49)$$

и каждый из интегралов J_1, J_2 сходится равномерно по $t \geq 0, x \in [x_1, x_2]$, поскольку на контуре $\mathfrak{S}_{c_2}^+$

$$\operatorname{Re} \lambda^2 = c_2, \quad |z_j(\lambda)| \leq \frac{C}{|\lambda|} \quad (j = 0, 1), \quad |e^{-\frac{\lambda}{a}} - e^{\frac{\lambda}{a}}| \geq C e^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{|\lambda|^2 + c_2}{2}}. \quad (50)$$

Легко видеть, что интеграл J_2 равномерно сходится и при $t \geq 0, x \in [0, x_2]$, поэтому переходя к пределу при $x \rightarrow 0$ получаем

$$\lim_{x \rightarrow +0} J_2(x, t) = J_2(0, t) = 0. \quad (51)$$

Интеграл J_1 при $t > 0$ с учетом оценки

$$\left| e^{\lambda^2(t+\omega)} \int_0^\omega e^{-\lambda^2\tau} \gamma_0(\tau) d\tau \right| \leq C e^{t|\lambda|^2 \cos 2 \arg \lambda},$$

где $-\frac{\sqrt{2}}{2} |\lambda|^2 \leq |\lambda|^2 \cos 2 \arg \lambda \leq c_2$ при $\lambda \in \Omega_r(\theta_{r,c_2}, \frac{3}{8}\pi)$, пользуясь леммой Жордана и аналитичностью подинтегральной функции между контурами $\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$ и $\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$, можем представить в виде

$$J_1(x, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2, r}^+} \lambda e^{\lambda^2(t+\omega)} H(x, \lambda) \int_0^\omega e^{-\lambda^2\tau} \gamma_0(\tau) d\tau d\lambda,$$

который, ввиду того, что $\operatorname{Re} \lambda^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} |\lambda|^2$, на далеких частях $\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$ при каждом $t > 0$ сходится равномерно по $x \in [0, 1]$. Поэтому при $t > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} J_1(x, t) &= J_1(0, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2(t+\omega)} \int_0^\omega e^{-\lambda^2\tau} \gamma_0(\tau) d\tau d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2(t+\omega)} \int_0^\omega e^{-\lambda^2\tau} \gamma_0(\tau) d\tau d\lambda + \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^-} \lambda e^{\lambda^2(t+\omega)} \int_0^\omega e^{-\lambda^2\tau} \gamma_0(\tau) d\tau d\lambda \right]. \end{aligned}$$

Правую часть этого равенства при $r \rightarrow \infty$ можем представить как предел интеграла по замкнутому контуру $\hat{\Gamma}_{c_2, r}$, откуда

$$\lim_{x \rightarrow +0} J_1(x, t) = J_1(0, t) = 0. \quad (52)$$

Таким образом, ввиду произвольности сегмента $[x_1, x_2] \subset (0, 1)$ из (48), (51), (52) заключаем

$$l_0 u_3(x, t) \in C(0 \leq x < 1, t > 0), \quad l_0 u_3(x, t)|_{x=0} = 0, \quad t > 0. \quad (53)$$

Аналогично доказывается, что

$$l_1 u_3(x, t) \in C(0 \leq x < 1, t > 0), \quad l_1 u_3(x, t)|_{x=0} = 0, \quad t > 0. \quad (54)$$

Из (28), (33)–(36), (39)–(42), (45)–(47), (53), (54) заключаем

$$u(x, t) \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(0 < x < 1, t \geq 0), \quad l_j u(x, t) \in C(0 \leq x < 1, t > 0), \quad j = 0, 1,$$

$u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1), начальному условию (2) и граничным условиям (3).

Что касается граничных условий (4), то доказательство выполнения их мы получим косвенно. А именно, докажем, что $u(x, t) \in C(0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \omega)$ и $u(s, t) = \gamma_s(t)$ ($s = 0, 1$) при $0 \leq t \leq \omega$, откуда в силу единственности решения задачи (1), (2), (4) в $(0, 1) \times (0, \omega)$, доказанной выше (см. следствие 1) и равенств (21) получим, что $u(x, t)$ удовлетворяет условию 3) из определения решения и граничным условиям (4). Причем согласно (36), (40) мы должны доказать, что $u_3(s, t) = \gamma_s(t)$ ($s = 0, 1$) при $0 < t \leq \omega$.

Представляя $z_0(\lambda)$, $z_1(\lambda)$ в виде

$$z_0(\lambda) = \int_0^t e^{-\lambda^2\tau} \gamma_0(\tau) d\tau + z_{01}(t, \lambda), \quad z_1(\lambda) = \int_0^t e^{-\lambda^2\tau} \gamma_1(\tau) d\tau + z_{11}(t, \lambda),$$

где

$$z_{01}(t, \lambda) = \int_t^\omega e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_0(\tau) d\tau + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 e^{2\lambda^2 \omega} - \alpha_0} \int_0^\omega e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_0(\tau) d\tau - \frac{\alpha_0 e^{\lambda^2 \omega}}{\alpha_1 e^{2\lambda^2 \omega} - \alpha_0} \int_0^\omega e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_1(\tau) d\tau,$$

$$z_{11}(t, \lambda) = \int_t^\omega e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_1(\tau) d\tau + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 e^{2\lambda^2 \omega} - \alpha_0} \int_0^\omega e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_1(\tau) d\tau - \frac{e^{\lambda^2 \omega}}{\alpha_1 e^{2\lambda^2 \omega} - \alpha_0} \int_0^\omega e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_0(\tau) d\tau,$$

заметим, что при $0 \leq t \leq \omega$, $x \in [x_1, x_2]$, где $[x_1, x_2]$ — по-прежнему произвольный сегмент из $(0, 1)$, на $\lambda \in \Omega_r(-\theta_{r,c_2}, \theta_{r,c_2})$ имеем

$$|\lambda e^{\lambda^2 t} Q(x, \lambda, z_{01}(t, \lambda), z_{11}(t, \lambda))| \leq |e^{-\frac{\lambda}{a}}| \left[C_1 \left(|e^{\frac{\lambda}{a}(x-1)}| + |e^{-\frac{\lambda}{a}(x-1)}| + C_2 |e^{-\frac{\lambda}{a}x}| \right) \right],$$

и поскольку на этой дуге $|e^{-\frac{\lambda}{a}}| \leq C e^{-\frac{1}{a} \sqrt{\frac{|\lambda|^2 + C_2}{2}}}$, то

$$\int_{\mathfrak{S}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} Q(x, \lambda, z_{01}(t, \lambda), z_{11}(t, \lambda)) d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{c_2, r}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} Q(u, \lambda, z_{01}(t, \lambda), z_{11}(t, \lambda)) d\lambda = 0$$

при $0 \leq t \leq \omega$, $x \in [x_1, x_2] \subset (0, 1)$.

Наконец, рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= u_3(x, t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{S}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} Q(x, \lambda, z_{01}(t, \lambda), z_{11}(t, \lambda)) d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\mathfrak{S}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} Q \left(x, \lambda, \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_0(\tau) d\tau, \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_1(\tau) d\tau \right) d\lambda, \end{aligned} \quad (55)$$

которая при $t > 0$ и $x \in [x_1, x_2]$ в силу леммы Жордана [1] может быть представлена в виде

$$u_3(x, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} Q \left(x, \lambda, \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_0(\tau) d\tau, \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_1(\tau) d\tau \right) d\lambda.$$

Отсюда, пользуясь выражением Q из (25), получаем

$$u_3(x, t) = u_{30}(x, t) + u_{31}(x, t), \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} u_{30}(x, t) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} H(x, \lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_0(\tau) d\tau d\lambda, \\ u_{31}(x, t) &= -\frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} H(x+1, \lambda) \int_0^t e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_1(\tau) d\tau d\lambda. \end{aligned} \quad (57)$$

Ввиду ограниченности на контуре $\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$ функций $\int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \gamma_s(\tau) d\tau$, $s = 0, 1$, произвольности сегмента $[x_1, x_2] \subset (0, 1)$, а также оценок

$$\begin{aligned} \left| e^{-\frac{\lambda}{a}} - e^{\frac{\lambda}{a}} \right|^{-1} \left| e^{\frac{\lambda}{a}(x-1)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-1)} \right| &\leq C \left| e^{-\frac{\lambda}{a}x} \right|, \\ \left| e^{-\frac{\lambda}{a}} - e^{\frac{\lambda}{a}} \right|^{-1} \left| e^{-\frac{\lambda}{a}x} - e^{\frac{\lambda}{a}x} \right| &\leq C \left| e^{\frac{\lambda}{a}(x-1)} \right|, \end{aligned} \quad (58)$$

ясно, что в первой из формул (57) можно перейти к пределу при $x \rightarrow 1$, а во-второй при $x \rightarrow 0$ под знаками этих интегралов, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow 1} u_{30}(x, t) = u_{30}(1, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u_{31}(x, t) = u_{31}(0, t) = 0.$$

Представляя теперь $u_{3s}(x, t)$ в виде

$$u_{3s}(x, t) = \frac{(-1)^s}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} H(x + s, \lambda) \left[\int_0^{\frac{n-1}{n}t} e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_s(\tau) d\tau + \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_s(\tau) d\tau \right] d\lambda, \quad s = 0, 1,$$

где n — произвольное натуральное число, заметим, что при $t > 0$, $0 \leq \tau \leq \frac{n-1}{n}t$ на $\lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$

$$\left| \lambda e^{\lambda^2(t-\tau)} \right| \leq C |\lambda| e^{-\frac{n-1}{n} \frac{\sqrt{2}}{2} |\lambda|^2 t}, \quad (59)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow s} u_{3s}(x, t) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} \int_0^{\frac{n-1}{n}t} e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_s(\tau) d\tau d\lambda + \\ &+ \frac{(-1)^s}{\pi i} \lim_{x \rightarrow s} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} H(x + s, \lambda) \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_s(\tau) d\tau d\lambda, \quad s = 0, 1, \end{aligned}$$

причем для первого из этих интегралов по $\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$, ввиду справедливости оценки (59) на дугах $\Omega_r(-\frac{5}{8}\pi + j\pi, -\frac{3}{8}\pi + j\pi)$ ($j = 0, 1$) и аналитичности подинтегральной функции, имеем

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^{\frac{n-1}{n}t} e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_s(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\hat{\Gamma}_{c_2, r}} \lambda e^{\lambda^2 t} d\lambda \int_0^{\frac{n-1}{n}t} e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_s(\tau) d\tau = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow s} u_{3s}(x, t) = \frac{(-1)^s}{\pi i} \lim_{x \rightarrow s} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda e^{\lambda^2 t} H(x + s, \lambda) \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{-\lambda^2 \tau} \gamma_s(\tau) d\tau d\lambda, \quad s = 0, 1. \quad (60)$$

Наконец, подставляя в (60)

$$\int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} \gamma_s(\tau) d\tau = \lambda^{-2} \left(e^{\frac{1}{n}\lambda^2 t} - 1 \right) \gamma_s(t) + \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} [\gamma_s(\tau) - \gamma_s(t)] d\tau,$$

получаем

$$\lim_{x \rightarrow s} u_{3s}(x, t) = \frac{(-1)^s}{\pi i} \lim_{x \rightarrow s} \left\{ \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} H(x + s, \lambda) d\lambda - \right. \\ \left. - \gamma_s(t) \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} H(x + s, \lambda) d\lambda + \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda H(x + s, \lambda) \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} [\gamma_s(\tau) - \gamma_s(t)] d\tau d\lambda \right\}. \quad (61)$$

В первом из интегралов по $\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$ ввиду оценки

$$\left| e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} \right| \leq e^{-\frac{\sqrt{2}}{2n} |\lambda|^2 t}, \quad (62)$$

справедливой на $\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$ (очевидно, и на дугах $\Omega(-\frac{5}{8}\pi + j\pi, -\frac{3}{8}\pi + j\pi)$, $j = 0, 1$) при $x \rightarrow s$ можно перейти к пределу

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^s}{\pi i} \lim_{x \rightarrow s} \gamma_s(t) \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} H(x + s, \lambda) d\lambda = \\ & = \frac{1}{\pi i} \gamma_s(t) \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \gamma_s(t) \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2, r}^+} \lambda^{-1} e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} d\lambda + \right. \\ & + \int_{\Omega_r(\frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi)} \lambda^{-1} e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} d\lambda + \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2, r}^-} \lambda^{-1} e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} d\lambda + \int_{\Omega_r(-\frac{5}{8}\pi, -\frac{3}{8}\pi)} \lambda^{-1} e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} d\lambda \Big] = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \gamma_s(t) \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\hat{\Gamma}_{c_2, r}^+} \lambda^{-1} e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} d\lambda = \gamma_s(t), \quad s = 0, 1. \end{aligned} \quad (63)$$

Для второго слагаемого при $x \in [x_1, x_2]$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} H(x + s, \lambda) d\lambda &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2, r}^+} \lambda^{-1} H(x + s, \lambda) d\lambda + \int_{\Omega_r(-\frac{3}{8}\pi, \frac{3}{8}\pi)} \lambda^{-1} H(x + s, \lambda) d\lambda \right] = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\hat{\Gamma}_{c_2, r}^+} \lambda^{-1} H(x + s, \lambda) d\lambda = 0, \quad s = 0, 1. \end{aligned} \quad (64)$$

А в третьем слагаемом из (61) в силу свойства дифференцируемости при $t > 0$ функций $\gamma_s(t)$ (см. следствие 2 из теоремы 1)

$$\begin{aligned} \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} [\gamma_s(\tau) - \gamma_s(t)] d\tau &= \frac{1}{\lambda^2} \left[\gamma_s \left(\frac{n-1}{n}t \right) - \gamma_s(t) \right] e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} + \\ &+ \frac{1}{\lambda^4} \left[e^{\frac{1}{n} \lambda^2 t} \gamma_s' \left(\frac{n-1}{n}t \right) - \gamma_s'(t) \right] + \frac{1}{\lambda^4} \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \gamma_s''(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (65)$$

Подставляя (65) в это слагаемое, получаем

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow s} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda H(x+s, \lambda) \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} [\gamma_s(\tau) - \gamma_s(t)] d\tau d\lambda = \\
& = \lim_{x \rightarrow s} \left\{ \left[\gamma_s \left(\frac{n-1}{n}t \right) - \gamma_s(t) \right] \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} H(x+s, \lambda) d\lambda + \right. \\
& \left. + \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} \left[e^{\frac{1}{n}\lambda^2 t} \gamma_s' \left(\frac{n-1}{n}t \right) - \gamma_s'(t) \right] H(x+s, \lambda) d\lambda + \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} H(x+s, \lambda) \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \gamma_s''(\tau) d\tau d\lambda \right\}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Ввиду оценок (58) при $x \in [x_1, x_2]$

$$\int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-1} H(x+s, \lambda) d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\hat{\Gamma}_{c_2, r}^+} \lambda^{-1} H(x+s, \lambda) d\lambda = 0,$$

а в силу (62) и (49)

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow s} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} \left[e^{\frac{1}{n}\lambda^2 t} \gamma_s' \left(\frac{n-1}{n}t \right) - \gamma_s'(t) \right] H(x+s, \lambda) d\lambda = (-1)^s \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} \left[e^{\frac{1}{n}\lambda^2 t} \gamma_s' \left(\frac{n-1}{n}t \right) - \gamma_s'(t) \right] d\lambda, \\
& \lim_{x \rightarrow s} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} H(x+s, \lambda) \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \gamma_s''(\tau) d\tau d\lambda = (-1)^s \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \gamma_s''(\tau) d\tau d\lambda.
\end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в (66), для третьего слагаемого из (60) получаем

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow s} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda H(x+s, \lambda) \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} [\gamma_s(\tau) - \gamma_s(t)] d\tau d\lambda = \\
& = (-1)^s \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} \left[e^{\frac{1}{n}\lambda^2 t} \gamma_s \left(\frac{n-1}{n}t \right) - \gamma_s(t) \right] d\lambda + (-1)^s \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \gamma_s''(\tau) d\tau d\lambda,
\end{aligned} \tag{67}$$

и с учетом (63), (64), (67) из (61) находим

$$\lim_{x \rightarrow s} u_{3s}(x, t) = \gamma_s(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} \left[e^{\frac{1}{n}\lambda^2 t} \gamma_s' \left(\frac{n-1}{n}t \right) - \gamma_s'(t) \right] d\lambda + \frac{1}{\pi i} \int_{\hat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} \int_{\frac{n-1}{n}t}^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \gamma_s''(\tau) d\tau d\lambda,$$

откуда в силу равномерной (по $t \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$) сходимости интегралов, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{x \rightarrow s} u_{3s}(x, t) = \gamma_s(t), \quad s = 0, 1, \tag{68}$$

а из (55)–(57) заключаем

$$\lim_{x \rightarrow s} u_3(x, t) = \gamma_s(t), \quad s = 0, 1.$$

Для завершения доказательства теоремы остается показать справедливость включения (второго из условий 1)

$$\int_0^t u(x, \tau) d\tau \in C(0 \leq x \leq 1, t \geq 0).$$

Ввиду формулы (28) и доказанного выше включения (33), необходимо лишь установить

$$\int_0^t [u_2(x, \tau) + u_3(x, \tau)] d\tau \in C(0 \leq x \leq 1, t \geq 0),$$

что следует из равномерной сходимости интегралов

$$\int_{\widehat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+} \lambda^{-3} (e^{\lambda^2 t} - 1) Q(x, \lambda, \varphi(0), \varphi(1)) d\lambda, \quad \int_{\mathfrak{S}_2^+} \lambda^{-1} (e^{\lambda^2 t} - 1) Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda)) d\lambda$$

в силу оценок (32), (37), справедливых на $\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}_{c_2}^+$, при всех $t \geq 0$ и $0 \leq x \leq 1$ и оценки

$$\left| (e^{\lambda^2 t} - 1) Q(x, \lambda, z_0(\lambda), z_1(\lambda)) \right| \leq \frac{C}{|\lambda|},$$

вытекающей из (44), также справедливой при всех $t \geq 0$ и $0 \leq x \leq 1$. $\square$

Объединяя теоремы 1, 2, приходим к следующему заключительному утверждению.

Теорема 3. Пусть $a_0 b_1 + b_0 a_1 \neq 0$, $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ и $l_j \varphi(x)|_{x=0} = 0$ ($j = 2, 3$). Тогда задача (1)–(4) имеет единственное решение и оно представляется формулой (28).

Замечание. Данный подход, по-видимому, применим и к задачам для более общего уравнения параболического типа, в том числе и с переменными по x коэффициентами. Формы l_j (причем как l_2, l_3 , так и l_0, l_1 , содержащие опережения) также можно рассмотреть достаточно общие, конечно при этом вместо условия $A \neq 0$ теорем 1–3, необходимо потребовать, чтобы граничные формы $l_j|_{x=0} = 0$ ($j = 2, 3$) были регулярными по Биркгофу [13], [16]. Возможно и рассмотрение некоторых многомерных задач с опережением времени в граничных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функции комплексного переменного* (Наука, М., 1973).
- [2] Расулов М.Л. *Метод контурного интеграла* (Наука, М., 1964).
- [3] Wu I. *Theory and applications of partial functional differential equations* (New York, Springer, 1996).
- [4] Зарубин А.Н. *Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом*, Учеб. пособие (ОГУ, Орел, 1997).
- [5] Teo K.L. *Second order linear partial differential equations of parabolic type with delayed arguments*, Nanta Math. **10** (2), 119–130 (1977).
- [6] Mishev D.P. *Necessary and sufficient conditions for oscillation of retarded type of parabolic differential equations*, C. R. Acad. Bulgare Sci. **44** (3), 11–14 (1991).
- [7] Подгорнов В.В. *Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений с запаздывающим аргументом*, Дифференц. уравнения **3** (8), 1334–1341 (1967).
- [8] Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж. *Корректность задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента*, Изв. вузов. Матем., № 4, 17–24 (2015).
- [9] Уткина Е.А. *Характеристическая граничная задача для уравнения четвертого порядка с псевдопараболическим оператором со смещением аргументов искомой функции*, Дифференц. уравнения **51** (3), 421–424 (2015).

- [10] Камынин Л.И. *Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **4** (6), 1006–1024 (1964).
- [11] Ионкин Н.И. *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием*, Дифференц. уравнения **13** (2), 294–304 (1997).
- [12] Мамедов Ю.А. *Математическая постановка и решение одной задачи теплопроводности при частично детерминированном граничном режиме*, Вестн. БГУ, **3**, 5–11 (2005).
- [13] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы* (Наука, М., 1969).
- [14] Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях с частными производными* (Физматгиз, М., 1961).
- [15] Михлин С.Г. *Курс математической физики* (Наука, М., 1968).
- [16] Birkhoff G.D. *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations*, Am. Math. Soc. Trans. **9** (4), 373–395 (1908).

Юсиф Абульфат оглы Мамедов

Бакинский государственный университет,
ул. З. Халилова, д. 23, г. Баку, AZ-1148, Азербайджан,

e-mail: yusifmamedov@icloud.com

Хикмет Иншалла оглы Ахмедов

Бакинский государственный университет,
ул. З. Халилова, д. 23, г. Баку, AZ-1148, Азербайджан,

e-mail: hikmatahmadov@yahoo.com

Yu.A. Mammadov and H.I. Ahmadov

A mixed problem for the heat equation with advanced time in boundary conditions

Abstract. One-dimensional mixed problem for the heat equation is studied, with time advance in nonlocal and non-self-adjoint boundary conditions, describing the real physical process. Under minimal conditions on the initial data, unique solvability is proved and an explicit representation for the solution is obtained.

Keywords: The mixed problem, deviation on time, residue method.

Yusif Abulfat oglu Mammadov

Baku State University,
23 Z. Khalilov str., Baku, AZ-1148 Azerbaijan,

e-mail: yusifmamedov@icloud.com

Hikmet Inshalla oglu Ahmadov

Baku State University,
23 Z. Khalilov str., Baku, AZ-1148 Azerbaijan,

e-mail: hikmatahmadov@yahoo.com