Общероссийский математический портал

С. М. Умархаджиев, Об эллиптических однородных дифференциальных операторах в гранд-пространствах, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 3, 64–73

DOI: <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-3-64-73>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:47:02

С.М. УМАРХАДЖИЕВ

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ

Аннотация. Дается приложение развиваемой в последние годы теории функциональных пространств, известных как гранд-пространство Лебега и гранд-пространство Соболева, к дифференциальным уравнениям в частных производных. В случае неограниченных областей такие пространства строятся с использованием так называемых грандизаторов. При некоторых естественных предположениях о выборе грандизатора для произвольного эллиптического однородного дифференциального оператора $P_m(D)$ четного порядка с постоянными вещественными коэффициентами доказывается существование в некотором гранд-пространстве Соболева решения уравнения $P_m(D)u(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m < n$, с правой частью из соответствующего гранд-пространства Лебега. Кроме того, для указанных многочленов $P_m(x)$ в общем случае уточняются известные факты для соответствующего фундаментального решения: оно строится в явном виде либо в виде сферических гиперсингулярных интегралов, либо в виде некоторых средних по плоским сечениям единичной сферы.

Ключевые слова: эллиптический однородный дифференциальный оператор, гранд-пространство Лебега, гранд-пространство Соболева, грандизатор, фундаментальное решение, сферический гиперсингулярный интеграл.

УДК: 517.982: 517.968

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-3-64-73

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия широкое развитие получила теория так называемых гранд-пространств Лебега и гранд-пространств Соболева. Гранд-пространства Лебега $L^{p,\theta}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, по ограниченному множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ были введены в [1], [2] в связи с приложениями в теории дифференциальных уравнений. Эти приложения обусловлены, в частности, тем, что гранд-пространства являются большим расширением классических пространств Лебега, чем слабые пространства Лебега. Использование этих более широких пространств позволило, в частности, получить более сильные утверждения об интегрируемости якобианов отображений [1], [3].

Гранд-пространства Лебега привлекают большое внимание исследователей, и многие операторы гармонического анализа в областях с конечной мерой интенсивно изучались, например, в работах [4]–[8] (см. также [9], [10] и ссылки в этих работах).

Поступила в редакцию 02.11.2018, после доработки 02.11.2018. Принята к публикации 18.12.2019.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-01-00094-А.

В работах [11]–[13] предложен подход, позволяющий ввести гранд-пространства Лебега $L_a^{p),\theta}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, на множествах $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ с не обязательно конечной мерой, так чтобы получаемое гранд-пространство было бы шире исходного пространства L^p . Этот подход основан на введении в норму гранд-пространства малой степени неотрицательной функции $a(x)$. При этом непрерывное вложение $L^p(\Omega) \hookrightarrow L_a^{p),\theta}(\Omega)$ эквивалентно условию $a \in L^1(\Omega)$. Эту функцию, определяющую гранд-пространство $L_a^{p),\theta}(\Omega)$, называем *грандизатором*. Такие гранд-пространства $L_a^{p),\theta}(\Omega)$ и действия в них некоторых операторов гармонического анализа исследовались в работах [14]–[22]. Предложенные в этих работах подходы позволили рассматривать в гранд-пространствах по $\mathbb{R}^n$ такие операторы, как потенциал Рисса, операторы Харди и др. В работе [16] были найдены условия на грандизатор $a(x)$, обеспечивающие справедливость теоремы Соболева для потенциала Рисса в гранд-пространствах $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, и исследовано взаимодействие потенциалов Рисса с гиперсингулярными интегралами (см. [23] относительно гиперсингулярных интегралов). В [16] для широкого класса грандизаторов была доказана плотность пространства Лизоркина в подпространстве $\dot{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ функций из гранд-пространства Лебега $L_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих, так называемому “условию зануления” (см. (2)) и в соболевской ситуации, т. е. в случае $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, показано, что оператор гиперсингулярного интегрирования порядка α является левым обратным к оператору I^α .

В данной работе рассматривается вопрос о решениях одного класса эллиптических дифференциальных уравнений в гранд-пространствах Соболева. Пусть

$$P_m(D) = \sum_{|j|=m} p_j D^j u$$

— эллиптический ($P_m(x') \neq 0$, $x' \in S^{n-1}$), однородный дифференциальный оператор порядка m с постоянными вещественными коэффициентами. Заметим, что эллиптичность предполагает, что m четно: не существует эллиптических однородных многочленов нечетного порядка с вещественными коэффициентами (см., например, [24], с. 253). Существование решения u уравнения

$$P_m(D)u = f \tag{1}$$

в пространстве Соболева $W^{p,q;m}(\mathbb{R}^n) := \{f : f \in L^q(\mathbb{R}^n), D^j f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ для всех } j \text{ с } |j| = m\}$, где $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$, $m < n$, общеизвестно и является следствием теоремы Соболева для потенциала Рисса и свойств операторов Кальдерона–Зигмунда.

Обосновываем существование решения дифференциального уравнения (1) в гранд-пространстве Соболева (см. п. 2.1) для некоторого класса грандизаторов. Использование понятия грандизаторов играет при этом существенную роль, поскольку позволяет, в частности, иметь в гранд-пространстве Лебега плотность хороших функций, например, основных функций из класса Лизоркина.

Независимо от выбора рассматриваемых пространств, решение уравнения (1) дается сверткой с фундаментальным решением оператора $P_m(D)$. Общеизвестно, что это фундаментальное решение имеет вид $u_0(x) = \frac{\gamma(x')}{|x|^{n-m}}$, $x' = \frac{x}{|x|}$, $\gamma \in C^\infty(S^{n-1})$ (более подробно см. раздел 3). Для приложения уравнения (1) в гранд-пространствах этого достаточно. Кроме приложения к самому уравнению (1) в данной работе содержится также, насколько нам известно, новый результат для самого фундаментального решения. Для функции $\gamma(x')$ известно, что она может быть построена в виде ряда по сферическим гармоникам в терминах коэффициентов такого разложения функции $\frac{1}{P_m(-ix')}$ (см., например, [25]). Используя

некоторые факты, связанные с гиперсингулярными интегралами на сфере, нам удастся получить явные формулы для $\gamma(x')$ либо в терминах гиперсингулярных интегралов, либо в терминах средних следов функции $\frac{1}{P_m(x')}$ на плоских сечениях сферы в зависимости от четности n .

В разделе 2 приводятся необходимые предварительные сведения о гранд-пространствах Лебега и о сферических свертках, в разделе 3 получены явные формулы для фундаментального решения оператора $P_m(D)$, в разделе 4 дано обоснование решения в гранд-пространстве Соболева уравнения $P_m(D)u = f$ с правой частью из гранд-пространства Лебега.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. О гранд-пространствах Лебега и Соболева. Гранд-пространства Лебега, введенные в [13], имеют вид

$$L_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \|f\|_{L_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{0 < \varepsilon < p-1} \varepsilon^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty \right\},$$

где $a(x)$ — неотрицательная локально интегрируемая на $\mathbb{R}^n$ функция, называемая грандизатором. Вложение $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Обозначим также

$$G(\mathbb{R}^n) := \{a \in L^1(\mathbb{R}^n), \exists \nu > 0 : a^\nu \in A_\infty\},$$

где A_∞ — известный класс Макенхаупта. Пространство $L_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ несепарабельно. Множество функций в $L_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\theta p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-\varepsilon} a(x)^{\frac{\varepsilon}{p}} dx = 0, \quad (2)$$

обозначаемое $\dot{L}_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, является замкнутым подпространством в $L_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$. Пространство $\dot{L}_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ является сепарабельным, по крайней мере, для $a \in G(\mathbb{R}^n)$: в работе [16] показано, что $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и класс Φ Лизоркина основных функций плотны в $\dot{L}_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ в этом случае (см., например, [23], [26] относительно класса Лизоркина).

Будем рассматривать гранд-пространства Соболева функций на $\mathbb{R}^n$ с разной суммируемостью самой функции и ее производных. Обычные пространства Соболева–Лебега с такой разной суммируемостью рассматривались в ([27]; [23], гл. 7). В определении нормы таких пространств участвуют только сама функция $f \in L^q$ и ее старшие производные $D^j f \in L^p$ для всех мультииндексов j с $|j| = m$. Информация же о принадлежности промежуточных производных с $1 \leq |j| \leq m-1$ пространствам $L^{p|j|}$, $\frac{1}{p|j|} = \frac{1}{p} - \frac{|j|}{n}$, и уже является автоматическим следствием предположений для $j = 0$ и $|j| = m$ (см. [28]). Соответственно вводим гранд-пространства Соболева

$$W_a^{(p),q,\theta;m}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in L_a^{(q),\theta}(\mathbb{R}^n), D^j f \in L_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n) \forall |j| = m \right\},$$

где $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$, и производные понимаются в смысле обобщенных функций над классом Φ Лизоркина с нормой

$$\|f\|_{W_a^{(p),q,\theta;m}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_a^{(q),\theta}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|j|=m} \|D^j f\|_{L_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Будем обозначать

$$\dot{W}_a^{(p),q),\theta;m}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in \dot{L}_a^{q),\theta}(\mathbb{R}^n), D^j f \in \dot{L}_a^{p),\theta}(\mathbb{R}^n) \ \forall |j| = m \right\}.$$

2.2. О сферических свертках с ядром $(-ix' \cdot \sigma)^{-\alpha}$. Всюду в последующем для $x \in \mathbb{R}^n$ пользуемся обозначением

$$x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}.$$

В этом разделе, следуя [29], [23], приведем некоторые известные факты для интегралов вида

$$J(x, \alpha) = \int_{S^{n-1}} \frac{\omega(\sigma) d\sigma}{(-ix' \cdot \sigma)^\alpha}, \quad x' \in S^{n-1}, \quad (3)$$

где $\omega(\sigma) \in C^\infty(S^{n-1})$ и α , вообще говоря, комплексное число. Такие конструкции возникают при рассмотрении символов гиперсингулярных интегралов и обобщенных потенциалов с однородными характеристиками ([23], [29], [30], см. также [31]). Интегралы вида (3) определены в обычном смысле при $\Re \alpha < 1$, а при $\Re \alpha \geq 1$ понимаются в смысле аналитического продолжения по α . Заметим, что в случае $\omega(\sigma) \in C^\infty(S^{n-1})$ функция $J(x, \alpha)$ аналитична для всех $\alpha \in \mathbb{C}$ (см. [30], с. 177; [23]). В [23], [30] осуществлена явная регуляризация интеграла в (3) в терминах сходящихся интегралов:

$$J(x, \alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x \cdot \sigma| > \varepsilon} \frac{\omega(\sigma) - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{1}{k!} M_\omega^{(k)}(x', 0) (x' \cdot \sigma)^k}{(-ix' \cdot \sigma)^\alpha} d\sigma + \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{|x|^\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{i^k M_\omega^{(k)}(x', 0)}{k! \Gamma\left(\frac{n+1-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+k-\alpha}{2}\right)}, \quad (4)$$

где

$$M_\omega(x', t) = \frac{1}{|S^{n-2}|(1-t^2)^{\frac{n-2}{2}}} \int_{\substack{x' \cdot \sigma = t, \\ |\sigma|=1}} \omega(\sigma) ds_\sigma$$

— средние следов функции $\omega(x')$ на экваториальном сечении сферы S^{n-1} , ортогональном вектору x' , где s_σ — мера размерности $n-2$ на сечении сферы плоскостью $x \cdot \sigma = t$, $0 \leq t < 1$, и штрих у знака суммы означает пропуск слагаемых с номерами $k = \alpha-1, \alpha-3, \dots$ в случае целого α .

Интегралы вида (3) в последующем будем писать с обозначением p.f. (partie finie): в [23], [30] показано, что аналитическое продолжение по α функции $J(x, \alpha)$ совпадает с интерпретацией интеграла в смысле конечной части по Адамару.

3. ЯВНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Напомним, что фундаментальным решением дифференциального оператора $P_m(D)$ называется функция u_0 , удовлетворяющая уравнению $P_m(D)u_0 = \delta(x')$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, трактуемого в смысле обобщенных функций над, например, основным классом Шварца. В силу эллиптичности преобразование Фурье фундаментального решения дается равенством $\hat{u}_0(x) = \frac{1}{P_m(-ix)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Отсюда из соображения однородности нетрудно убедиться в том, что само фундаментальное решение имеет вид $u_0(x) = \frac{\gamma(x')}{|x|^{n-m}}$.

В теореме 1 показываем, что функция $\gamma(x')$ может быть явно записана в замкнутой форме, т. е. в виде некоторых операторов от функции $\frac{1}{P_m(-ix')}$, при этом получаемые формулы разнятся в зависимости от четности размерности n . При нечетном n возникают некоторые

гиперсингулярные интегралы по сфере, а при четных n — некоторые средние по сечениям сферы.

Лемма 1. Пусть $n \geq 3$, $\omega \in C^\infty(S^{n-1})$ и четна. Для ее средних $M_\omega(x', t)$ справедливы равенства

$$\frac{\partial^j M_\omega(x', 0)}{\partial t^j} = 0$$

при $j = 1, 3, 5, \dots$.

Доказательство. Так как ω четна, то ее разложение в ряд Фурье–Лапласа содержит сферические гармоники только с четными номерами

$$\omega(x') = \sum_{k, \mu} \omega_{2k, \mu} Y_{2k, \mu}(x').$$

Представление средних через разложение самой функции ω известно:

$$M_\omega(x', t) = \sum_{k, \mu} \omega_{2k, \mu} \binom{2k + n - 3}{2k}^{-1} C_{2k}^\lambda(t) Y_{2k, \mu}(x'), \quad \lambda = \frac{n-2}{2},$$

где $C_m^\lambda(t)$ — многочлен Гегенбауера (см. [23], формула (4.25)). Тогда утверждение леммы следует из легко проверяемого факта

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} C_{2k}^\lambda(t) \right|_{t=0} = 0$$

для нечетных j . □

Лемма 2. Пусть $n \geq 3$, n нечетно и $\omega \in C^\infty(S^{n-1})$ — четная функция. Тогда

$$\text{p.f.} \int_{S^{n-1}} \frac{\omega(\sigma) d\sigma}{(x \cdot \sigma)^{n-m}} = 0, \quad x \in S^{n-1},$$

где $m = 2, 4, 6, \dots < n$.

Доказательство. Обращение в нуль интеграла по сфере от нечетной подинтегральной функции, очевидное для обычных интегралов, в данном случае нуждается в обосновании в силу специфичности толкования интеграла.

К рассматриваемому интегралу применим регуляризацию (4) с $\alpha = n - m$. Внеинтегральное выражение в правой части содержит производные от средних только порядков одинаковой четности с $n - m$. Так как n нечетно, то значения всех этих производных в нуле исчезают согласно лемме 1. Интеграл же в правой части уже является абсолютно сходящимся в силу формулы Каталана (см. подробности в [23], с. 93) и имеет нечетное подинтегральное выражение. □

В следующей лемме используется обозначение

$$\widetilde{M}_\omega(x', t) := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \int_{\substack{x' \cdot \sigma = t, \\ |\sigma|=1}} \omega(\sigma) ds_\sigma. \quad (5)$$

Отметим, что формула для $\widetilde{M}_\omega(x', t)$, приведенная в ([23], с. 97), содержит опечатку, в (5) она исправлена.

Лемма 3. Пусть $n \geq 3$, n нечетно и $\omega \in C^\infty(S^{n-1})$ — четная функция. Тогда

$$\frac{\partial^N \widetilde{M}_\omega(x', 0)}{\partial t^N} = 0$$

для всех нечетных N .

Доказательство. Заметим, что $\widetilde{M}_\omega(x', t) = |S^{n-2}|(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} M_\omega(x', t)$. По формуле Лейбница получаем

$$\frac{\partial^N \widetilde{M}_\omega(x', t)}{\partial t^N} = \sum_{\nu=0}^N C_{N,\nu} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left((1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} \right) \frac{\partial^{N-\nu}}{\partial t^{N-\nu}} M_\omega(x', t).$$

По индукции легко доказывается, что в каждом слагаемом в нуле исчезает первый множитель для нечетного ν . Второй множитель исчезает в этой точке для всех четных ν согласно лемме 1, что и дает утверждение леммы. $\square$

Теорема 1. Пусть $n \geq 3$ и $P_m(x)$ — эллиптический однородный многочлен четного порядка $m < n$ с постоянными вещественными коэффициентами. Фундаментальное решение дифференциального оператора $P_m(D)$ можно вычислить по формуле

$$u_0(x) = \frac{\gamma(x')}{|x|^{n-m}}, \quad \gamma \in C^\infty(S^{n-1}),$$

где

$$\gamma(x') = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^n \pi^{n-1}} \frac{\partial^{n-m-1} \widetilde{M}_{1/P_m}(-x', 0)}{\partial y^{n-m-1}} \quad (6)$$

в случае нечетного n и

$$\gamma(x') = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \Gamma(n-m)}{(2\pi)^n} \text{ p.f. } \int_{S^{n-1}} \frac{d\sigma}{P_m(\sigma)(x \cdot \sigma)^{n-m}} \quad (7)$$

в случае четного n .

Доказательство. Обозначим для краткости $g(x) = \frac{1}{P_m(-ix)}$ и пусть $g(x') = \sum_{k,\mu} g_{k,\mu} Y_{k,\mu}(x')$ — разложение функции $g(x)$ по сферическим гармоникам. Ряд абсолютно сходится даже после умножения его членов на $|x|^N$ с как угодно большим N , поскольку $g(x') \in C^\infty(S^{n-1})$ (см. [23], теорема 1.14.). В ([23], с. 10) можно найти также основные сведения о разложениях по сферическим гармоникам. Тогда искомое фундаментальное решение, т. е. обратное преобразование Фурье функции $g(x)$, имеет вид

$$u_0(x) = \sum_{k,\mu} g_{k,\mu} F^{-1} \left(\frac{Y_{k,\mu}(y)}{|y|^m} \right),$$

где $F^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y) dy$. Почленное применение преобразования Фурье легко обосновывается рассмотрением этой операции в рамках обобщенных функций над основным классом Φ Лизоркина.

Воспользуемся формулой

$$F^{-1} \left(\frac{Y_{k,\mu}(y)}{|y|^{n-\alpha}} \right) (x) = \frac{(-i)^k 2^{\alpha-n} \Gamma\left(\frac{\alpha+k}{2}\right)}{\pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{n-\alpha+k}{2}\right)} \frac{Y_{k,\mu}(x')}{|x|^\alpha},$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, но $\alpha + k \neq 0, -2, -4, -6, \dots$ и $\alpha - n - k \neq 0, 2, 4, 6, \dots$ (см. [30], с. 172), в силу которой получаем

$$u_0(x) = \frac{1}{2^m \pi^{\frac{n}{2}} |x|^{n-m}} \sum_{k,\mu} (-i)^k \frac{\Gamma\left(\frac{n+k-m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)} g_{k,\mu} Y_{k,\mu}(x'). \quad (8)$$

Так как $g(x)$ четна, то слагаемые с нечетными номерами исчезают:

$$u_0(x) = \frac{1}{2^m \pi^{\frac{n}{2}} |x|^{n-m}} \sum_{k,\mu} (-1)^k \frac{\Gamma\left(k + \frac{n-m}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{m}{2}\right)} g_{2k,\mu} Y_{2k,\mu}(x').$$

Известно, что сумму полученного ряда с мультипликатором $\left\{ (-i)^k \frac{\Gamma\left(\frac{n+k-m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)} \right\}_{k=0}^{\infty}$ можно записать в виде р.ф.-интеграла с исходной функцией g :

$$\sum_{k,\mu} (-i)^k \frac{\Gamma\left(\frac{n+k-m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)} g_{k,\mu} Y_{k,\mu}(x') = \frac{1}{2^{n-m} \pi^{n/2}} \left[\Gamma(n-m) \text{ p.f. } \int_{S^{n-1}} \frac{g(\sigma) d\sigma}{(ix \cdot \sigma)^{n-m}} + \right. \quad (9)$$

$$\left. + \pi i^{n-m-1} \frac{\partial^{n-m-1} \widetilde{M}_g(-x', 0)}{\partial y^{n-m-1}} \right] \quad (10)$$

(см. [30], формула (34)). Заметим, что в формуле (34) из [30] содержатся опечатки, в (9) они исправлены.

В силу (9) из (8) получаем

$$u_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^n |x|^{n-m}} \left[(-i)^n \Gamma(n-m) \text{ p.f. } \int_{S^{n-1}} \frac{d\sigma}{(x \cdot \sigma)^{n-m} P_m(\sigma)} + \pi i^{n-1} \frac{\partial^{n-m-1} \widetilde{M}_{1/P_m}(-x', 0)}{\partial y^{n-m-1}} \right]. \quad (11)$$

Далее различаем случаи четного и нечетного n . Пусть n нечетно. Тогда первое слагаемое исчезает в силу леммы 2 приходим к формуле (6). Пусть теперь n четно. Тогда $n - m - 1$ нечетно и в силу леммы 3 исчезает последнее слагаемое в квадратных скобках в (11), что и дает формулу (7). $\square$

Следствие. Пусть $m = n - 1$. Фундаментальное решение в случае четного n имеет вид сферического сингулярного интеграла

$$u_0(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \int_{S^{n-1}} \frac{\frac{1}{P_{n-1}(\sigma)} d\sigma}{x \cdot \sigma} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x' \cdot \sigma| > \varepsilon} \frac{\frac{1}{P_{n-1}(\sigma)} d\sigma}{x \cdot \sigma},$$

а в случае нечетного n дается формулой

$$u_0(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}}} \frac{M_{1/P_{n-1}}(-x', 0)}{|x|} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1} \pi^{\frac{n}{2}} |x|} \sum_{k,\mu} (-1)^k \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{n-1}{2}\right)} g_{2k,\mu} Y_{2k,\mu}(x'),$$

где $g_{2k,\mu}$ — коэффициенты Фурье–Лапласа функции $\frac{1}{P_{n-1}(\sigma)}$.

4. О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ $P_m(D)u = f$ В ГРАНД-ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ИЗ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

Формально, как известно, решение уравнения $P_m(D)u = f$ дается сверткой с фундаментальным решением. В нашем случае имеем оператор типа потенциала

$$I_\gamma^m f(x) := u_0 * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\gamma(y')}{|y|^{n-m}} f(x-y) dy,$$

где $\gamma(x')$ — функция (6)–(7).

Теорема 2. Пусть $n \geq 3$ и $P_m(x)$ — эллиптический однородный многочлен четного порядка $m < n$ с постоянными вещественными коэффициентами. Уравнение $P_m(D)u = f$, где $f \in \dot{L}_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \frac{n}{m}$, $a \in G(\mathbb{R}^n)$, $\theta > 0$, имеет в гранд-пространстве Соболева $\dot{W}_a^{(p),q),\theta;m}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$, решение

$$u = I_\gamma^m f \in \dot{W}_a^{(p),q),\theta;m}(\mathbb{R}^n).$$

Это решение единственно с точностью до многочлена порядка $m-1$. Оно единственно, например, в случае степенного грандизатора $a(x) = (1+|x|)^{-\lambda}$, $\lambda > n$.

Доказательство. Так как эллиптическое однородное уравнение $P_m(D)u = 0$ во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ может иметь решениями только многочлены, а гранд-пространства Лебега со степенными грандизаторами не содержат многочленов [18], то отсюда следует утверждение теоремы о единственности решения.

Для обоснования равенства $P_m(D)I_\gamma^m f \equiv f$ заметим, что оно очевидно в образах Фурье, например, на функциях f из класса Φ Лизоркина, инвариантного относительно оператора I_γ^m , с учетом того, что умножение на преобразование Фурье ядра $\frac{\gamma(x')}{|x|^{n-m}}$, т. е. на функцию $\frac{1}{P_m(-ix)}$, сохраняет класс $\hat{\Phi}$. Так как класс Φ плотен в гранд-пространстве $\dot{L}_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$, то в силу теоремы Банаха–Штейнгауса остается проверить следующую ограниченность операторов:

$$I_\gamma^m : \dot{L}_a^{(p),\theta} \rightarrow \dot{W}_a^{(p),q),\theta;m}, \quad (12)$$

$$P_m(D) : \dot{W}_a^{(p),q),\theta;m} \rightarrow \dot{L}_a^{(q),\theta}. \quad (13)$$

Ограниченность в (13) очевидна по самому определению гран-пространства Соболева. Для (12) имеем

$$\|I_\gamma^m f\|_{\dot{W}_a^{(p),q),\theta;m}(\mathbb{R}^n)} = \|I_\gamma^m f\|_{\dot{L}_a^{(q),\theta}(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|j|=m} \|D^j I_\gamma^m f\|_{\dot{L}_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ограниченность оператора I_γ^m с характеристикой γ из гранд-пространства $\dot{L}_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ в гранд-пространство $\dot{L}_a^{(q),\theta}(\mathbb{R}^n)$ следует из такой ограниченности потенциала Рисса, так как $\gamma \in C^\infty(S^{n-1})$. Последнее доказано в [18]. Оператор $D^j I_\gamma^m$, $|j|=m$, есть линейная комбинация единичного оператора и оператора Кальдерона–Зигмунда с бесконечно дифференцируемой характеристикой. Ограниченность последних в $\dot{L}_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ есть следствие более общего факта об ограниченности в $\dot{L}_a^{(p),\theta}(\mathbb{R}^n)$ некоторого класса сублинейных операторов (см. [18], теорема 3.1 и лемма 2.2, ср. с теоремой 4.1 из [18] для максимального оператора). $\square$

Автор выражает благодарность профессору С.Г. Самко за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Iwaniec T., Sbordone C. *On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses*, Arch. Rational Mech. Anal. **119** (2), 129–143 (1992).
- [2] Greco L., Iwaniec T., Sbordone C. *Inverting the p -harmonic operator*, Manuscripta Math. **92** (3), 249–258 (1997).
- [3] Iwaniec T., Sbordone C. *Weak minima of variational integrals*, J. Reine Angew. Math. **454**, 143–161 (1994).
- [4] Fiorenza A., Gupta B., Jain P. *The maximal theorem in weighted grand Lebesgue spaces*, Studia Math. **188** (2), 123–133 (2008).
- [5] Kokilashvili V. *Boundedness criteria for singular integrals in weighted Grand Lebesgue spaces*, J. Math. Sci (N.Y.) **170** (1), 20–33 (2010).
- [6] Kokilashvili V., Meskhi A. *A note on the boundedness of the Hilbert transform in weighted grand Lebesgue spaces*, Georgian Math. J. **16** (3), 547–551 (2009).
- [7] Meskhi A. *Weighted criteria for the Hardy transform under the B_p condition in grand Lebesgue spaces and some applications*, J. Math. Sci. (N.Y.) **178** (6), 622–636 (2011).
- [8] Кокилашвили В.М., Месхи А.Н. *Весовая экстраполяция в пространствах Иванецца–Сбордоне. Приложение к интегральным операторам и теории приближений*, Тр. МИАН **293**, 167–192 (2016).
- [9] Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., Samko S. *Integral Operators in Non-standard Function Spaces. Vol. 1: Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces*, Birkhäuser, 1–586 (2015).
- [10] Kokilashvili V., Meskhi A., Rafeiro H., Samko S. *Integral Operators in Non-standard Function Spaces. Vol. 2: Variable exponent Hölder, Morrey–Campanato and grand spaces*, Birkhäuser, 571–1003 (2016).
- [11] Samko S.G., Umarchadzhiev S.M. *On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure*, Azerb. J. Math. **1** (1), 67–84 (2011).
- [12] Samko S.G., Umarchadzhiev S.M. *On Iwaniec–Sbordone spaces on sets which may have infinite measure: addendum*, Azerb. J. Math. **1** (2), 143–144 (2011).
- [13] Умархаджиев С.М. *Обобщение понятия гранд-пространства Лебега*, Изв. вузов. Матем. № 4, 42–51 (2014).
- [14] Умархаджиев С.М. *Ограниченность линейных операторов в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега*, Вестн. Акад. наук Чеченской Республики **19** (2), 5–9 (2013).
- [15] Umarchadzhiev S.M. *One-dimensional and multidimensional Hardy operators in grand Lebesgue spaces*, Azerb. J. Math. **7** (2), 132–152 (2017).
- [16] Samko S.G., Umarchadzhiev S.M. *Riesz fractional integrals in grand Lebesgue spaces*, Fract. Calc. Appl. Anal. **19** (3), 608–624 (2016).
- [17] Умархаджиев С.М. *Интегральные операторы с однородными ядрами в гранд-пространствах Лебега*, Матем. заметки **102** (5), 775–788 (2017).
- [18] Samko S.G., Umarchadzhiev S.M. *On grand Lebesgue spaces on sets of infinite measure*, Math. Nachr., **290** (5-6), 913–919 (2017).
- [19] Umarchadzhiev S.M. *The boundedness of the Riesz potential operator from generalized grand Lebesgue spaces to generalized grand Morrey spaces*, In Operator theory, operator algebras and applications., Basel: Birkhäuser/Springer, 2014, 363–373.
- [20] Умархаджиев С.М. *Ограниченность потенциала Рисса в весовых обобщенных гранд-пространствах Лебега*, Владикавказск. матем. журн. **16** (2), 62–68 (2014).
- [21] Умархаджиев С.М. *Описание пространства риссовых потенциалов функций из гранд-пространства Лебега на $\mathbb{R}^n$* , Матем. заметки **104** (3), 467–480 (2018).
- [22] Умархаджиев С.М. *Ограниченность максимального оператора в гранд-пространствах Лебега на $\mathbb{R}^n$* , Изв. вузов. Сев. Кавказск. регион., Естеств. науки **1**, 35–38 (2016).
- [23] Samko S.G. *Hypersingular Integrals and their Applications*. London-New-York: Taylor & Francis, Series Analytical Methods and Special Functions vol. 5, 2002.
- [24] Трев Ж. *Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами* (Мир, М., 1965).
- [25] Гельфанд И.М., Шапиро З.Я. *Однородные функции и их приложения*, УМН **10** (3), 3–70 (1955).
- [26] Лизоркин П.И. *Обобщенное ливуилевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$* . Теоремы вложения, Матем. сб. **60** (3), 325–353 (1963).
- [27] Самко С.Г. *О пространствах риссовых потенциалов*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **40** (5), 1143–1172 (1976).

- [28] Самко С.Г., Умархаджиев С.М. *Описание пространства риссовых потенциалов в терминах старших производных*, Изв. вузов. Матем., № 11, 79–82 (1980).
- [29] Самко С.Г. *Обобщенные риссовые потенциалы и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками; их символы и обращение*, Тр. Матем. ин-та АН СССР **156**, 157–222 (1980).
- [30] Самко С.Г. *Сингулярные интегралы по сфере и построение характеристики по символу*, Изв. вузов. Матем., № 4, 28–42 (1983).
- [31] Пламеневский В.А. *Алгебры псевдодифференциальных операторов* (Наука, М., 1986).

Умархаджиев Салаудин Мусаевич

Академия наук Чеченской Республики,

Комплексный научно-исследовательский институт Российской академии наук им. Х. Ибрагимова,
пр. М. Эсембаева, д. 13, г. Грозный, 364024, Россия,

e-mail: umsalaudin@gmail.com

S.M. Umarchadzhiev

On elliptic homogeneous differential operators in grand spaces

Abstract. We give an application of so called grand Lebesgue and grand Sobolev spaces, intensively studied during last decades, to differential equations in partial derivatives. In the case of unbounded domains such spaces are defined with the use of so called grandizers. Under some natural assumptions on the choice of grandizers, we prove the existence, in some grand Sobolev space, of solution to the equation $P_m(D)u(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m < n$, with the right-hand side in the corresponding grand Lebesgue space, where $P_m(D)$ is an elliptic homogeneous differential operator with constant coefficients of even order m . Also, for such polynomials in the general case we improve some known facts for the fundamental solution of the operator $P_m(D)$: we construct it in the closed form either in terms of spherical hypersingular integrals or in terms of some averages along plane sections of the unit sphere.

Keywords: elliptic homogeneous differential operator, grand Lebesgue space, grand Sobolev space, grandizer, fundamental solution, spherical hypersingular integral.

Salaudin Musaevich Umarchadzhiev

Academy Sciences of the Chechen Republic,

Kh. Ibrahimov Complex Scientific Research Institute of the Russian Academy of Sciences,
13 M. Esembaev Ave., Grozny, 364024 Russia,

e-mail: umsalaudin@gmail.com